Programación Lineal III. Análisis Post-Optimal

P.M. Mateo y David Lahoz

27 de mayo de 2009

En este tema se estudia al análisis post-optimal, ¿qué ocurre en un problema de programación lineal que ya hemos resuelto si realizamos un cambio en alguno de los elementos que lo definen?. Cambios en el costo de una variable, en el valor de un recurso, incorporación de variables y/o restricciones, etc. El tema se divide en dos partes diferenciadas el análisis de sensibilidad en el que se realizan cambios discretos, Por ejemplo, un valor de un costo por otro, o un coeficiente de la matriz de coeficientes tecnológicos por otro, o se quita una variable o se añade una restricción, etc. La segunda parte corresponde a lo que se conoce como análisis parámetrico en este caso se desea conocer la solución del problema cuando la definición de uno o más parámetros del problema dependen de una forma lineal de un parámetro. Mas detalladamente los elementos del tema son; modificación discreta del vector de costos, modificación discreta del vector de recursos. Luego se muestra como añadir variables y restricciones. A continuación se muestra como realizar modificaciones discretas de la matriz A y finalmente se muestra como resolver los problemas de parametrización del vector de costos y del vector de recursos.

Índice

1. Introducción

En todos los modelos de programación lineal los coeficientes de la función objetivo y las restricciones se dan como datos de entrada o como parámetros fijos del modelo. En los problemas reales los valores de estos coeficientes no están, en general, perfectamente fijados, debido a que la mayoría de ellos dependen de parámetros no controlables, por ejemplo, futuras demandas, coste de materias primas, costo de energía, etc. y no pueden ser predichas con exactitud antes de que el problema sea resuelto. También puede suceder que aunque conozcamos los parámetros exactamente estemos interesados en estudiar cómo varía la solución óptima si cambiamos algún parámetro intencionadamente, a efectos de tratamiento, ambas situaciones se resuelven de forma análoga.

Cada variación en los valores de los datos del problema generará un nuevo problema de programación lineal. El análisis de sensibilidad y el análisis paramétrico nos proporcionarán herramientas para el cálculo de las soluciones óptimas de los problemas obtenidos por la modificación de los parámetros originales del problema.

En el procedimiento de resolución siempre se partirá de una solución óptima del problema original, problema antes de ser modificado, y a partir de ella se calcularán las distintas soluciones asociadas a las modificaciones del problema original.

2. Análisis de sensibilidad I

Bajo este epígrafe estudiaremos modificaciones discretas de los parámetros del problema, cambio de un vector de costos/recursos por otro vector de costos/recursos. Por ejemplo, un vector $\mathbf{c} = (10, 15, 24, 8)$ que pasa a ser $\hat{\mathbf{c}} = (11, 16, 23, 8)$, etc.

El desarrollo del apartado lo realizaremos en función de los parámetros modificados, vector de costos en primer lugar y vector de recursos posteriormente.

Formalmente tendremos un problema de optimización inicial (original)

$$\begin{array}{lll} & \text{optimizar} & Z = \mathbf{cx} \\ [P] & \text{s. a:} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

con una solución óptima $\mathbf{x}^*$ obtenida previamente. Entonces consideraremos el problema de programación lineal obtenido por la modificación del problema anterior y nos dispondremos a resolverlo por medio del algoritmo simplex o simplex dual. En cualquiera de los dos casos utilizaremos como solución básica inicial del problema modificado la solución óptima del problema original, que, dependiendo de las modificaciones realizadas constituirá una solución factible básica o una solucion básica factible dual.

En general una modificación cualquiera provocará que al considerar como solución inicial la base óptima del problema original ésta no sea ni factible básica ni factible dual. Para evitar este problema se considerará el tratamiento de modificaciones "pequeñas" del problema, en las que sólo se pierda o la factibilidad dual (costos marginales) o la factibilidad primal, pero nunca las dos simultánemamente, y en el caso de una modificación más compleja ésta se dividirá en varias modificaciones "pequeñas" que se irán aplicando una a una hasta conseguir la modificación global.

La tabla siguiente muestra dos modificaciones de las consideradas pequeñas. Modificación, $\hat{\mathbf{c}}$, del vector de costos original $\mathbf{c}$ con la cual la solución inicial del problema modificado, la construida con la base óptima del problema original, constituye una solución factible básica y, modificación, $\hat{\mathbf{b}}$, del vector de recursos $\mathbf{b}$ tras la que la solución inicial del problema modificado constituye una solución básica factible dual.

	x_1 x_2 $\ldots$ x_{n-1} x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$	$Y = B^{-1}A$	$B^{-1}\mathbf{b}$
	$\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{c}}_B B^{-1}A$ ¿≤ 0? ¿≥ 0?	

	x_1 x_2 $\ldots$ x_{n-1} x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$	$Y = B^{-1}A$	$B^{-1}\hat{\mathbf{b}}$ ¿≥ 0?
	$\mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1}A$	

Para ilustrar las distintas herramientas que se verán en los apartados siguientes consideraremos el siguiente problema de programación lineal en el que se planifica la producción de tres tipos de cerveza en cantidades x_1, x_2 y x_3 a partir de 30 unidades de malta y 45 de levadura, el beneficio de venta de cada unidad de cerveza elaborada así como sus requerimientos de malta y levadura se muestran en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	Disponibilidad
Malta	2	1	2	30
Levadura	1	2	2	45
Beneficio	4	7	3	

El planteamiento del problema queda:

$$\begin{array}{lll} \text{máx } Z & = & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{s. a:} & & \\ & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

y su tabla óptima, con un valor de la función objetivo de 160, es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	

donde x_4 y x_5, variables de holgura, formaron la primera base.

2.1. Modificación en el vector de costos

Tal y como se ha mostrado en la introducción al realizar una modificación en el vector de costos del problema original y considerar como base inicial del problema modificado su base óptima conseguimos una solución factible básica.

Consideramos entonces el problema original $[P]$, cambiamos el vector de costos $\mathbf{c}$ por $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ y llamamos $[\hat{P}]$ al problema resultante

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ [P] \text{ s. a:} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{x} \\ [\hat{P}] \text{ s. a:} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

A continuación dada la tabla óptima del problema original construimos la tabla inicial del problema modificado, considerando como su base inicial la base de dicha tabla.

Tabla óptima de [P]

	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$			$Y = B^{-1}A$			$B^{-1}\mathbf{b}$
			$\mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1}A \leq \mathbf{0}$			

Tabla inicial de [$\hat{P}$]

	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$			$Y = B^{-1}A$			$B^{-1}\mathbf{b}$
			$\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{c}}_B B^{-1}A$			

Los elementos de las dos tablas coinciden excepto por los costos marginales, que ha sido necesario recalcularlos. Una vez actualizados, si el problema es de máximo y son menores o iguales que cero la solución óptima del problema original también es óptima para el modificado. En caso contrario aplicaremos el simplex hasta alcanzar solución óptima o hasta detectar, si es el caso, una dirección no acotación (solución no acotada).

Bajo modificaciones particulares el cálculo de los nuevos costos marginales puede simplificarse. Vamos a considerar dos situaciones, en la primera sólo se modifican costos de variables que no son básicas en la tabla óptima del problema original y en la segunda sólo se modifican costos de variables que eran básicas en la tabla óptima del problema original.

Modificación de costos no básicos

Supongamos que la variable x_{j_0} no es básica en la tabla óptima del problema original y que hemos modificado su costo original c_{j_0} que pasa a ser $\hat{c}_{j_0} = c_{j_0} + \Delta c_{j_0}$. Al reconstruir los costos marginales $c_j - \mathbf{c}_B B^{-1} A_j$, la parte de $\mathbf{c}_B B^{-1} A_j$ no cambia ya que c_{j_0} no pertenece a una variable de la base y por tanto no pertenece a $\mathbf{c}_B$. Así ninguno de los costos marginales habrá cambiado excepto el de x_{j_0} ya que es el único que tiene modificada la parte primera de la expresión del costo marginal. El nuevo costo marginal de x_{j_0} es

$$
\begin{aligned}
CM_{\text{nuevo}} = \hat{c}_{j_0} - \mathbf{c}_B B^{-1} A_{j_0} &= (c_{j_0} + \Delta c_{j_0}) - \mathbf{c}_B B^{-1} A_{j_0} = \\
&= (c_{j_0} - \mathbf{c}_B B^{-1} A_{j_0}) + \Delta c_{j_0} = CM_{\text{viejo}} + \Delta c_{j_0}
\end{aligned}
$$

Es decir si se modifican únicamente costos correspondientes a variables no básicas en la tabla óptima del problema original, su costo marginal se modifica en esa misma cantidad. Si se mantiene el signo de los costos marginales apropiado seguimos teniendo solución óptima, en caso contrario se continúa aplicando el algoritmo del simplex.

Consideremos la siguiente modificación del problema original. Supongamos que el beneficio de la cerveza 3 aumenta a 6 unidades, $\hat{c}_3 = 6 = c_3 + \Delta c_3 = 3 + 3$. ¿Cuál es la solución óptima del problema modificado?. Según lo visto anteriormente tomaremos como base inicial la de la tabla óptima del problema sin modificar, sobre ella los únicos elementos que pueden cambiar son los costos marginales. Teniendo en cuenta el último desarrollo planteado sólo necesitamos recalcular el costo marginal de x_3 ya que es no básica en la tabla óptima y una modificación en su costos sólo afecta al valor de su costo marginal.

$$CM_{\text{nuevo}} = \hat{c}_3 - \mathbf{c}_B B^{-1} A_3 = 6 - (4,7)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}$$

Puede comprobarse que el nuevo costo marginal es $-\frac{4}{3}$, costo marginal antes de la modificación, más 3, variación respecto al costo original (Δc_3).

$$CM_{\text{nuevo}} = CM_{\text{viejo}} + \Delta c_3 = -\frac{13}{3} + 3 = -\frac{4}{3}$$

La tabla inicial para el problema modificado queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	-$\frac{4}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{10}{3}$	

Como los costos marginales siguen siendo menores o iguales que cero la tabla es óptima para el problema modificado y por tanto la solución óptima y el valor de la función objetivo coinciden con los del problema original.

Consideremos ahora que la modificación hubiera sido hasta 8 unidades, es decir, $\hat{c}_3 = 8 = c_3 + \Delta c_3 = 3 + 5$. ¿Cuál es la solución óptima en este caso?.

Como se ha modificado el costo de una varible no básica, sólo se modifica su costo marginal, y además en la misma cantidad en la que se modifica el costo, por tanto su nuevo costo marginal es

$$CM_{\text{nuevo}} = CM_{\text{viejo}} + \Delta c_3 = -\frac{13}{3} + 5 = \frac{2}{3}$$

La tabla inicial queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{10}{3}$	

Dicha solución no es óptima por lo que procedemos con el algoritmo del simplex, entra x_3 sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_2	-1	1	0	-1	1	15
	-1	0	0	-1	-3	

Esta tabla ya es óptima, se elaboran $\frac{15}{2}$ unidades de cerveza de tipo 3, 15 unidades de cerveza de tipo 2 y se alcanza un beneficio de 165 unidades.

Modificación de costos básicos

Supongamos que la variable x_{j_0} es básica en la tabla óptima del problema original y que hemos modificado su costo c_{j_0} que pasa a ser $\hat{c}_{j_0} = c_{j_0} + \Delta c_{j_0}$. Al reconstruir los costos marginales $c_j - \mathbf{c}_B B^{-1} A_j$, la parte de $\mathbf{c}_B B^{-1} A_j$ cambia ya que c_{j_0} pertenece a una variable de la base y aparece en $\mathbf{c_B}$. Como dicha parte está presente en el cálculo de todos los costos marginales todos ellos se modificarán y será necesario recalcularlos. Llamamos $\hat{\mathbf{c}}_B = \mathbf{c}_B + \Delta \mathbf{c}_B$, donde $\Delta \mathbf{c}_B = (0, \ldots, 0, \Delta c_{j_0}, 0, \ldots, 0)$.

El nuevo costo marginal de una variable no básica cualquiera x_j queda:

$$\begin{aligned} CM_{\text{nuevo}} = \quad & c_j - \hat{\mathbf{c}}_B B^{-1} A_j = c_j - (\mathbf{c}_B + \Delta \mathbf{c}_B) B^{-1} A_j = \\ & (c_j - \mathbf{c}_B + B^{-1} A_j) - (\Delta \mathbf{c}_B B^{-1} A_j) = CM_{\text{viejo}} - (\Delta \mathbf{c}_B B^{-1} A_j) \end{aligned}$$

Es decir, los nuevos costos marginales son iguales a los viejos menos un ΔZ_j donde este ΔZ_j se calcula con el $\Delta \mathbf{c}_B$.

Veamos la siguiente situación, supongamos que el beneficio del primer tipo de cerveza disminuye a 3 unidades. Por tanto $\hat{c}_1 = 3 = c_1 + \Delta c_1 = 4 + (-1)$ y $\hat{\mathbf{c}}_B = \mathbf{c}_B + \Delta \mathbf{c}_B = (4, 7) + (-1, 0)$

Para el cálculo de los costos marginales de las varibles no básicas x_3, x_4 y x_5, podemos aplicar directamente la definición

$$\begin{aligned}
(x_3): &\quad CM_{\text{nuevo}} = 3 - (3,7)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{11}{3} \\
(x_4): &\quad CM_{\text{nuevo}} = 0 - (3,7)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \\
(x_5): &\quad CM_{\text{nuevo}} = 0 - (3,7)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{11}{3},
\end{aligned}$$

o bien podemos aplicar los resultados obtenidos,

$$\begin{aligned}
(x_3): &\quad CM_{\text{nuevo}} = CM_{\text{viejo}} - (-1,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{13}{3} - (-\frac{2}{3}) = -\frac{11}{3} \\
(x_4): &\quad CM_{\text{nuevo}} = CM_{\text{viejo}} - (-1,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \\
(x_5): &\quad CM_{\text{nuevo}} = CM_{\text{viejo}} - (-1,0)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{10}{3} - (\frac{1}{3}) = -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

El segundo desarrollo tiene una ventaja respecto al primero ya que no es necesario conocer los datos originales, basta con saber la tabla óptima del problema original y cual ha sido la variación de los costos.

La tabla inicial del problema modificado queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	-$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{11}{3}$	

Tabla que no es óptima, entra x_4 sale x_1 y llegamos a la siguiente tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	$\frac{3}{2}$	0	1	1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{45}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	-4	0	-$\frac{7}{2}$	

con un valor de la función objetivo de 157.5.

2.2. Modificación en el vector de recursos

Supongamos que el vector $\mathbf{b}$ se modifica de la forma $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Si al igual que se hizo en el apartado anterior consideramos la base óptima del problema original y construimos con ella la tabla inicial del problema modificado tendremos una tabla en la que se mantienen todos sus elementos excepto el valor de las variables básicas.

Tabla óptima de $[P]$

	x_1 x_2 $\dots$ x_{n-1} x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$	$Y = B^{-1}A$	$B^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1} A \leq \mathbf{0}$	

Tabla inicial de $[\hat{P}]$

	x_1 x_2 $\dots$ x_{n-1} x_n	$\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_B^*$	$Y = B^{-1}A$	$B^{-1}\hat{\mathbf{b}}$
	$\mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1} A \leq \mathbf{0}$	

En vista de la segunda de las tablas anteriores pueden producirse dos situaciones. La primera es que $B^{-1}\hat{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ con lo que la tabla inicial para el problema modificado es óptima. La segunda situación es que $B^{-1}\hat{\mathbf{b}} \not\geq \mathbf{0}$ y entonces tenemos una tabla que contiene una solución básica factible dual y por tanto deberemos aplicar el simplex dual.

La actualización puede realizarse tal y como se ha indicado, $B^{-1}\hat{\mathbf{b}}$ o en términos de variación respecto al original. Expresando $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ podemos calcular $\hat{\bar{\mathbf{b}}} = B^{-1}\hat{\mathbf{b}} = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\Delta\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + B^{-1}\Delta\mathbf{b}$. Nuevamente dicha modificación en términos de variación no requiere los datos originales para construir la tabla inicial del problema modificado.

Supongamos que la disponibilidad de malta aumenta en 9 unidades, es decir, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. La tabla inicial queda

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	11
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	17
	0	0	-$\frac{13}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{10}{3}$	

Donde el valor de las variables se obtiene con

$$\hat{\hat{\mathbf{b}}} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 45 \end{pmatrix}$$

o con

$$\hat{\hat{\mathbf{b}}} = B^{-1}\hat{\mathbf{b}} = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como los valores de las variables siguen siendo mayores o iguales que cero la solución es factible y por tanto óptima.

Veamos una nueva modificación. En este caso la disponibilidad de levadura pasa a ser 66, es decir, se ha incrementado en 21 unidades el valor de b_2.

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix}$$

El valor de las variables básicas es

$$\hat{\hat{\mathbf{b}}} = B^{-1}\hat{\mathbf{b}} = B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 34 \end{pmatrix}$$

y la tabla queda

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-2
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	34
	0	0	-$\frac{13}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{10}{3}$	

Como se ha perdido la factibilidad primal aplicamos el simplex dual, sale de la base la variable x_1 y entra en su lugar la variable x_5 obteniéndose

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_5	-3	0	-2	-2	1	6
x_2	2	1	2	1	0	30
	0	-10	-1	-7	0	

La solución obtenida ya es óptima, se elaboran 30 unidades de cerveza de tipo 2.

3. Incorporación de variables y restricciones

En este apartado se estudia la incorporación de nuevas variables y restricciones al problema y, como se eliminan restricciones y variables existentes.

3.1. Incorporación de variables

Veamos como introducir una nueva variable x_{n+1} con coeficiente c_{n+1} en la función objetivo y con vector columna A_{n+1} en A.

Para añadir dicha variable basta considerar la tabla óptima del problema original a la que se le añade una nueva columna, la correspondiente a x_{n+1}. Para ello se actualizan los valores de A_{n+1}, es decir se calcula $Y_{n+1} = B^{-1}A_{n+1}$ y se calcula el valor de su costo marginal $c_{n+1} - \mathbf{c}_B B^{-1} A_{n+1}$. La optimalidad de la tabla dependerá del costo marginal de la nueva variable x_{n+1}, si es ≥ 0 y el problema era de mínimo, o si es ≤ 0 y el problema era de máximo, la solución que teníamos para el problema original sigue siendo óptima para el problema modificado y no interesa que la nueva variable tome valor, en caso contrario, la solución no es óptima, dicha variable debe entrar en la base. Se prosigue con el algoritmo del simplex hasta alcanzar solución óptima o hasta detectar solución no acotada si fuera el caso.

Supongamos que queremos considerar la elaboración de un cuarto tipo de cerveza, una cerveza sin alcohol, que requiere una unidad de malta y una unidad de levadura por unidad de cerveza, y cuyo beneficio de venta es de 5 unidades monetarias. ¿Merecerá la pena su elaboración? ¿en qué cantidad?

Si llamamos x_6 a las unidades de este nuevo tipo de cerveza, su columna es $A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y su beneficio $c_6 = 5$. Calculamos la columna actualizada y el costo marginal.

$$Y_6 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad c_6 - z_6 = 5 - (4\ 7) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \geq 0$$

Por tanto la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	20
	0	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{4}{3}$	

no es óptima, entra la variable correspondiente al nuevo tipo de cerveza x_6 y sale x_1, obteniéndose.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_6	3	0	2	2	-1	1	15
x_2	0	1	0	-1	1	0	15
	-4	0	-7	-3	-2	0	

con un valor de la función objetivo de 180 unidades, se elaboran 15 unidades de la nueva cerveza y 15 de la cerveza de tipo 2.

3.2. Incorporación de restricciones

Cuando se considera la incorporación de una nueva restricción el primer paso es comprobar si la solución óptima del problema original la verifica, en este caso la solución también será óptima para el problema modificado.

Nos situamos ahora en que la solución óptima del problema original no verifica la nueva restricción, veamos el proceso a seguir por medio de un ejemplo. Consideremos que existen problemas para el abastecimiento de un tercer ingrediente, el lúpulo. Se pueden conseguir 30 unidades de lúpulo y se necesitan 3, 1 y 1 unidades de lúpulo para la cerveza de tipo 1, 2 y 3, respectivamente. Se trata pues de incluir la restricción

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 30,$$

restricción que no es verificada por la solución óptima del problema original ya que requeriría 35 unidades.

En primer lugar nos fijamos en las variables que aparecen en la restricción y son básicas en la tabla óptima del problema original. Después despejamos de la tabla óptima dichas variables y las sustituimos en la restricción. Sobre nuestro ejemplo, en la restricción aparecen x_1 y x_2, las despejamos de la tabla

$$\begin{array}{ll} x_1 & = 5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 & = 20 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \end{array}$$

Sustituimos en la restricción

$$3(5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5) + (20 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5) + x_3 \leq 30$$

y operando obtenemos

$$-\frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \leq -5$$

La restricción anterior ya está actualizada, basta con incluir una variable de holgura y la restricción está lista.

$$-\frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + x_6 = -5$$

Si la restricción se deja en la forma $\leq$ con lo que la holgura entra sumando podremos aplicar a la tabla resultante el simplex dual. Si cambiamos el sentido de la restricción para que el coeficiente sea positivo entonces la holgura entrará con coeficiente -1 y posteriormente necesitariamos una variable artificial para la construcción de la tabla.

Tal y como hemos dejado la restricción se incluye directamente en la tabla, tomando como variable básica la variable de holgura x_6, obsérvese que los costos marginales no han cambiado como consecuencia de haber entrado en la base una variable de holgura.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	20
x_6	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-5
	0	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	

A partir de aquí se aplica el simplex dual, sale x_6 entra x_4 obteniéndose

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
x_2	0	1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	21
x_4	0	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	3
	0	0	-4	0	$-\frac{17}{5}$	$-\frac{1}{5}$	

que ya contiene una solución óptima del problema con la nueva restricción.

La otra posibilidad es dejar la restricción con término independiente positivo

$$\frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - x_6 = 5$$

Con lo que al construir la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	20
	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-1	5
	0	0	-$\frac{13}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{10}{3}$	0	

no tendríamos una variable básica candidata, deberíamos introducir una variable artificial a_1 con coeficiente $c_{a_1} = -M$ y recalcular todos los costos marginales

$$\frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - x_6 + a_1 = 5$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	0	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	20
a_1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	-$\frac{1}{3}$	-1	1	5
	0	0	$\frac{-13+5M}{3}$	$\frac{-1+5M}{3}$	$\frac{-10-M}{3}$	M	0	

A partir de esta tabla que no es óptima habría que aplicar el simplex con las consideraciones oportunas debidas a la utilizaciónd de variables artificiales, es decir, si al finalizar la variable básica sigue en la base con valor no nulo el problema con la nueva restricción no es factible.

4. Análisis de sensibilidad II. Modificación de la matriz A

A la hora de estudiar modificaciones de la matriz A consideraremos la modificación de una columna de A, en el caso de modificar más de una columna realizaremos el tratamiento columna a columna.

Vamos a distinguir dos situaciones, que se modifique una columna correspondiente a una variable no básica en la tabla óptima del problema original o que se modifique la columna de una variable básica.

Modificación de columna no básica

Comenzamos con la modificación de una columna A_{j_0} correspondiente a una variable x_{j_0} no básica. En este caso las únicas alteraciones que se producen son la de su columna actualizada ya que en lugar de $B^{-1}A_{j_0}$ tendremos $B^{-1}\hat{A}_{j_0}$ y la de su costo marginal.

Por tanto el proceso a seguir es actualizar la información de $\hat{Y}_{j_0} = B^{-1}\hat{A}_{j_0}$, recalcular su costo marginal $c_{j_0} - \hat{z}_{j_0} = c_{j_0} - \mathbf{c}_B B^{-1}\hat{A}_{j_0}$ y dependiendo de lo que ocurra con el signo del nuevo costo marginal la tabla se mantendrá óptima o habrá que proceder con el algoritmo simplex.

Veamos un ejemplo, supongamos que el procedimiento de elaboración del tercer tipo de cerveza, que actualmente se elabora con 2 unidades de malta y 2 de levadura por unidad de cerveza, se modifica de forma que necesita 1 y $\frac{1}{2}$ unidades de malta y levadura, respectivamente. Calcular la nueva solución óptima del problema.

En primer lugar calculamos la columna actualizada de x_3,

$$\hat{Y}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y su costo marginal

$$c_3 - \hat{z}_3 = 3 - (4\ 7) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Introducimos la información sobre la tabla que ha dejado de ser óptima ya que el costo marginal de x_3 es mayor que cero.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	

Entra x_3 sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_3	2	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	10
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	

con lo que la tabla obtenida ya es óptima, elaborándose 10 unidades de la cerveza de tipo 3 y 20 unidades de la cerveza de tipo 2.

Modificación de columna básica

Si la columna modificada corresponde a una variable básica no podemos actuar directamente ya que esto afectaría a B y provocaría cambios en el valor de las variables y en los costos marginales, pudiendo perderse tanto la factibilidad primal como la dual.

El proceso que seguiremos será eliminar la variable modificada y en su lugar introducir una nueva variable con el mismo costo y que tenga la nueva columna. Como ambos cambios únicamente afectan a optimalidad (a costos marginales) pueden realizarse simultáneamente. Formalmente definimos $x_{n+1} \geq 0$, con $c_{n+1} = c_{j_0}$ y $A_{n+1} = \hat{A}_{j_0}$, y seguidamente penalizamos la variable que queremos quitar $c_{j_0} = M$ o $c_{j_0} = -M$ según sea el problema de mínimo o máximo, respectivamente.

Supongamos que se modifican los requerimientos de malta y levadura del primer tipo de cerveza que pasan a ser, respectivamente, 1 y 3. En este caso como x_1 es básica, definimos una nueva variable x_6 con $A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_6 = c_1 = 4$ y hacemos $c_1 = -M$.

Calculamos la columna actualizada de x_6, $Y_6 = B^{-1}A_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ y calculamos todos los costos marginales de todas las variables, ya que hemos modificado el costo de una variable básica (x_1).

La tabla resultante es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	20
	0	0	$\frac{-5+2M}{3}$	$\frac{7+2M}{3}$	$-\frac{14+M}{3}$	$-\frac{23+M}{3}$	

Como la tabla ha dejado de ser óptima aplicamos simplex, entra x_4 sale x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	$\frac{3}{2}$	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{45}{2}$
	$-\frac{7+2M}{2}$	0	-4	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{13}{2}$	

Solución óptima en la que la variable x_1 ya está fuera de la base. En este momento se elimina la columna de x_1, y se renombra la variable x_6 como x_1, ya que corresponde a la variable x_1 tras la modificación.

5. Análisis paramétrico

Como se comento en la introducción bajo este epírafe vamos a estudiar modificaciones del problema original que dependen de un parámetro, por ejemplo:

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{c} = (\,2 \quad 3 \quad 5\,) & \rightarrow & \hat{\mathbf{c}} = (\,2 \quad 3 \quad 5\,) + \lambda\,(\,1 \quad 0 \quad -2\,) & \lambda \in [10, 30] \\ \mathbf{b}' = (\,1 \quad 6 \quad 5\,) & \rightarrow & \hat{\mathbf{b}}' = (\,1 \quad 6 \quad 5\,) + \lambda\,(\,1 \quad 1 \quad 2\,) & \lambda \in [0, 10] \end{array}$$

5.1. Parametrización en el vector de costos

Dado el problema original $[P]$

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z & = & \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Consideramos su modificación $[\hat{P}]$

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z & = & \hat{\mathbf{c}}\mathbf{x} = (\mathbf{c} + \lambda \Delta \mathbf{c})\mathbf{x} \\ \text{s. a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \quad \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \end{array}$$

El proceso para resolver el problema es el siguiente:

1. Resolver el problema para un valor de λ fijo, usualmente si está en $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ se toma $\lambda = 0$, ya que para este valor el problema coincide con el problema original para el cual tenemos ya su solución óptima.

2. Una vez obtenida la solución anterior se actualizan los costos marginales tomando los costos parametrizados en función de λ.

3. Sobre la tabla resultante se impone que los costos marginales, que dependen de λ, se mantengan menores o iguales que cero, es decir, se impone que dichos costos cumplan el criterio de optimalidad,

4. Al imponer que los costos marginales se mantengan óptimos obtenemos que λ debe pertenecer a un cierto intervalo que llamamos $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ (inicialmente $i = 1$ conforme se itere el algoritmo i irá tomando valores sucesivos). Con lo cual siempre que λ pertenezca a él dicha tabla contiene una solución óptima.

5. Suponer que λ toma un valor inmediatamente fuera del intervalo anterior, entonces, alguno de los costos marginales tomará valor estrictamente positivo y la tabla dejará de ser óptima. Realizamos una iteración del simplex haciendo que dicha variable entre en la base y obtenemos una nueva tabla. Con esa nueva tabla volvemos al paso 3.

El proceso finaliza cuando la unión de todos los intervalos $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ obtenidos cubre el intervalo de estudio $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$.

A continuación aplicamos el método anterior a la siguiente parametrización del vector de costos del problema de las cervezas.

$$\hat{\mathbf{c}} = (4\ 7\ 3) + \lambda\,(\,1 \quad -1 \quad 1\,) \text{ con } \lambda \in [-7, \infty),$$

para ésta calcular todas las soluciones óptimas del problema.

En primer lugar se resuelve el problema para un valor de λ fijo. En particular consideramos $\lambda = 0$ cuya resolución corresponde a la resolución del problema original. Dada la tabla óptima del problema con $\lambda = 0$ (problema original) actualizamos sus costos en función de λ obteniendo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
	0	0	$-\frac{13}{3} + \lambda$	$-\frac{1}{3} - \lambda$	$-\frac{10}{3} + \lambda$	

A continuación imponemos que la tabla se mantenga óptima (al menos para $\lambda = 0$ debe ser óptima ya que se trata del problema original y la tabla correspondía a su solución óptima).

Para que la tabla se mantenga óptima todos sus costos marginales deben mantenerse menores o iguales que cero:

$$\begin{array}{ll} -\frac{13}{3}+\lambda \leq 0 & \Longrightarrow \lambda \leq \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3}-\lambda \leq 0 & \Longrightarrow \lambda \geq -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3}+\lambda \leq 0 & \Longrightarrow \lambda \leq \frac{10}{3} \end{array}$$

Tomando la intersección de los intervalos anteriores obtenemos

$$\lambda \in [-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$$

Con lo que obtenemos una primera solución:

Primera solución	$x_1 = 5$ $x_2 = 20$ $x_3 = 0$ $\lambda \in [-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$
	$Z = 5(4+\lambda) + 20(7-\lambda) = 160 - 15\lambda$

Si tomamos algún valor que se salga *ligeramente* de $[-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$, por ejemplo, si consideramos un $\lambda < -\frac{1}{3}$, entonces el costo marginal de x_4 toma valor estrictamente positivo. La tabla ya no será óptima, entrará en la base la variable x_4 obteniéndose

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	$\frac{3}{2}$	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{45}{2}$
	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda$	0	$-4+2\lambda$	0	$-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\lambda$	

A partir de esta tabla repetimos el proceso. Imponemos que la solución se mantenga óptima:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \leq 0 \Longrightarrow \lambda \leq -\frac{1}{3} \\ -4+2\lambda \leq 0 \Longrightarrow \lambda \leq 2 \\ -\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\lambda \leq 0 \Longrightarrow \lambda \leq 7 \end{array}$$

Con lo que si $\lambda \leq -\frac{1}{3}$ todos los costos marginales son menores o iguales que cero. Por tanto dicha tabla es óptima para $\lambda \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$, como nuestro estudio llega hasta -7 obtenemos

Segunda solución	$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{45}{2}$ $x_3 = 0$ $\lambda \in [-7, -\frac{1}{3}]$
	$Z = \frac{45}{2}(7-\lambda) = \frac{315}{2} - \frac{45}{2}\lambda$

Obsérvese que este intervalo debe ser siempre adyacente al intervalo del que nos hemos salido, en este caso adyacente a $[-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$.

Nos queda todavía la parte derecha de $[-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$. Suponemos que $\lambda > \frac{10}{3}$, entonces el costo marginal de x_5, sobre la tabla que dio lugar al intervalo $[-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$, pasa a ser positivo. Por tanto dicha variable entra en la base obteniéndose una nueva tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	15
x_5	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	30
	0	$5-\frac{3}{2}\lambda$	-1	$-2-\frac{1}{2}\lambda$	0	

Imponemos que la tabla se mantenga óptima

$$\begin{array}{l} 5-\frac{3}{2}\lambda \leq 0 \Longrightarrow \ \lambda \geq \frac{10}{3} \\ -2-\frac{1}{2}\lambda \leq 0 \Longrightarrow \ \lambda \geq -4 \end{array}$$

Con lo que la tabla se mantiene óptima siempre que $\lambda \geq \frac{10}{3}$, con lo que ya tenemos estudiado todo el intervalo. La tercera solución queda

Tercera solución	$x_1 = 15$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $\lambda \in [\frac{10}{3}, \infty)$
	$Z = 15(4-\lambda) = 60 + 15\lambda$

5.2. Parametrización en el vector de recursos

Dado el problema original $[P]$

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z &=& \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Consideramos su modificación $[\hat{P}]$

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z &=& \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda\Delta\mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \quad \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \end{array}$$

El proceso para resolver el problema es análogo al de la parametrización en costos:

1. Resolver el problema para un valor de λ fijo, usualmente si está en $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ se toma $\lambda = 0$, ya que para este valor el problema coincide con el problema original para el cual tenemos ya su solución óptima.

2. Una vez obtenida la solución anterior se actualizan el valor de las variables básicas parametrizadas en función de λ.

3. Sobre la tabla resultante se impone que las variables se mantengan con valor mayor o igual que cero, es decir, se impone que dicha solución sea factible.

4. Al imponer la factibilidad obtenemos que λ debe pertenecer a un cierto intervalo que llamamos $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ (inicialmente $i = 1$ conforme se itere el algoritmo i irá tomando valores sucesivos). Con lo cual siempre que λ pertenezca a él dicha tabla contiene la solución óptima.

5. Suponer que λ toma un valor inmediatamente fuera del intervalo anterior entonces alguna de las variables básicas tomará valor estrictamente negativo y la tabla dejará de ser óptima. Realizamos una iteración del simplex dual haciendo que dicha variable salga de la base y obtenemos una nueva tabla. Con esta tabla volvemos al paso 3.

El proceso finaliza cuando la unión de todos los intervalos $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ obtenidos cubre el intervalo de estudio $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$.

Consideramos la siguiente modificación paramétrica del vector de recursos

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \in [-10, 25]$$

Resolvemos para $\lambda = 0$, problema original y actualizamos el valor de las variables de dicha solución óptima en función de λ.

$$\hat{\hat{\mathbf{b}}} = B^{-1}\hat{\mathbf{b}} = B^{-1} \begin{pmatrix} 30 - \lambda \\ 45 - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 - \lambda \end{pmatrix}$$

y la tabla queda

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20-λ
	0	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	

Imponemos que la tabla se mantenga óptima

$$\begin{array}{l} 5 \geq 0 \\ 20 - \lambda \geq 0 \Longrightarrow \ \lambda \leq 20 \end{array}$$

Por tanto dicha tabla se mantiene óptima para $\lambda \in [-\infty, 20]$ y considerando nuestro intervalo de estudio obtenemos $\lambda \in [-10, 20]$.

Primera solución	$x_1 = 5$ $x_2 = 20 - \lambda$ $x_3 = 0$ $\lambda \in [-10, 20]$
	$Z = 5 \times 4 + 7(20 - \lambda) = 160 - 7\lambda$

Nos queda por estudiar a la derecha del 20, consideramos que $\lambda > 20$, entonces la variable x_2 toma valor, $20 - \lambda$, negativo. Aplicamos simplex dual sale x_2 y entra x_4, obteniéndose la tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	2	2	0	1	45-2λ
x_4	0	-3	-2	1	-2	-60+3λ
	0	-1	-5	0	-4	

Imponemos que dicha tabla sea óptima, es decir, que sus variables básicas sigan tomando valores no negativos:

$$\begin{array}{l} 45 - 2\lambda \geq 0 \Longrightarrow \ \lambda \leq \frac{45}{2} \\ -60 + 3\lambda \geq 0 \Longrightarrow \ \lambda \geq 20 \end{array}$$

Por tanto la segunda solución queda

Segunda solución	$x_1 = 45 - 2\lambda$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $\lambda \in [20, \frac{45}{2}]$
	$Z = 4 \times (45 - 2\lambda) = 180 - 8\lambda$

Como aun no hemos cubierto todo el intervalo $[-10, 25]$ continuamos por la parte no estudiada. Si $\lambda > \frac{45}{2}$, entonces la variable x_1 toma valor negativo y debe salir de la base. Tomamos la tabla que generó el extremo $\frac{45}{2}$ y al tratar de determinar la varible que entra en la base observamos que todos los elementos de la fila de la variable que sale son mayores o iguales que cero, por tanto en estas condiciones, $\lambda > \frac{45}{2}$, el problema es no factible.

Con el último resultado tenemos estudiado todo el intervalo, hemos obtenido dos soluciones una en el intervalo $[-10, 20]$ y otra en el intervalo $[20, \frac{45}{2}]$, y en el intervalo $(\frac{45}{2}, 25]$ el problema es no factible.

Observaciones:

- En cualquier análisis paramétrico tenemos que obtener intervalos sucesivos adyacentes.

- En el caso de parametrización en costos, en los extremos de los intervalos tenemos solución múltiple. Para dicho λ son óptimas la solución del intervalo de su izquierda y la del intervalo de su derecha.

- En el caso de parametrización en recursos, en los extremos de los intervalos tenemos soluciones degeneradas ya que en ellos la variable que se toma para salir de la base toma valor cero.