1.- Dado el siguiente problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín } Z & = & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{s. a:} & & x_1 + x_2 + x_3 \geq 40 \\ & & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 120 \\ & & x_1 + x_2 - x_3 \geq 30 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A) Plantear el problema dual y escribir las condiciones de la holgura complementaria asociadas a ambos problemas.

B) Comprobar si alguna de las siguientes soluciones es óptima $\mathbf{x} = (0, 0, 40)$ y $\mathbf{x} = (35, 0, 5)$.

2.- A la vista de la siguiente tabla del simplex/simplex dual que corresponde a un problema de máximo con variables x_1 a x_6, ninguna de ellas artificial,

Max	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_2	0	1	**c**	0	6	2	**b**
x_4	0	0	-5	1	3	5	2
x_1	1	0	-2	0	3	2	7
	0	0	**a**	0	-2	-4	

A) Qué deben cumplir los parámetros **a** y **b** para que esa tabla contenga **una solución óptima** del problema.

B) Qué deben cumplir los parámetros **a** y **b** para que esa tabla sea óptima pero **exista otra solución óptima** del problema.

C) Qué deben cumplir los parámetros **a**, **b** y **c** para que el problema tenga solución **no acotada**.

D) Qué deben cumplir los parámetros **a**, **b** y **c** para que el problema sea **no factible**.

3.- La modelización de un problema de producción se ha realizado mediante un problema de programación lineal dado en la siguiente forma: máx $Z = cx$ s. a $Ax \leq b, x \geq 0$. En dicho planteamiento las variables x_1, x_2 y x_3 representan unidades del producto 1, 2 y 3 respectivamente, el vector b representa el vector de disponibilidad de materias primas, la matriz A es la matriz que recoge las necesidades de cada una de las materias primas por parte de los productos, y el vector c contiene los beneficios obtenidos por la venta de cada uno de los distintos tipos de productos. Al aplicar el algoritmo del simplex a dicho problema se ha obtenido la siguiente tabla óptima, donde x_4, x_5 y x_6 representan las variables de holgura que se añadieron para resolver el problema, y que además formaban la base inicial.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	2	0	1	3	-2	0	20
x_2	0	1	0	-1	1	0	15
x_6	-1	0	0	-5	3	1	20
	-1	0	0	-2	0	0	100

A) ¿Cuál sería la solución del problema si la necesidades de materia prima del tercer producto x_3 fueran 1, 2 y 4 para las materias primas 1^a, 2^a y 3^a respectivamente? (Nota: $c_2 = 4$, $c_3 = 2$)

B) ¿Cuál sería la nueva solución óptima si la disponibilidad de materia prima fuera $\tilde{b} = (40, 50, 50)'$? ¿Y si fuera $\tilde{b} = (45, 40, 60)'$?

C) ¿Cuál es la mínima cantidad en la que debe aumentar el beneficio del producto correspondiente a x_1 de manera que sea rentable la elaboración de dicho producto?

D) ¿Cuales son las disponibilidades iniciales de materia prima?

4.- Al resolver un problema de programación lineal de máximo asociado a un proceso de elaboración de 4 productos (x_1, x_2, x_3, x_4), se ha llegado a la siguiente tabla óptima.

	3	6	c_3	5				
x_2	0	1	2/3	0	1/3	0	-1/3	1
x_4	0	0	3/4	1	-1/4	1/4	0	9
x_1	1	0	-5/12	0	-1/12	-1/4	4/3	49
	0	0	-21/6	0	-1/2	-1/2	-2	198

A) i) Si el vector de recursos se modifica según $\bar{b} = b + \Delta b$ donde $\Delta b = (9, -11, 0)$, ¿cuál es la nueva solución y el valor de la función objetivo?.

ii) Si el vector de recursos se modifica según $\bar{b} = b + \Delta b$ donde $\Delta b = (-10, 10, 0)$ ¿cuál es la nueva solución y el valor de la función objetivo?.

B) Se está estudiando la elaboración de un nuevo producto, lo cual supone incorporar una nueva variable x_8 con coeficientes, $c_8 = 4$, vector columna $a_8 = (1, 2, 1)'$. ¿Sería rentable la elaboración de dicho producto?, en caso afirmativo, ¿Qué alternativas de producción existen?.

C) Escribir el enunciado del problema original.

5.- Al resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lcl} \text{mín } Z & = & 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ \text{s. a:} & & x_1 + 3x_3 \geq 3 \\ & & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array}$$

aplicando el algoritmo del simplex dual hemos llegado a la siguiente tabla óptima, donde x_4, x_5 y x_6 son variables de holgura y formaban la primera base.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
9	x_3	1/3	0	1	-1/3	0	0	1
3	x_2	-2/3	1	0	2/3	-1	0	3
0	x_6	5/3	0	0	-2/3	1	1	1
		1	0	0	1	3	0	18

A) ¿Cuánto puede variar el costo de la variable x_1 sin que se modifique la base óptima actual?, ¿y el de x_3?

B) ¿Cuál es la nueva solución del problema si el vector de recursos $(3, 5, 4)'$ se sustituye por $(6, 3, 4)'$?

C) Calcula la nueva solución del problema si se decide sustituir la variable x_1 por otra con costo 3 y cuyo vector en la matriz A es $(1, 1, 1)'$.

6.- Supongamos que el ejercicio 1 se ha modelado de acuerdo al siguiente PPL, donde Sea $x_i, i = 1, 2, 3$, corresponde al número de días que se trabaja en las minas A, B y C, respectivamente

$$\begin{array}{ll} \text{mín } Z = & 200x_1 + 300x_2 + 250x_3 \\ \text{s. a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 60 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 120 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 150 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{array}$$

Al tratar de resolverlo aplicando el algoritmo simplex dual un corte de luz ha detenido el proceso cuando se había obtenido la siguiente tabla.

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{b}}$
x_2	0	1	1/10	-3/5	0	1/10	21
x_5	0	0	2/5	-2/5	1	-3/5	-6
x_1	1	0	4/5	1/5	0	-1/5	18
	0	0	60	140	0	10	

A) Obtener a partir de ella la solución óptima

B) Escribir el problema dual del modelo planteado y obtener su solución óptima.

C) Estudiar el conjunto de soluciones óptimas que aparecen cuando el costo de la primera mina varía de acuerdo con la expresión $200 + \lambda$, si $\lambda \in [-50, 200]$.

D) Un hundimiento va a impedir que pueda utilizarse en un futuro inmediato la mina B. ¿Cuántos días debe ahora trabajarse en cada una de las minas A y C?

E) Plantear un modelo de P.L. que permita determinar cuántos días debe trabajarse en cada mina si el pedido debe entregarse en un máximo de 15 días.

7.- Al resolver un problema de programación lineal en la forma $Min\ Z = \mathbf{c}\mathbf{x}$s. a: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$, se ha obtenido la siguiente tabla óptima,

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{b}}$
x_3	0	0	1	-$\frac{1}{5}$	-$\frac{1}{5}$	-$\frac{1}{5}$	8
x_2	0	1	0	$\frac{2}{5}$	-$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	34
x_1	1	0	0	-$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	6
	0	0	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{22}{5}$	$\frac{2}{5}$	

donde la primera base estaba formada por las variables x_4, x_5 y x_6.

A) ¿Para qué valores de b_1 se mantiene óptima la base actual?

B) Encontrar la solución óptima del problema cuando el vector de costos original $\mathbf{c}$ se sustituye por $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + (0, 0, 0, -1, -1, -2)$.

C) Añadir al problema la restricción $x_1 + x_2 \leq 25$ y encontrar la nueva solución óptima.

D) Introducir una nueva variable x_7 cuyo vector en la matriz $\mathbf{A}$ es $(-2, -2, 1)^T$ y cuyo costo es $c_7 = 4$, y encontrar la nueva solución óptima del problema.

E) ¿Cuál es la solución óptima del problema dual asociado al problema resuelto, sabiendo que $c_1 = 2, c_2 = 3$ y $c_3 = 9$?

8.- Dado el problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx } Z & = & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s. a:} & & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ & & 3x_1 + 2x_2 \leq 460 \\ & & x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ & & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{array}$$

A) Plantear el problema dual.

B) Comprobar si $x_1 = 100, x_2 = 80$ y $x_3 = 0$ es solución óptima del problema primal utilizando el Teorema de la Holgura Complementaria.

C) Comprobar si $y_1 = 5,\ y_2 = y_3 = 0$ es solución óptima del problema dual utilizando el Teorema de la Holgura Complementaria.

D) Utilizando los resultados obtenidos anteriormente dar la solución de los problemas primal y dual.

9.- Dado el enunciado del ejercicio 2 suponer que se ha planteado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lll} \text{máx } Z & = & 31x_1 + 44x_2 + 57x_3 - 2(2x_1 + 4x_2 + 3x_3) - \\ & & \qquad 3(x_1 + 3x_2 + 2x_3) - 2(2x_1 + 6x_2 + 5x_3) = \\ & & \qquad\qquad = 20x_1 + 15x_2 + 35x_3 \\ \text{s. a:} & & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 800 \\ & & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 600 \\ & & 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 1200 \\ & & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{array}$$

donde $x_1,\ x_2$ y x_3 representan unidades de producto P_1, P_2 y P_3 respectivamente.

Considerando la tabla siguiente, que muestra una tabla intermedia del proceso de resolución en la que se han introducido al problema anterior variables de holgura

x_4, x_5 y x_6 y se ha aplicado el algoritmo simplex, contesta a los apartados A)...D) siguientes.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	-$\frac{3}{5}$	80
x_5	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	1	-$\frac{2}{5}$	120
x_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	240
	6	-27	0	0	0	-7	

A) Finalizad la resolución del problema e indicar el plan de producción que maximiza el beneficio.

B) ¿Cuál es el mínimo incremento del precio de venta del producto P_2 para que merezca la pena su elaboración? y ¿cuál es el rango de variación del precio de venta de P_3 de manera que la solución actual se mantenga óptima?

C) El gerente de la empresa está considerando la posibilidad de elaborar un nuevo producto P_4 que tendría un precio de venta de 44 u.m y que requeriría 2 unidades de cada una de las tres materias primas. ¿ Resultaría rentable su elaboración?, en caso afirmativo, ¿en qué cantidad?.

D) La empresa se está planteando el cambio de suministrador de la tercera materia prima (MP_3) por otro distribuidor que le podría suministrar hasta 1330 unidades a un precio de 3 u.m., ¿merece la pena dicho cambio?

10.- Dado el problema

$$
\begin{array}{lrl}
\text{máx } Z & = & x_1 + x_2 \\
\text{s. a:} & & -x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
& & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& & x_1 \leq 3 \\
& & x_j \geq 0, \; j = 1, 2
\end{array}
$$

A) Plantear el problema dual.

B) Utilizando el *Teorema de la Holgura Complementaria* comprobar que la solución $(x_1, x_2) = (3, 4)$ es óptima y a su vez obtener todas las soluciones óptimas del problema dual.

11.- Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrl} \text{mín } Z & = & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s. a:} & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 150 \\ & & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 250 \\ & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 170 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A) Utilizar el método del simplex para resolver el problema anterior. (Simplex+método de *Gran M*).

B) Plantear el problema dual y dar su solución justificadamente.

C) ¿Cuál es la solución cuando el vector de recursos $\mathbf{b}$ se sustituye por $\hat{\mathbf{b}} = (\,150 \quad 230 \quad 170\,)'$.

12.- Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lrl} \text{mín } Z & = & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{s. a:} & & -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ & & x_1 + x_3 \leq 35 \\ & & 3x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A) Resolverlo

B) Se obtendrá un valor menor de la función objetivo si se incluye una nueva variable x_4 con columna $A_4 = (1, 1, 1)$ y $c_4 = 3$. En caso afirmativo calcular la nueva solución óptima.

C) ¿Cuál es la nueva solución del problema si se añade la restricción $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$?

D) Escribir el problema dual y dar su solución óptima.

13.- Dado el problema

$$\begin{array}{lrl} \text{máx } Z & = & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{s. a:} & & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 150 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 180 \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 210 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Donde las variables x_1, x_2, x_3, x_4 representan unidades de cuatro tipos de productos elaborados por una factoría a partir de tres materias primas (cada materia prima corresponde a una restricción) de las que se dispone de 150, 180 y 210 unidades respectivamente.

A) Resuelve el problema

B) Por problemas legales debe detenerse la producción del segundo producto (el que tiene asociada x_2), calcular la nueva solución del problema cuando se suprime x_2 del plan de producción.

C) La empresa ha recibido una oferta por la que puede comprar unidades de materia prima 1 (de la que actualmente tiene 150 unidades) a 2 unidades monetarias ¿Merece la pena su compra?, en caso afirmativo, ¿ cuál es la máxima cantidad que debe comprar?