- 1.- Obtener todas las soluciones óptimas del siguiente problema **sin utilizar** ningún método simplex.

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 \\ \text{s. a:} \quad &x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 150 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 200 \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

- 2.- Dado el problema de programación lineal

A) Plantear el problema dual.

B) Resolver gráficamente problema dual.

C) Utilizando el teorema de la holgura complementaria resolver el problema primal.

D) Si añadimos una nueva variable x_4 al problema primal con $a'_4 = (1, 1)$ y costo c_4 ¿Cuánto debería ser c_4 para que fuera rentable fabricar el producto x_4 ?

$$\begin{aligned} \text{mín } Z &= 9x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 27x_4 \\ \text{s. a:} \quad &2x_1 + x_2 + x_3 \geq 102 \\ &x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 300 \\ &x_1 + 2x_3 + 2x_4 \geq 120 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

A) Resolverlo.

B) Calcular todas las soluciones del problema cuando el vector de recursos $\mathbf{b}$ se cambia por $\hat{\mathbf{b}} = (102, 300, 120)' + \lambda(2, -3, 0)'$, con $\lambda \in [-25, 100]$.

- 3.- Dado el siguiente problema de programación lineal, resolverlo sin utilizar ningún algoritmo simplex (plantear el dual, resolverlo gráficamente, usar la solución del dual obtenida y las condiciones de la holgura complementaria para encontrar la solución del problema propuesto)

$$\begin{aligned} \text{mín } Z &= 30x_1 + 18x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ \text{s. a:} \quad &5x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \geq 7 \\ &6x_1 + 6x_2 - x_4 \geq 15 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

4.- Dada la siguiente tabla de simplex correspondiente a un problema de mínimo,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{b}}$
x_1	1	1	0	-1	0	1	3
x_3	0	3	1	a	0	3	5
x_5	0	1	0	0	1	1	b
	0	c	0	d	0	7	

- A) ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros a, b, c y d para que la tabla contenga una solución óptima única?, ¿y para la existencia de solución óptima múltiple?
- B) Suponiendo que la resolución del problema se está realizando mediante el algoritmo simplex dual, ¿qué condiciones deben cumplir los parámetros a, b, c y d para que se pueda concluir que el problema es no factible?
- C) Suponiendo que la resolución del problema se está realizando mediante el algoritmo simplex, ¿qué condiciones deben cumplir los parámetros a, b, c y d para que se pueda concluir que el problema tiene solución no acotada?
- D) Suponiendo que la resolución del problema se está realizando mediante el algoritmo simplex dual, que el formato original del problema era $\text{mín } Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \text{ s.a. } : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, que sea añadieron las variables de holgura x_4, x_5 y x_6 y que además éstas formaron la primera base, en las condiciones del apartado A) (Solución óptima) ¿cuál es la solución óptima del problema dual del problema que se está resolviendo?

5.- En la impresión de los resultados de la resolución de un problema de programación lineal nos hemos quedado sin papel y se ha perdido la/s tabla/s finales. El problema que se había resuelto correspondía a un sistema de producción en el que las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 representaban unidades de cuatro tipos de producto elaboradas a partir de tres materias primas de las que se disponía de cantidades b_1, b_2 y b_3 ($\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)'$ vector de recursos del problema resuelto). El problema de programación lineal era de máximo (maximizaba beneficios) e inicialmente, antes de introducir variables de holgura, todas sus restricciones eran de tipo " $\leq$ ".

La última tabla disponible es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{\mathbf{b}}$
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$
x_4	0	3	0	1	0	1	0	300
x_1	1	1	0	0	-1	1	1	200
	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$	

- A) Finalizar la resolución del problema.
- B) La solución óptima obtenida en el apartado anterior no resulta satisfactoria para el encargado de la empresa ya que no se elabora ninguna unidad del producto segundo (x_2 no toma valor en dicha solución óptima), por ello desea imponer al modelo que al menos se elaboren 30 unidades de producto segundo. Encontrar la solución óptima con esta nueva condición añadida al problema.

6.- Dado el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a:} & \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ & \quad x_1 + x_2 \leq 7 \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comprobar aplicando las condiciones de la holgura complementaria que el punto $x_1 = 7, x_2 = 0$ es solución óptima.

7.- La resolución del problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\ \text{s. a:} & \quad 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 90 \\ & \quad x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ & \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 70 \\ & \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

ha proporcionado la siguiente solución óptima

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	15
x_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
s_3	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	25
	-5	0	-5	0	-1	-4	0	330

En la que la primera base estaba formada por las variables s_1, s_2 y s_3 (variables de holgura).

- A) ¿Cuál es la solución óptima del problema si la columna inicial de $x_4, A_4 = (0, 2, 0)'$ se cambia por $\hat{A}_4 = (2, 2, 1)'$?

- B) ¿Obtener la solución óptima del problema cuando se considera, además de las tres existentes, la restricción $x_1 + x_2 \geq 20$.

8.- Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{máx } Z &= 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{s. a:} & \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ & \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- A) Escribir su problema dual.
- B) Utilizando el teorema de la holgura complementaria demostrar que la solución $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 2)$ **NO** es una solución óptima del problema primal.
- C) Utilizando teoría de la dualidad demostrar que la solución óptima del problema dual está acotada inferiormente por 24, es decir, que el valor de la solución óptima del problema dual es mayor o igual que 24.

9.- Dado el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{mín } Z &= 3x_1 + 7x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} & \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ & \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Plantear su problema dual y resolver ambos aplicando la teoría de la dualidad.

- 10.- La tabla siguiente recoge la solución óptima de un problema de producción en la que las variables x_1 , x_2 y x_3 representan, respectivamente, las unidades de producto P_1 , P_2 y P_3 elaboradas, s_1 y s_2 son variables de holgura y a_1 una variable artificial.

	3	5	6	0	0	$-M$	
Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_1	$\bar{\mathbf{b}}$
s_1	3	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	1	1250
x_2	1	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	425
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	25
	-2	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{9}{2}M$	

Al observar la solución óptima, el dueño de la empresa que elabora los productos P_1 , P_2 y P_3 se ha planteado introducir un nuevo producto P_4 que tendrá una columna $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la matriz A y un coeficiente en la función objetivo $c_4 = 2$.
 ¿Conviene la elaboración de dicho producto? ¿Por qué? (Nota: la primera base era (s_1, a_1, s_2))

11.- Al tratar de resolver un problema de producción se ha llegado a la siguiente tabla del simplex

Max	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	$\bar{b}$
x_4	1	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	425
x_3	0	1	1	0	0	150
	-2	-4	0	0	$\frac{1}{2}$	

que indica la presencia de **solución no acotada**. Tras repasar el planteamiento que se ha realizado del problema se ha detectado que faltaba una restricción que no había sido incluida, ésta es $x_2 + x_4 = 300$. A partir de la tabla anterior añadir la restricción $x_2 + x_4 = 300$ y resolver el problema.

12.- Una compañía se dedica a la elaboración de 2 productos, la demanda de estos productos es de 200 unidades para cada uno de ellos. La compañía podrá elaborar los productos o comprarlos a un proveedor. Los costos de compra de estos productos a un cierto proveedor son 3 u.m. por unidad de P1 y 2 u.m. por unidad de P2. Para poder elaborar los productos la compañía debería ampliar las maquinarias de cada uno de los dos talleres que tiene. El coste de ampliación de los talleres depende de qué producto se decide fabricar en cada uno de ellos (sólo se puede ampliar un taller para la fabricación de un único producto), los costes son 50 u.m. por ampliar un taller para producir P1 y 30 u.m. por ampliar un taller para producir P2. Debido a que los talleres se emplean en la actualidad para producir otros productos, como máximo se podría disponer de 15 horas semanales en cada uno de los talleres en el caso de decidir su ampliación. Las tasas de producción por hora que podrían alcanzarse en los talleres serían:

	T1	T2
P1	4	5
P2	6	5

Los costes de producción en cada uno de los talleres es 2.5 por unidad de P1 y 1.5 por cada una de P2. Construir un modelo de programación entera que permita determinar si se amplía o no alguno de los talleres, y el número de piezas compradas y/o producidas de manera que se minimice el costo total de compra-producción.