1. **A.** $a < 0$, $b \leq 0$ ($c = 1$ ya que se trata de una variable básica).

B. Con $a = 0$ la tabla es óptima. Si $b > 0$ entra x_4 sale x_3 y genera otra solución óptima. Entonces son soluciones las dos obtenidas más las combinaciones lineales convexas de ellas. Si $b \leq 0$ entonces tendremos una semirrecta de soluciones optimas, definidas por el punto actual y una dirección extrema del recinto. ($c = 1$ ya que se trata de una variable básica).

C. $a > 0$, b cualquier valor. ($c = 1$ ya que se trata de una variable básica).

D. El problema no puede ser no factible, ya que en particular existe la solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (10, 0, 20, 0, 0, 5)$$

2. **A.** $c = 1$ ya que se trata de la columna de la segunda variable básica. Para el cálculo de a aplicamos la fórmula del cálculo del costo marginal

$$c_j - c_B B^{-1} A_j = 0 - (40, 20, 0) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$$

B. La tabla contiene una solucón óptima ya que el costo marginal de x_4 que era el único que faltaba es positivo.

C. Planteamos una modificación de la forma $\hat{c}_1 = c_1 + \lambda$ y recalculamos los costos marginales del resto de variables: $c_2 - z_2 = 10 - 2\lambda$, $c_4 - z_4 = 10 + \lambda/2$ al imponer que sigan siendo no negativos obtenemos $-20 \leq \lambda \leq 5$. Por tanto puede disminuir hasta en 20 unidades y aumentar hasta en 5.

D. Primero comprobamos si la solución óptima verifica la nueva restricción $3 \times 31 + 2 \times 0 + 20 = 50 \ngeq 55$. Como no la verifica despejamos de la tabla x_1 y x_3 y las sustituimos en la restricción

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + 1/2x_4 + 10 \\ x_3 &= 2x_2 - 1/2x_4 + x_5 + 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3(-2x_2 + 1/2x_4 + 10) + 2x_2 + (2x_2 - 1/2x_4 + x_5 + 20) \geq 55 \\ &-2x_2 + x_4 + x_5 \geq 5 \end{aligned}$$

La cambiamos de dirección, añadimos una variable de holgura y la introducimos en la tabla.

$$2x_2 - x_4 - x_5 + x_7 = -5$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	2	0	-1/2	0	0	0	10
x_3	0	-2	1	1/2	-1	0	0	20
x_6	0	2	0	0	1	1	0	5
x_7	0	2	0	-1	-1	0	1	-5
	0	10	0	10	20	0	0	

Entra x_7 y sale x_4, obteniendo una tabla con la solución óptima $x_1 = 25/2$, $x_3 = 35/2$, $x_6 = x_4 = 5$ y el resto valor cero.

3. **A.** Si es óptima debe existir una solución factible dual que junto con ella verifiquen las condiciones de la holgura complementaria. Imponemos dichas condiciones y calculamos todas las soluciones que las verifiquen. El problema dual es

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & G = 6y_1 + 9y_2 + 4y_3 \\ \text{s. a:} & y_1 + y_2 + 1/3y_3 \geq 1 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{array}$$

Las CHC son

$$\begin{aligned} x_1 v_1 &= 0 \\ x_2 v_2 &= 0 \\ y_1 u_1 &= 0 \\ y_2 u_2 &= 0 \\ y_3 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Al considerar $x = (6, 0)$ y por tanto $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 2$ obtenemos que $v_1 = y_2 = y_3 = 0$ con lo que nos queda $y_1 = 1$ y $v_2 = -1$, por tanto dicha solución del problema dual es la única que verifica CHC junto con $x = (6, 0)$ y no es factible. En consecuencia la solución del primal no es óptima.

B. Por el teorema de dualidad débil tenemos que $Z(x) \leq G(y)\ \forall x, y$ soluciones factibles de sus problemas respectivos. Tomando como x la solución proporcionada en el apartado A) tenemos que $6 = Z(6) \leq G(y)\ \forall y$.

4. PL-4 se cierra por contener una solución entera. Además dicha solución nos permite establecer una cota inferior de la solución óptima del problema. Pl-5 se cierra ya que cualquier ramificación suya proporcionará valores de función objetivo iguales o inferiores a 26.1 y ya sabemos que el valor de la solución debe ser como mínimo 27 (PL-4). PL-7 se cierra por contener ser no factible. El problema PL-6 sigue abierto y habría que ramificarlo. En principio no sabemos si la única solución entera encontrada en PL-4 es la óptima, debemos continuar con la ramificación a partir de PL-6.

5. **A.** Definimos x_{ij} com el número de viajes que realiza el camión i llevando la sustancia j, $i = 1, \ldots, 4, j = 1, 2$. El problema queda

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & Z = 8(x_{11} + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22}) + 12(x_{31} + x_{32}) + 14(x_{41} + x_{42}) \\
\text{s. a:} \quad & 1000x_{11} + 2000x_{21} + 1500x_{31} + 1500x_{41} \geq 25000 \\
& 1000x_{12} + 2000x_{22} + 1500x_{32} + 1500x_{42} \geq 30000 \\
& x_{11} + x_{12} \leq 20 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 20 \\
& x_{31} + x_{32} \leq 20 \\
& x_{41} + x_{42} \leq 20 \\
& x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4, j = 1, 2
\end{aligned}
$$

B. Definimos variables $y_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, 4$ que toman valor 1 si el camión i se utiliza y cero en caso contrario. Incorporamos dichas variables con sus costos (costos fijos mensuales) a la función objetivo y modificamos las 4 últimas restricciones para que las nuevas variables se comporten adecuadamente

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & Z = 8(x_{11} + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22}) + 12(x_{31} + x_{32}) + \\
& 14(x_{41} + x_{42}) + 100y_1 + 120y_2 + 100y_3 + 70y_4 \\
\text{s. a:} \quad & 1000x_{11} + 2000x_{21} + 1500x_{31} + 1500x_{41} \geq 25000 \\
& 1000x_{12} + 2000x_{22} + 1500x_{32} + 1500x_{42} \geq 3000 \\
& x_{11} + x_{12} \leq 20y_1 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 20y_2 \\
& x_{31} + x_{32} \leq 20y_3 \\
& x_{41} + x_{42} \leq 20y_4 \\
& x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\}\ i = 1, \ldots, 4, j = 1, 2
\end{aligned}
$$

C. Debemos garantizar que ninguna pareja x_{i1}, x_{i2} toma valor no nulo simultaneamente, es decir debemos plantear la dicotomía

$$x_{i1} \leq 0 \text{ o } x_{i2} \leq 0$$

Añadiríamos al apartado A) las restricciones

$$x_{i1} \leq MK_i, x_{i2} \leq M(1-K_i), \ i = 1,2,3,4 \text{ y } K_i \in \{0,1\}$$

Donde M representa una cota superior del máximo valor que puede tomar x_{i1} y x_{12}, en particular, se podría considerar $M = 20$.