Tema 4

Métodos de análisis de circuitos

Curso OCW de:

Fundamentos de Electrotecnia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Índice

Tema 4.- Métodos de análisis de circuitos.

4.1. Introducción

4.1. Introducción

- ***Analizar un circuito*** *consiste en determinar la tensión y la intensidad, en función del tiempo, en cada uno de los elementos que componen dicho circuito.*
- ***Datos iniciales:***
  - la configuración del circuito,
  - el valor de las fuentes de tensión e intensidad del circuito,
  - el valor de los elementos que constituyen el circuito,
  - las tensiones e intensidades iniciales en cada una de las ramas del circuito.
- *A partir de estos datos, mediante las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de definición de los elementos, se obtiene la* ***solución del circuito*** *(tensiones e intensidades en cada elemento del circuito).*

- *En este capítulo se van a estudiar métodos que sistematizan el análisis de circuitos.*

4.2. Impedancias y admitancias operacionales

4.2.1. Definición de impedancia y admitancia operacional

- *Se define el* ***operador D*** *(operador derivada) como:* $$D = \frac{d}{dt}$$

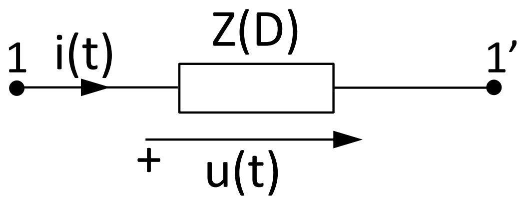
- *y su inversa como:* $$\frac{1}{D} = \int \quad dt$$

Ecuaciones de definición de los distintos elementos en función del operador D

Resistencia	Bobina	Condensador
$u(t) = R \cdot i(t)$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$
$u(t) = R \cdot i(t)$	$u(t) = L \cdot D \cdot i(t)$	$i(t) = C \cdot D \cdot u(t)$
$i(t) = G \cdot u(t)$	$i(t) = \frac{1}{L \cdot D} \cdot u(t)$	$u(t) = \frac{1}{C \cdot D} \cdot i(t)$

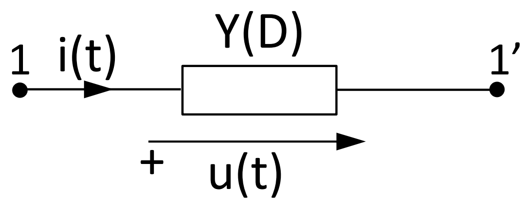
4.2.1. Definición de impedancia y admitancia operacional

- *En general:*



$$u(t) = Z(D)\cdot i(t)$$

Z(D): ***impedancia operacional***



$$i(t) = Y(D)\cdot u(t)$$

Y(D): ***admitancia operacional***

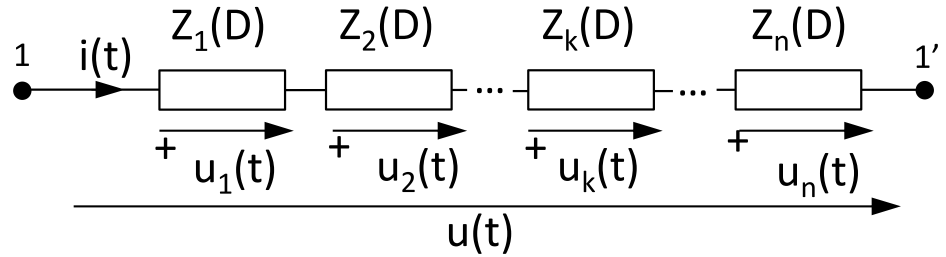
Se cumple que:

$$Z(D) = \frac{1}{Y(D)}$$

	Resistencia	Bobina	Condensador
Impedancia operacional	$Z(D) = R$	$Z(D) = L\cdot D$	$Z(D) = \frac{1}{C\cdot D}$
Admitancia operacional	$Y(D) = G$	$Y(D) = \frac{1}{L\cdot D}$	$Y(D) = C\cdot D$

4.2.2. Asociación de impedancias

A) En serie:



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_k(t) + \cdots + u_n(t)$$

$$u(t) = Z_1(D)\cdot i(t) + Z_2(D)\cdot i(t) + \cdots + Z_k(D)\cdot i(t) + \cdots + Z_n(D)\cdot i(t)$$

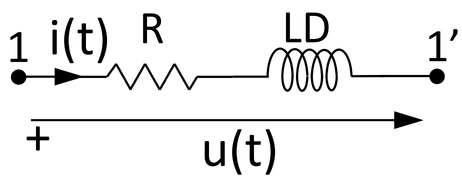
$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^{n} Z_k(D)\cdot i(t) \\ u(t) &= Z_{eq}(D)\cdot i(t) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{Z_{eq}(D) = \sum_{k=1}^{n} Z_k(D)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_k(t) &= Z_k(D)\cdot i(t) \\ u(t) &= Z_{eq}(D)\cdot i(t) \end{aligned}\right\} \frac{u_k(t)}{u(t)} = \frac{Z_k(D)}{\sum_{k=1}^{n} Z_k(D)}$$

$$\boxed{u_k(t) = u(t)\frac{Z_k(D)}{\sum_{k=1}^{n} Z_k(D)}}$$

Divisor de tensión

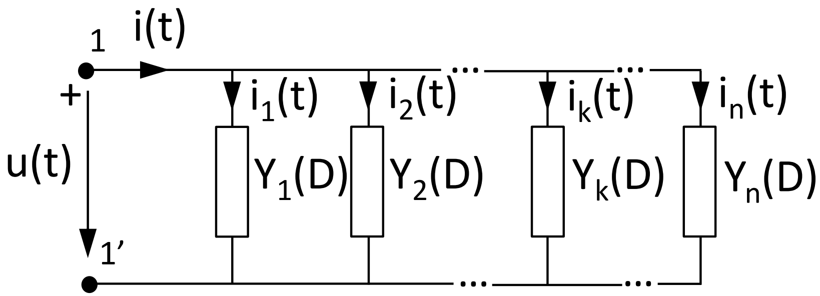
Ejemplo:



$$\left.\begin{aligned} Z_R(D) &= R \\ Z_L(D) &= LD \end{aligned}\right\} Z_T(D) = Z_R(D) + Z_L(D) = R + LD$$

4.2.2. Asociación de impedancias

B) En paralelo:



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_k(t) + \cdots + i_n(t)$$

$$i(t) = Y_1(D)\cdot u(t) + Y_2(D)\cdot u(t) + \cdots + Y_k(D)\cdot u(t) + \cdots + Y_n(D)\cdot u(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} i(t) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(D)\cdot u(t) \\ i(t) = Y_{eq}(D)\cdot u(t) \end{array}\right\}$$

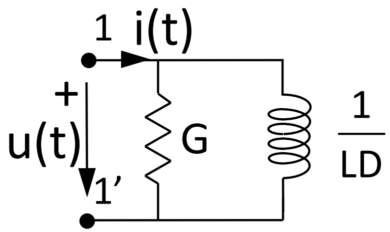
$$\boxed{Y_{eq}(D) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(D)}$$

$$\left.\begin{array}{l} i_k(t) = Y_k(D)\cdot u(t) \\ i(t) = Y_{eq}(D)\cdot u(t) \end{array}\right\} \quad \frac{i_k(t)}{i(t)} = \frac{Y_k(D)}{\sum_{k=1}^{n} Y_k(D)}$$

$$\boxed{i_k(t) = i(t)\frac{Y_k(D)}{\sum_{k=1}^{n} Y_k(D)}}$$

Divisor de intensidad

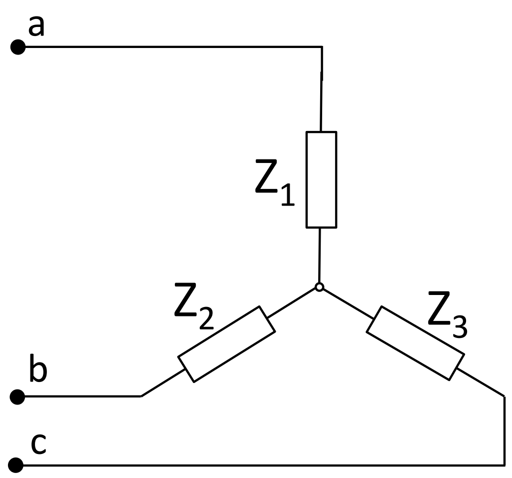
Ejemplo:



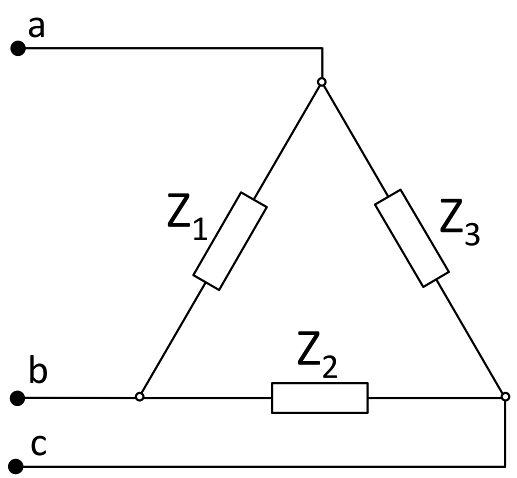
$$\left.\begin{array}{l} Y_R(D) = G \\ Y_L(D) = \dfrac{1}{LD} \end{array}\right\} Y_T(D) = Y_R(D) + Y_L(D) = G + \frac{1}{LD} = \frac{1 + GLD}{LD}$$

4.2.2. Asociación de impedancias

C) Asociación en estrella y en triángulo:



Asociación en estrella

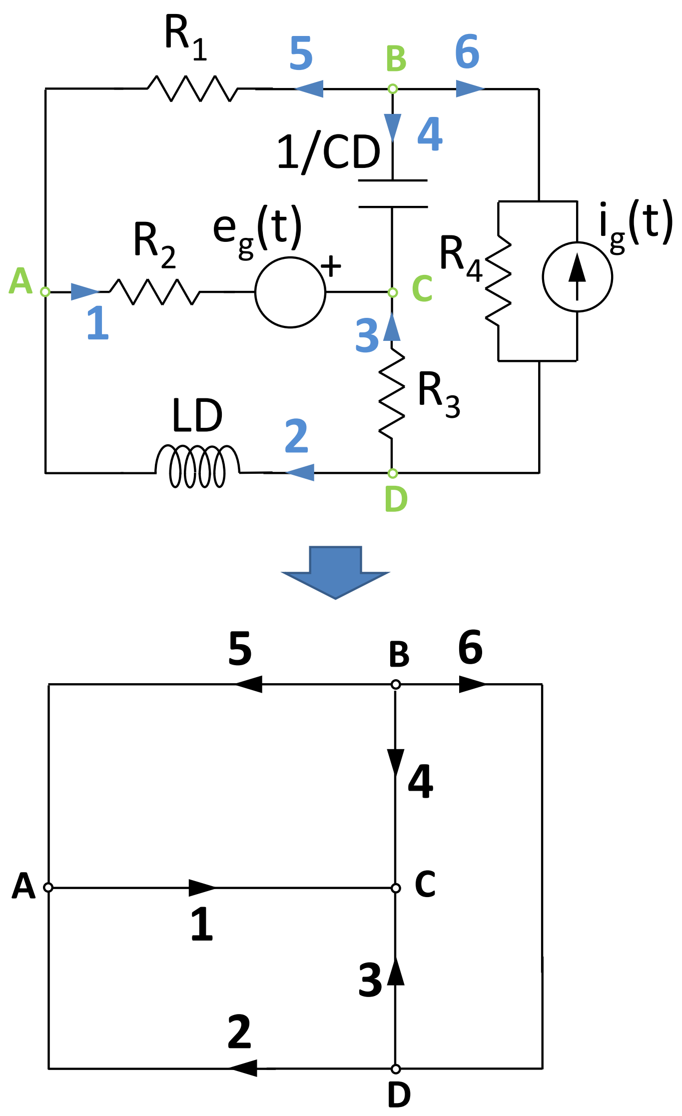


Asociación en triángulo

4.3. Representación de los circuitos

4.3. Representación de circuitos

- *Definiciones:*
  - ***Rama****:* Elemento o grupo de elementos de un circuito que presenta dos terminales y del que se puede conocer su ecuación de definición. En el circuito de la figura podemos considerar que tenemos 6 ramas (se podrían contar hasta 8, en función de si se consideran las fuentes como reales o bien como ideales)
  - ***Nudo****:* Punto de unión de dos o más ramas. El circuito de la figura tiene 4 nudos (A, B, C y D).
  - ***Grafo reticular****:* Representación de un circuito resultado de sustituir cada rama de su esquema por un segmento orientado.
  - ***Lazo****:* Conjunto de ramas de un circuito que forman una línea cerrada (1-4-5; 1-2-3; 3-4-6; 2-3-4-5; 2-5-6; etc.).
  - ***Malla****:* Lazo de un circuito que no contiene a otro lazo en su interior. En el circuito de la figura sólo hay tres mallas: (1-2-3; 1-4-5; 3-4-6).



Grafo reticular

4.4. Equivalencias entre ramas

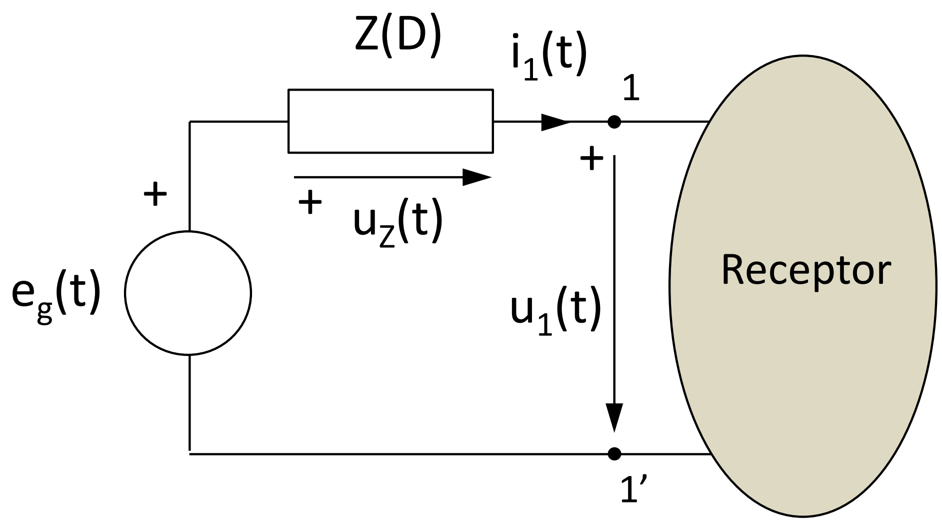
4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales

- *Dos dipolos activos se dicen equivalentes respecto de sus terminales si, al cargarlos con el mismo receptor, la tensión entre sus bornes y la intensidad que entra (sale) de ellos es la misma.*

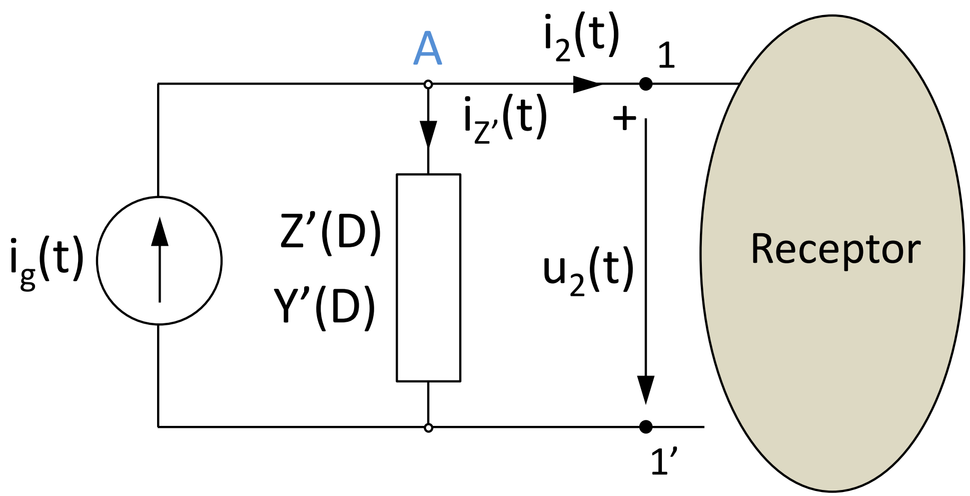
- *Sean una fuente real de tensión y una fuente real de intensidad. Ambas fuentes se conectan al mismo receptor y se calcula la tensión entre sus terminales en estas condiciones:*

Diapositiva siguiente

4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales



$$u_1(t) = e_g(t) - u_Z(t) =$$
$$= e_g(t) - Z(D)\cdot i_1(t)$$



1ª LK nudo A $i_g(t) - i_2(t)$

$$u_2(t) = Z'(D)\cdot i_{Z'}(t) =$$
$$= Z'(D)(i_g(t) - i_2(t)) =$$
$$= Z'(D)\cdot i_g(t) - Z'(D)\cdot i_2(t)$$

4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales

Fuente de tensión: $u_1(t) = e_g(t) - Z(D) \cdot i_1(t)$

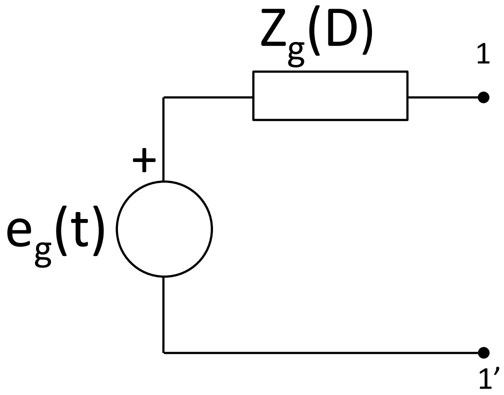
Fuente de intensidad: $u_2(t) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) \cdot i_2(t)$

Para que las fuentes sean equivalentes: $\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = u(t) \\ i_1(t) = i_2(t) = i(t) \end{cases}$

Entonces: $e_g(t) - Z(D) \cdot i(t) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) \cdot i(t)$

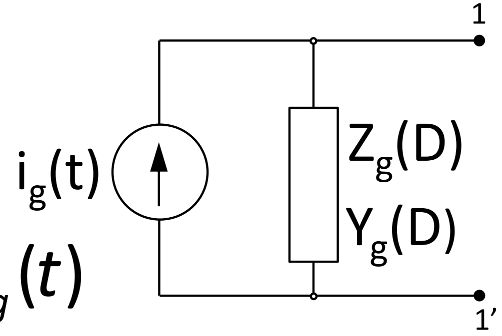
$$\boxed{\begin{aligned} Z(D) &= Z'(D) \\ e_g(t) &= Z(D) \cdot i_g(t) \end{aligned}}$$

4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales



$$i_g(t) = \frac{e_g(t)}{Z_g(D)}$$

$$e_g(t) = Z_g(D) \cdot i_g(t)$$



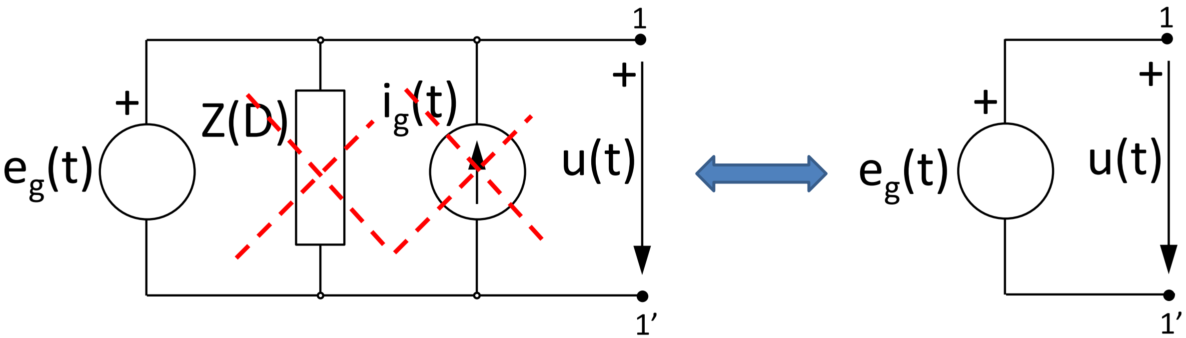
$$Z_g(D)_{\text{fuente tensión}} = Z_g(D)_{\text{fuente intensidad}}$$

- La flecha de la fuente de intensidad ha de apuntar hacia el terminal marcado con el “+” de la fuente de tensión

- ***Atención:*** *La equivalencia entre fuentes reales es sólo válida para el resto de los elementos del circuito al cual están conectadas, no para los elementos que forman la fuente real.*

4.4.2. Elementos en paralelo y en serie con fuentes ideales

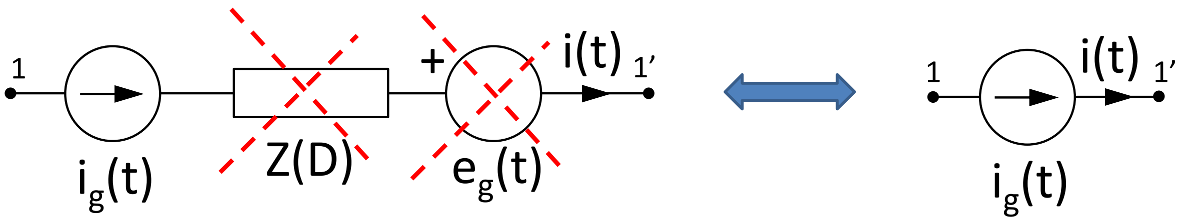
- *Elementos en paralelo con una* ***fuente ideal*** *de tensión*



En ambos casos:

$$u(t) = e_g(t)$$

- *Elementos en serie con una* ***fuente ideal*** *de intensidad*



En ambos casos:

$$i(t) = i_g(t)$$

Atención: *Estas equivalencias son sólo válidas para los elementos del resto del circuito, no para los elementos que intervienen en ella.*

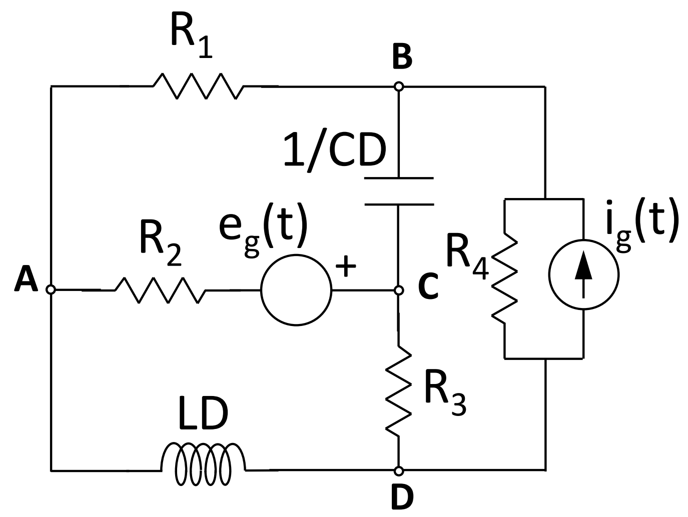
4.5. Métodos de análisis de circuitos

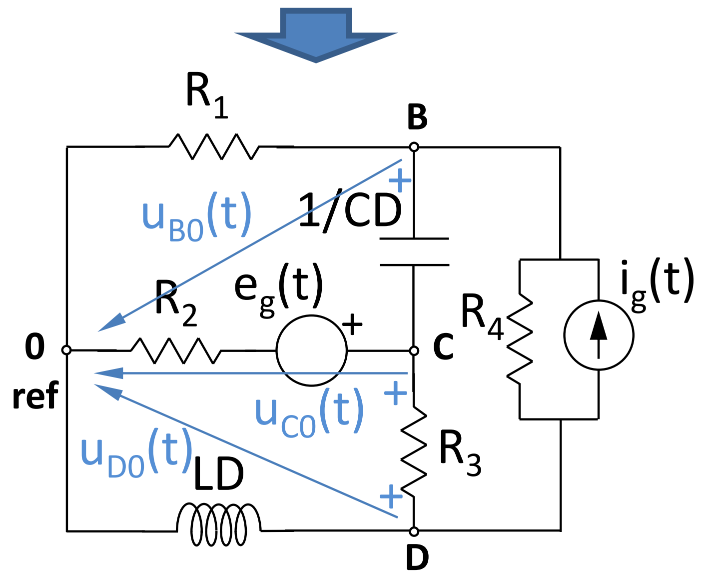
4.5.1. Acerca del número de ecuaciones e incógnitas

- *Balance de ecuaciones e incógnitas que se tienen al realizar el análisis de un circuito:*
  - Incógnitas:
    - Si el circuito tiene r ramas, tendremos **2*r* incógnitas** correspondientes a la tensión y la intensidad de cada rama.
  - Ecuaciones linealmente independientes:
    - De las ecuaciones de definición de cada rama se obtienen r ecuaciones linealmente independientes.
    - Mediante la aplicación de la Ley de Kirchhoff de las intensidades se pueden obtener $n-1$ (n = número de nodos del circuito) ecuaciones linealmente independientes.
    - Mediante la aplicación de la Ley de Kirchhoff de las tensiones se pueden obtener $r-(n-1)$ ecuaciones linealmente independientes.
  - Número de ecuaciones lin. independientes: $r+(n-1)+[r-(n-1)] = \mathbf{2r}$
- *Si número de ecuaciones linealmente independientes = número de incógnitas* $\Rightarrow$ ***El sistema tiene solución única***

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Consiste en aplicar la Ley de Kirchhoff de las intensidades a cada uno de los nudos del circuito, excepto a uno de ellos que se toma como referencia, utilizando para ello las* ***tensiones de nudo***.
  - ***Tensiones de nudo***: Cada una de las tensiones de los n-1 nudos restantes al nudo de referencia ($u_{B0}(t)$, $u_{C0}(t)$ y $u_{D0}(t)$)
  - ***Criterio de aplicación de la LKI***: Suma de las intensidades que salen de un nudo por los elementos pasivos que concurren en él = Suma de las intensidades que entran al nudo provenientes de fuentes.
  - Es ***deseable*** que todas las fuentes presentes en el circuito sean fuentes de intensidad (en el caso de fuentes reales de tensión, aplicar la equivalencia de fuentes reales)

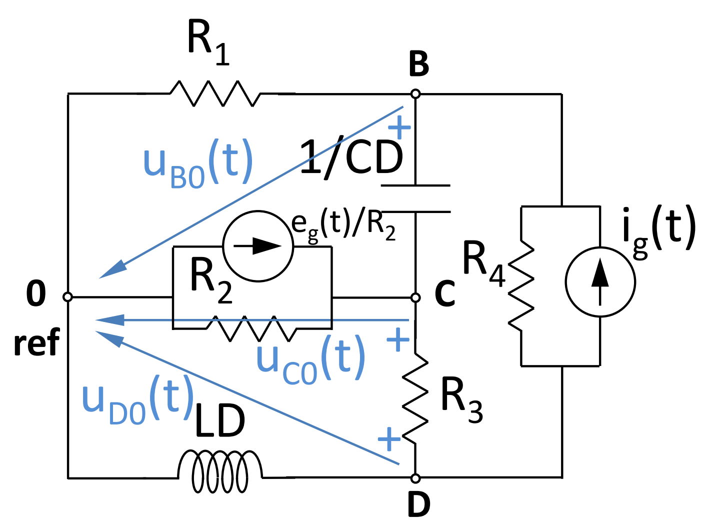




4.5.2. Método de análisis por nudos

– Recomendaciones y notas:

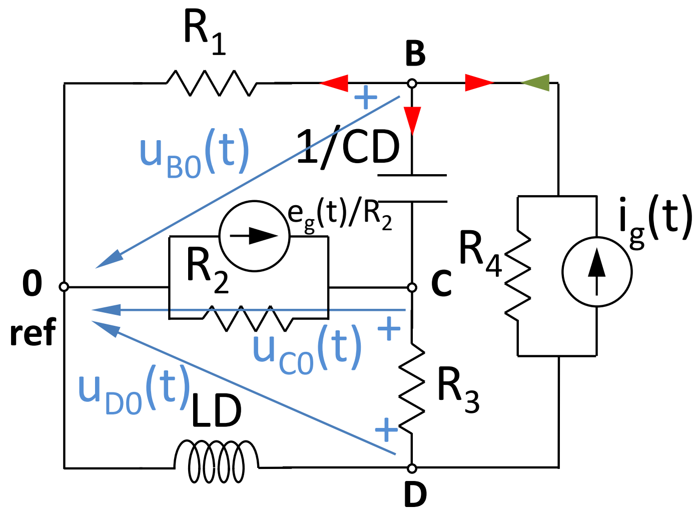
- *Elección del nudo de referencia*: Se puede escoger a tal fin cualquier nudo del circuito; sin embargo, se recomienda elegir aquel nudo al que concurran un mayor número de ramas por resultar las ecuaciones, en general, más sencillas.
- A la hora de determinar los nudos del circuito, hay que asegurarse de que todos y cada uno de los elementos del circuito está situado entre dos nudos.
- Si dos o más nudos del circuito están unidos por un cortocircuito, eléctricamente todos esos nudos son sólo uno y, en consecuencia, todos han de tener igual nombre.



4.5.2. Método de análisis por nudos

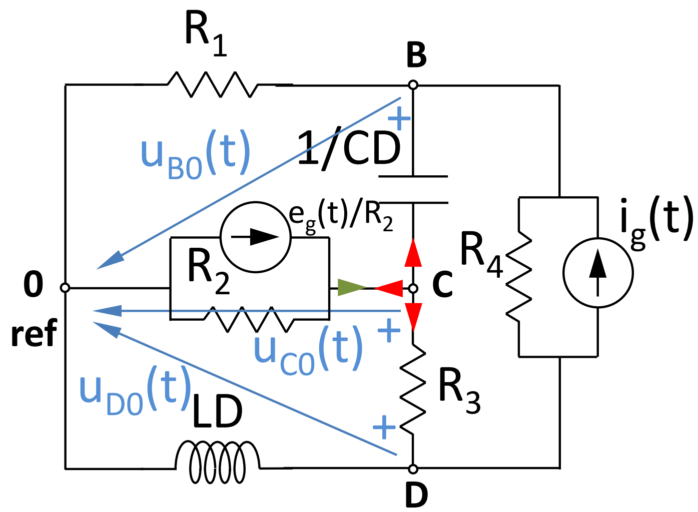
PRAUZ 449 (2021/22)

- *Aplicación de la LKI a todos los nudos (siguiendo el criterio dado), excepto al nudo de referencia*



Nudo B: $$\frac{u_{B0}(t)}{R_1}+\frac{u_{B0}(t)-u_{C0}(t)}{1/CD}+\frac{u_{B0}(t)-u_{D0}(t)}{R_4}=i_g(t)$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+CD+\frac{1}{R_4}\right)u_{B0}(t)-CD\cdot u_{C0}(t)-\frac{1}{R_4}u_{D0}(t)=i_g(t)$$



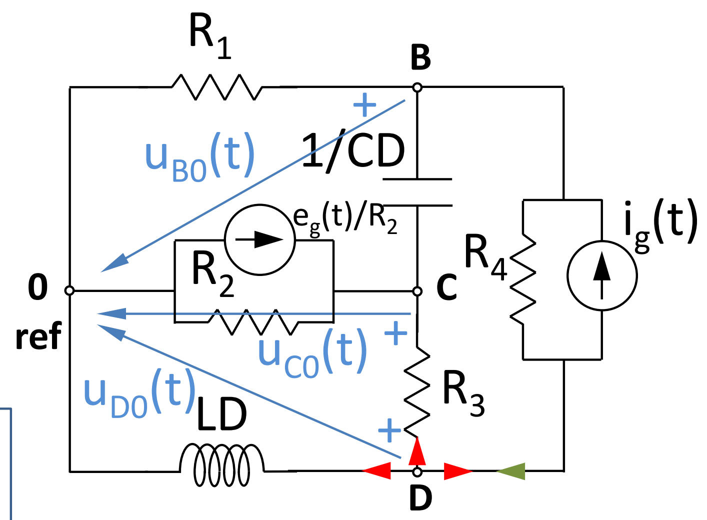
Nudo C: $$\frac{u_{C0}(t)}{R_2}+\frac{u_{C0}(t)-u_{B0}(t)}{1/CD}+\frac{u_{C0}(t)-u_{D0}(t)}{R_3}=\frac{e_g(t)}{R_2}$$

$$-CD\cdot u_{B0}(t)+\left(\frac{1}{R_2}+CD+\frac{1}{R_3}\right)u_{C0}(t)-\frac{1}{R_3}u_{D0}(t)=\frac{e_g(t)}{R_2}$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

Nudo D: $$\frac{u_{D0}(t)}{LD}+\frac{u_{D0}(t)-u_{C0}(t)}{R_3}+\frac{u_{D0}(t)-u_{B0}(t)}{R_4}=-i_g(t)$$

$$-\frac{1}{R_4}u_{B0}(t)+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{LD}+\frac{1}{R_4}\right)u_{D0}(t)-\frac{1}{R_3}u_{C0}(t)=-i_g(t)$$



Nota: Las intensidades siempre se consideran saliendo por los elementos pasivos, independientemente del nudo que estemos considerando

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+CD+\frac{1}{R_4}\right) & -CD & -\frac{1}{R_4} \\ -CD & \left(\frac{1}{R_3}+CD+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{LD}+\frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{B0}(t) \\ u_{C0}(t) \\ u_{D0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) \\ e_g(t)/R_2 \\ -i_g(t) \end{bmatrix}$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Los elementos de la primera matriz tienen dimensiones de admitancias, los de la segunda tienen dimensiones de tensiones y los elementos de la tercera, dimensiones de intensidades. En general, se puede escribir:*

$$\left[Y_{ij}\right]\cdot\left[u_i(t)\right]=\left[i_{ial}(t)\right]$$

donde:

$\left[Y_{ij}\right]$: Matriz de admitancias de nudo (matriz simétrica)

$\left[u_i(t)\right]$: Vector de tensiones de nudo

$\left[i_{ial}(t)\right]$: Vector de intensidades de alimentación de nudo

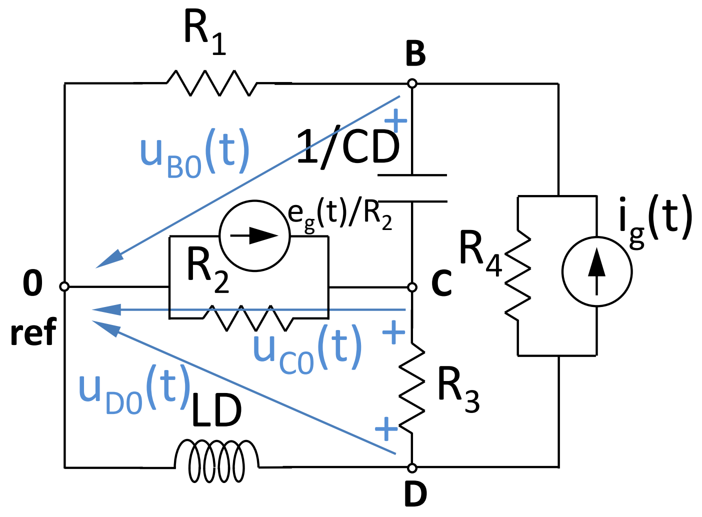
Y_{ii} : Admitancia propia de nudo

$Y_{ij}\Big|_{i\neq j}$: Admitancia mutua de nudo

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - Y_{ii}: Suma de las admitancias de los elementos pasivos que concurren en el nudo i.
  - $Y_{ij}|_{i\neq j}$: Suma, con signo –, de las admitancias de los elementos pasivos que comparten el nudo i y el nudo j
  - $u_i(t)$: Tensiones de nudo (incógnitas).
  - $i_{ial}(t)$: Suma algebraica de las intensidades provenientes de fuentes que entran en el nudo i. Estas intensidades se toman positivas si entran en el nudo i y negativas si salen de dicho nudo.

4.5.2. Método de análisis por nudos



- Y_{BB}: En el nudo B concurren la resistencia R_1, el condensador C y la resistencia R_4.

$$Y_{BB} = \frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4}$$

- Y_{CC}: En el nudo C concurren la resistencia R_2, el condensador C y la resistencia R_3.

$$Y_{CC} = \frac{1}{R_2} + CD + \frac{1}{R_3}$$

- Y_{DD}: En el nudo D concurren la resistencia R_3, el condensador L y la resistencia R_4.

$$Y_{DD} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4}$$

- Y_{BC}: El nudo B y el nudo C comparten el condensador C

$$Y_{BC} = -CD$$

- Y_{BD}: El nudo B y el nudo D comparten la resistencia R_4.

$$Y_{BD} = -\frac{1}{R_4}$$

- Y_{CD}: El nudo C y el nudo D comparten la resistencia R_3.

$$Y_{CD} = -\frac{1}{R_3}$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Matriz simétrica* $\Rightarrow Y_{CB}=Y_{BC}, Y_{DB}=Y_{BD}, Y_{DC}=Y_{CD}$
- *i_{Bal}: Al nudo B le llega la intensidad proveniente de la fuente $i_g(t)$, y entra en dicho nudo.*

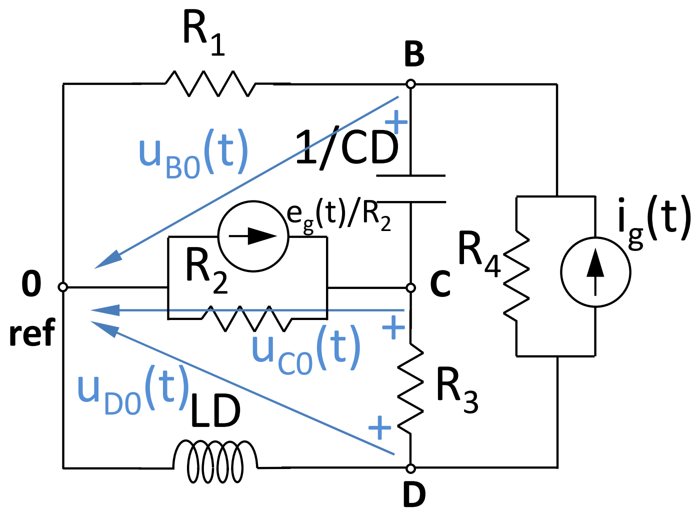
$$i_{Bal}(t)=i_g(t)$$

- *i_{Cal}: Al nudo C le llega la intensidad proveniente de la fuente $e_g(t)/R_2$, y entra en dicho nudo.*

$$i_{Cal}(t)=e_g(t)/R_2$$

- *i_{Dal}: Al nudo D le llega la intensidad proveniente de la fuente $i_g(t)$, y sale de dicho nudo.*

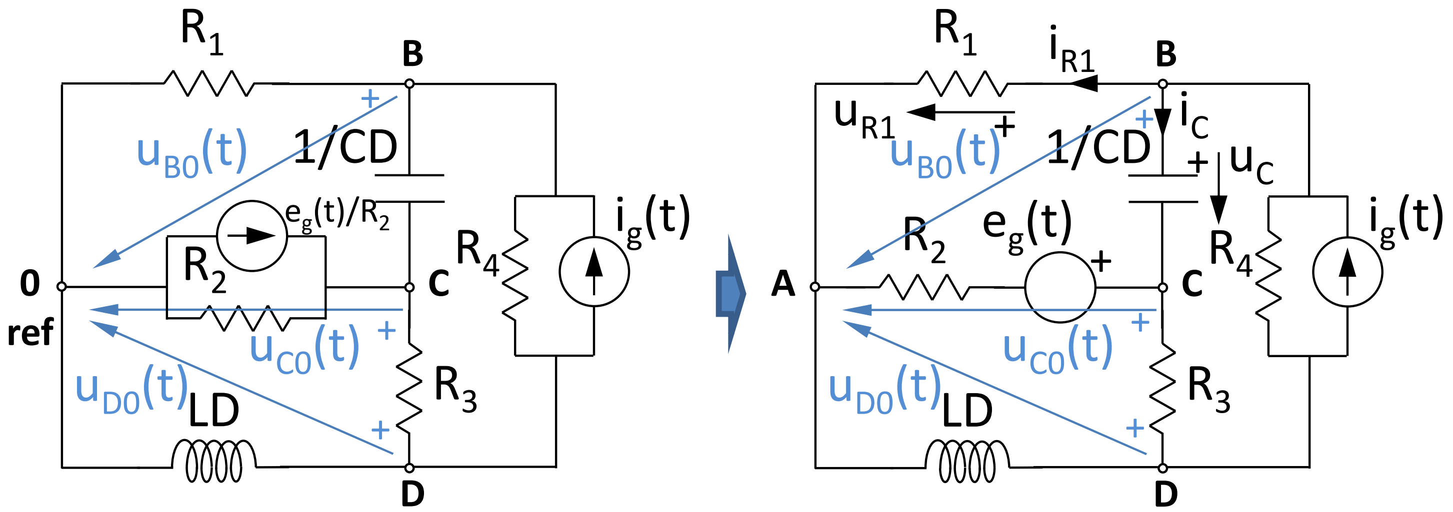
$$i_{Dal}(t)=-i_g(t)$$



$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+CD+\frac{1}{R_4}\right) & -CD & -\frac{1}{R_4} \\ -CD & \left(\frac{1}{R_3}+CD+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{LD}+\frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{B0}(t) \\ u_{C0}(t) \\ u_{D0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) \\ e_g(t)/R_2 \\ -i_g(t) \end{bmatrix}$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Una vez resuelto el sistema (que, en el caso más general, se tratará de un sistema de ecuaciones diferenciales), a partir de las tensiones de nudo, se pueden determinar las tensiones e intensidades en todos y cada uno de los elementos del circuito.*



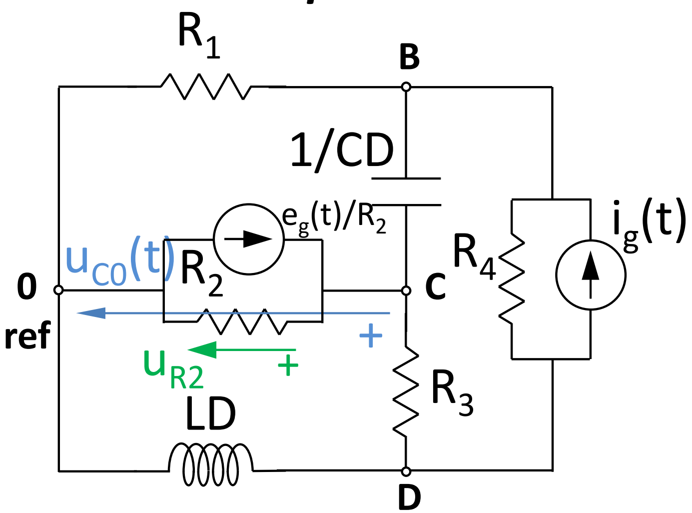
$$u_{R1}(t) = u_{B0}(t)$$
$$i_{R1}(t) = \frac{u_{B0}(t)}{R_1}$$

$$u_C(t) = u_{B0}(t) - u_{C0}(t)$$
$$i_C(t) = CD \cdot \left(u_{B0}(t) - u_{C0}(t)\right)$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

- *En el ejemplo empleado, el circuito analizado no es el circuito original, sino que se trata de un circuito equivalente a éste. A la hora de calcular tensiones e intensidades en el circuito original a partir del circuito equivalente, **atención** a las ramas "transformadas" y los elementos que las forman.*

Circuito equivalente

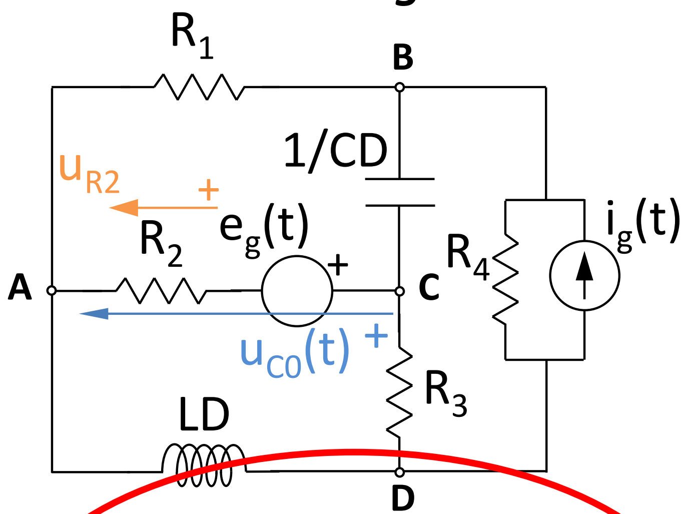


$$u_{R2}(t) = u_{C0}(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_{C0}(t)}{R_2}$$

Distintas !!!!!

Circuito original



$$u_{R2}(t) = u_{C0}(t) - e_g(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_{C0}(t) - e_g(t)}{R_2}$$

4.5.2. Método de análisis por nudos

- ***Circuitos con fuentes ideales de tensión:***
  - El método de nudos prefiere que las fuentes sean de intensidad. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de tensión en fuente de intensidad, será necesario encontrar una forma de solventar este “inconveniente”. **Procedimiento**:
  - Se da una referencia a la intensidad que circula por la fuente ideal de tensión.
  - Esta intensidad que circula por la fuente ideal de tensión se trata, a todos los efectos, como se trata a la intensidad suministrada por una fuente de intensidad.

4.5.2. Método de análisis por nudos

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

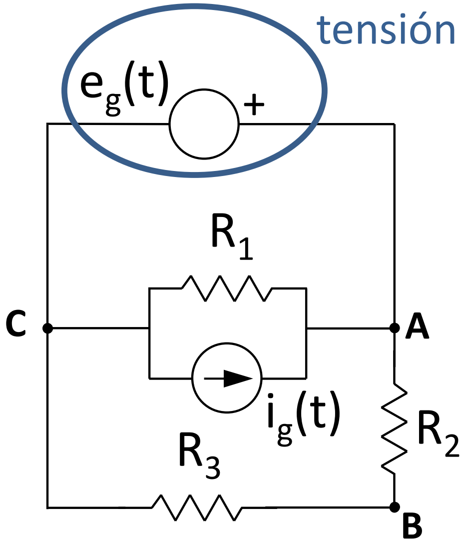
PRAUZ 449 (2021/22)

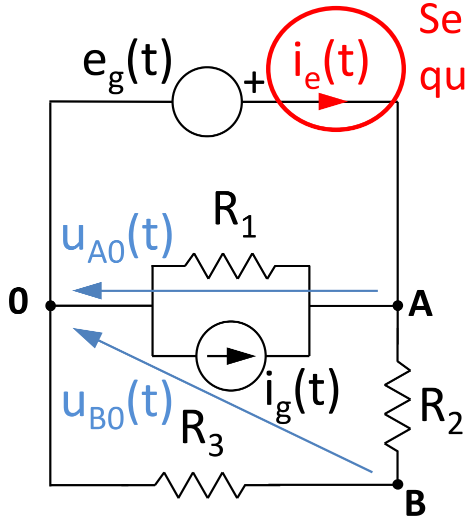
- ***Circuitos con fuentes ideales de tensión (cont.)***
  - Esta intensidad (que es desconocida), al tratarla como la intensidad proveniente de una fuente, aparecerá en el vector de intensidades de alimentación de nudo.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que ***añadir una ecuación adicional*** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de nudos.
  - <u>**Forma de construir la ecuación adicional**</u>: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su tensión) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo).

4.5.2. Método de análisis por nudos

- ***Ejemplo:*** *Analizar el circuito por el método de los nudos*

Fuente ideal de tensión





Se dibuja, en sentido arbitrario, la intensidad que circula por la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{A0}(t) \\ u_{B0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t)+i_e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas: $u_{A0}(t)$, $u_{B0}(t)$ e $i_e(t)$

Ecuación adicional: $\boxed{e_g(t)=u_{A0}(t)}$

- Lo que sabemos de la fuente: $e_g(t)$
- En función de las incógnitas: $u_{A0}(t)$, $u_{B0}(t)$

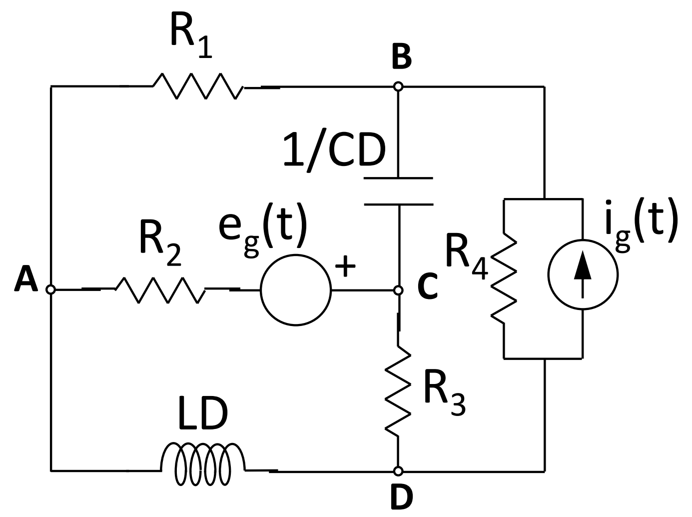
Por lo tanto: 3 ecuaciones lin. indeptes, 3 incógnitas $\Longrightarrow$ SOLUCIÓN ÚNICA

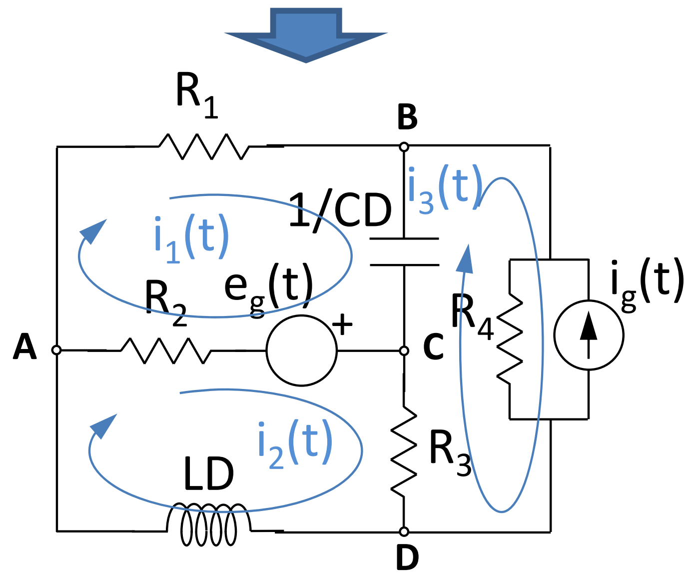
4.5.2. Método de análisis por nudos

- ***Circuitos con fuentes dependientes:***
  - Una fuente dependiente (de tensión o de intensidad) puede ser real o bien ideal.
  - El tratamiento de las fuentes dependientes es idéntico al seguido con las fuentes independientes.
  - Ahora bien, al depender su valor de la tensión o de la intensidad en otra parte del circuito, cada fuente dependiente introduce una incógnita (la tensión o la intensidad de la cual depende). Para que el sistema de ecuaciones sea determinado, es necesario **añadir una ecuación adicional**.
  - **Forma de construir la ecuación adicional:** Se expresa la tensión o la intensidad de la cuál depende la fuente dependiente, como función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo en este caso).

4.5.3. Método de análisis por mallas

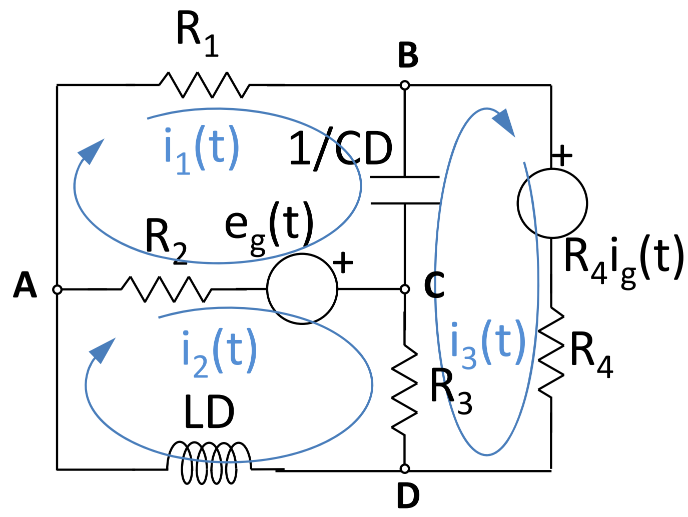
- *Consiste en aplicar la Ley de Kirchhoff de las tensiones a cada malla del circuito, utilizando para ello las **intensidades de circulación de malla**.*
  - ***Intensidades de circulación de malla***: Intensidad que es común a todos las ramas que forman una malla
  - ***Criterio de aplicación de la LKT***: Caídas de tensión positivas las origina la intensidad de la malla considerada.
  - Es ***deseable*** que todas las fuentes presentes en el circuito sean fuentes de tensión (en el caso de fuentes reales de intensidad, aplicar la equivalencia de fuentes reales)
  - ***Nota:*** El sentido de las intensidades de circulación de malla es arbitrario, a elección de cada cual, y puede ser distinto en cada malla.





4.5.3. Método de análisis por mallas

- *Aplicación de la LKT a todas las mallas del circuito (siguiendo el criterio dado).*



– **Malla 1:**

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{CD}\left(i_1(t) - i_3(t)\right) + e_g(t) + R_2(i_1(t) - i_2(t)) = 0$$

$$\left(R_1 + \frac{1}{CD} + R_2\right) i_1(t) - R_2 i_2(t) - \frac{1}{CD} i_3(t) = -e_g(t)$$

– **Malla 2:**

$$R_2\left(i_2(t) - i_1(t)\right) - e_g(t) + R_3\left(i_2(t) - i_3(t)\right) + LDi_2(t) = 0$$

$$-R_2 i_1(t) + \left(R_2 + R_3 + LD\right) i_2(t) - R_3 i_3(t) = e_g(t)$$

– **Malla 3:**

$$R_4 i_g(t) + R_4 i_3(t) + R_3\left(i_3(t) - i_2(t)\right) + \frac{1}{CD}\left(i_3(t) - i_1(t)\right) = 0$$

$$-\frac{1}{CD} i_1(t) - R_3 i_2(t) + \left(R_4 + R_3 + \frac{1}{CD}\right) i_3(t) = -R_4 i_g(t)$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

- *Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial:*

$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{CD}+R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\ -R_2 & R_2+R_3+LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_4+R_3+\frac{1}{CD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_g(t) \\ e_g(t) \\ -R_4 i_g(t) \end{bmatrix}$$

- *Los elementos de la primera matriz tienen dimensiones de impedancias, los de la segunda tienen dimensiones de intensidades y los elementos de la tercera, dimensiones de tensiones. En general, se puede escribir:*

$$\left[Z_{ij}\right] \cdot \left[i_i(t)\right] = \left[e_{ial}(t)\right]$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

donde:

$\left[Z_{ij}\right]$: Matriz de impedancias de malla (matriz simétrica)

$\left[i_i(t)\right]$: Vector de intensidades de alimentación de malla

$\left[e_{ial}(t)\right]$: Vector de tensiones de alimentación de malla

Z_{ii} : Impedancia propia de malla

$Z_{ij}\Big|_{i \neq j}$: Impedancia mutua de malla

- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - Z_{ii}: Suma de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen a la malla i.

4.5.3. Método de análisis por mallas

– $Z_{ij}|_{i \neq j}$: Suma algebraica de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen simultáneamente a la malla i y a la malla j
  - Signo positivo: Las intensidades de ambas mallas llevan el mismo sentido sobre la impedancia considerada.
  - Signo negativo: Las intensidades de ambas mallas tienen sentidos contrarios sobre la impedancia considerada.

– $i_i(t)$: Intensidades de circulación de malla (incógnitas).

– $e_{ial}(t)$: Suma algebraica de los valores de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla i.
  - Signo positivo: Si la intensidad de la malla considerada sale por el terminal marcado con “+” de la fuente.
  - Signo negativo: Si la intensidad de la malla considera entra por el terminal marcado con “+” de la fuente.

4.5.3. Método de análisis por mallas

- Z_{11}: A la malla 1 pertenecen la resistencia R_1, el condensador C y la resistencia R_2.

$$Z_{11} = R_1 + \frac{1}{CD} + R_2$$

- Z_{22}: A la malla 2 pertenecen la resistencia R_2, la resistencia R_3 y la bobina L.

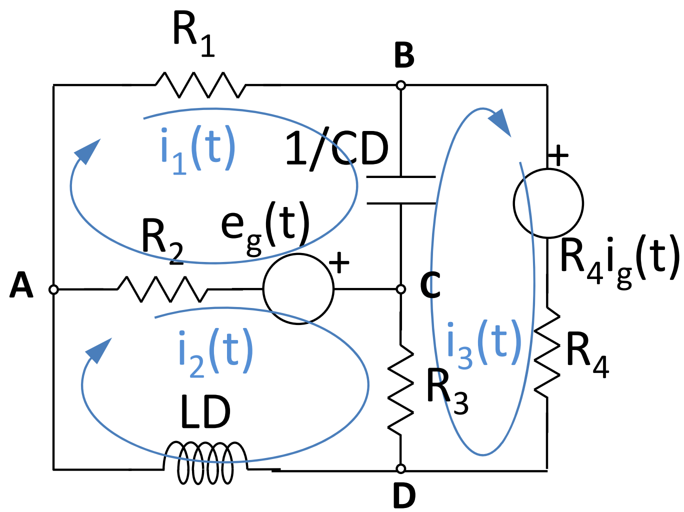
$$Z_{22} = R_2 + R_3 + LD$$

- Z_{33}: A la malla 3 pertenecen la resistencia R_4, la resistencia R_3 y el condensador C.

$$Z_{33} = R_4 + R_3 + \frac{1}{CD}$$

- Z_{12}: La malla 1 y la malla 2 comparten la resistencia R_2. i_2 lleva sentido contrario a i_1 sobre R_2.

$$Z_{12} = -R_2$$



- Z_{13}: La malla 1 y la malla 3 comparten el condensador C.

$$Z_{13} = -\frac{1}{CD}$$

- Z_{23}: La malla 2 y la malla 3 comparten la resistencia R_3.

$$Z_{23} = -R_3$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

PRAUZ 449 (2021/22)

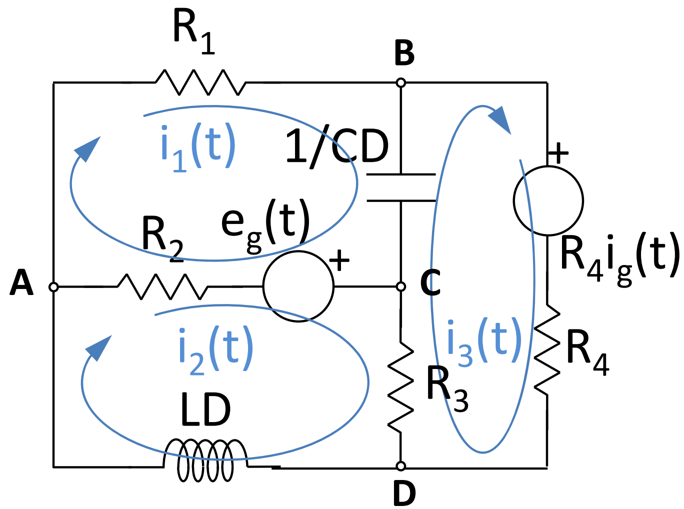
- *Matriz simétrica* $\Rightarrow Z_{21}=Z_{12}$, $Z_{31}=Z_{13}$, $Z_{32}=Z_{23}$
- e_{1al}: *A la malla 1 pertenece la fuente* $e_g(t)$ *e* $i_1(t)$ *entra por el "+".*

$$e_{1al}(t) = -e_g(t)$$

- e_{2al}: *A la malla 2 pertenece la fuente* $e_g(t)$ *e* $i_2(t)$ *sale por el "+".*

$$e_{2al}(t) = e_g(t)$$

- e_{3al}: *A la malla 3 pertenece la fuente* $R_4 i_g(t)$ *e* $i_3(t)$ *entra por el "+".*

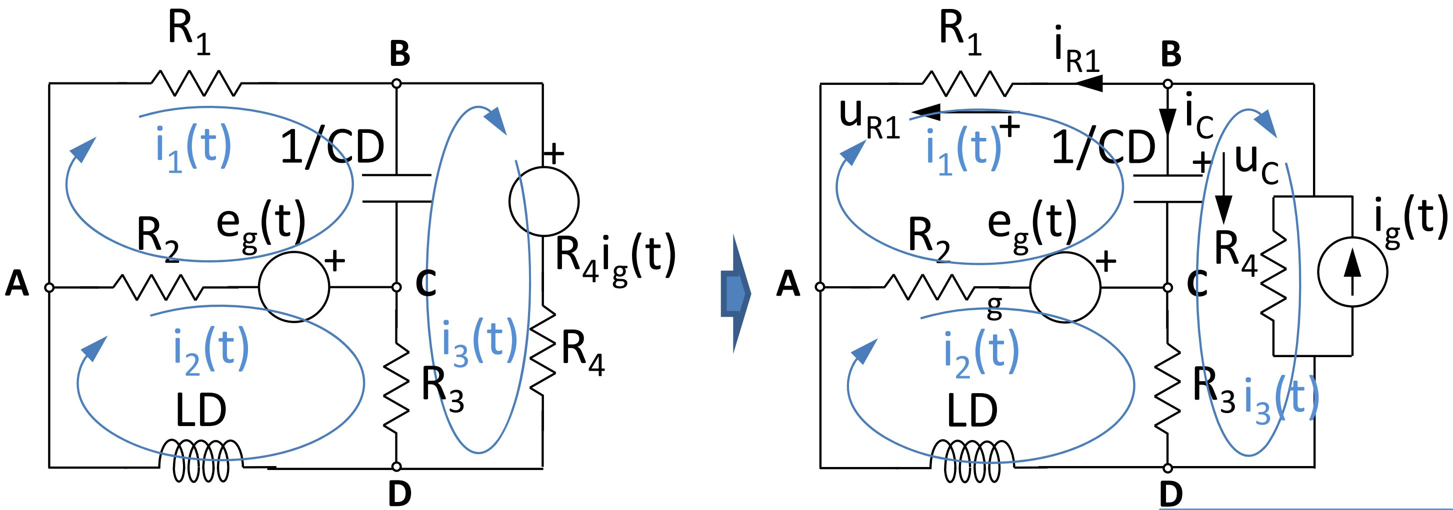


$$e_{3al}(t) = -R_4 i_g(t)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\ -R_2 & R_2 + R_3 + LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R4 + R3 + \frac{1}{CD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_g(t) \\ e_g(t) \\ -R_4 i_g(t) \end{bmatrix}$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

- *Una vez resuelto el sistema (que, en el caso más general, se tratará de un sistema de ecuaciones diferenciales), a partir de las intensidades de malla, se pueden determinar las tensiones e intensidades en todos y cada uno de los elementos del circuito.*



$$i_{R1}(t) = -i_1(t)$$

$$u_{R1}(t) = -R_1 \cdot i_1(t)$$

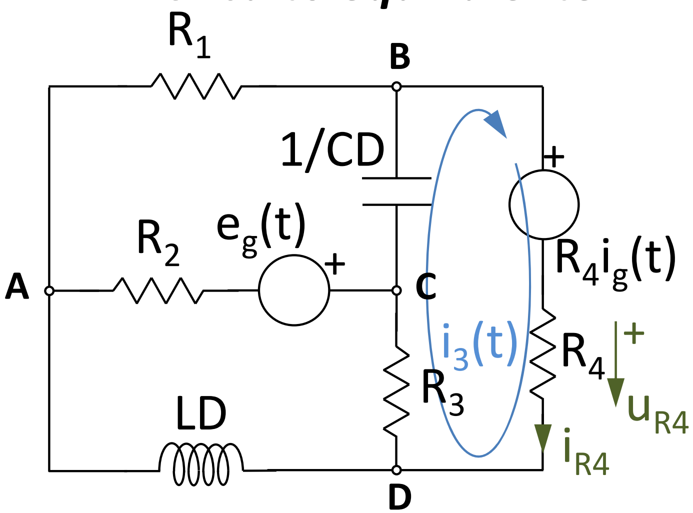
$$i_C(t) = \left(i_1(t) - i_3(t)\right)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{CD} \cdot \left(i_1(t) - i_3(t)\right)$$

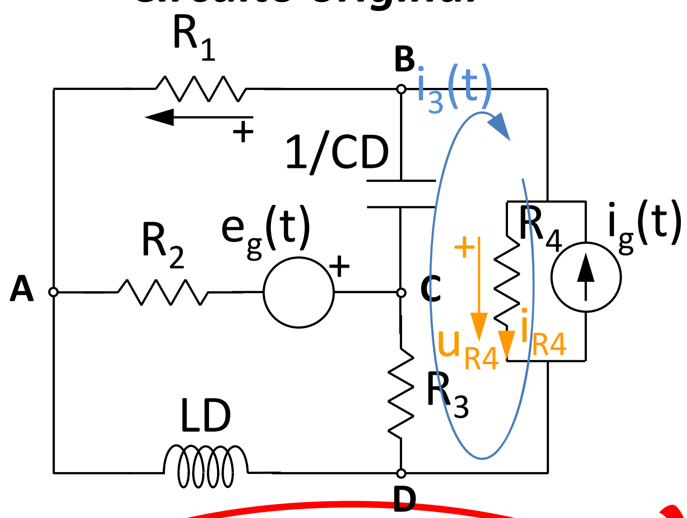
4.5.3. Método de análisis por mallas

- *En el ejemplo empleado, el circuito analizado no es el circuito original, sino que se trata de un circuito equivalente a éste. A la hora de calcular tensiones e intensidades en el circuito original a partir del circuito equivalente, **atención** a las ramas "transformadas" y los elementos que las forman.*

Circuito equivalente



Circuito original



$$i_{R4}(t) = i_3(t)$$
$$u_{R4}(t) = R_4 i_3(t)$$

Distintas !!!!!

$$i_{R4}(t) = i_3(t) + i_g(t)$$
$$u_{R4}(t) = R_4\left(i_3(t) + i_g(t)\right)$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

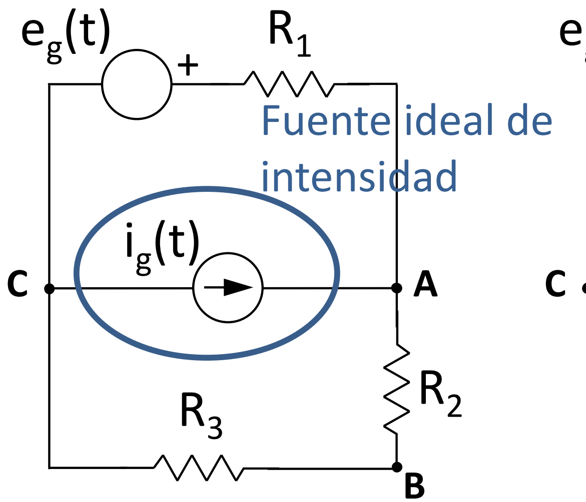
- ***Circuitos con fuentes ideales de intensidad:***
  - El método de mallas prefiere que las fuentes sean de tensión. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de intensidad en fuente de tensión, será necesario encontrar una forma de solventar este “inconveniente”. **Procedimiento**:
  - Se da una referencia a la tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad.
  - Esta tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad se trata, a todos los efectos, como se trata a la tensión en bornes de una fuente de tensión.

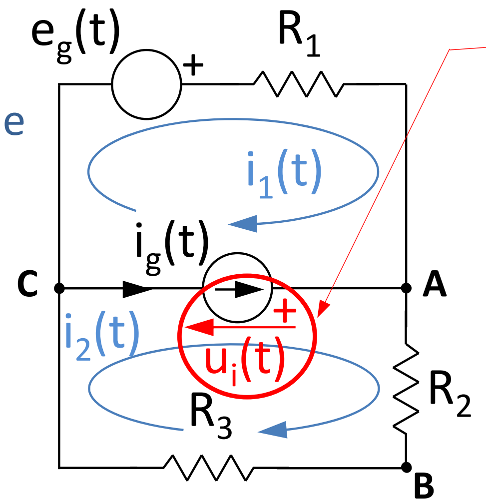
4.5.3. Método de análisis por mallas

- ***Circuitos con fuentes ideales de intensidad (cont)***
  - Esta tensión (que es desconocida), al tratarla como la tensión en bornes de una fuente, aparecerá en el vector de tensiones de alimentación de malla.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que ***añadir una ecuación adicional*** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de mallas.
  - **Forma de construir la ecuación adicional**: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su intensidad) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las intensidades de malla).

4.5.3. Método de análisis por mallas

- *Ejemplo: Analizar el circuito por el método de las mallas*





Se dibuja, en sentido arbitrario, la tensión en bornes de la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2+R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_g(t)-u_i(t) \\ u_i(t) \end{bmatrix}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas: $i_1(t)$, $i_2(t)$ y $u_i(t)$

Ecuación adicional: $\boxed{i_g(t)=i_2(t)-i_1(t)}$

Lo que sabemos de la fuente: $i_g(t)$
En función de las incógnitas: $i_1(t)$, $i_2(t)$

Por lo tanto: 3 ecuaciones, 3 incógnitas → SOLUCIÓN ÚNICA

4.6. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales

4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

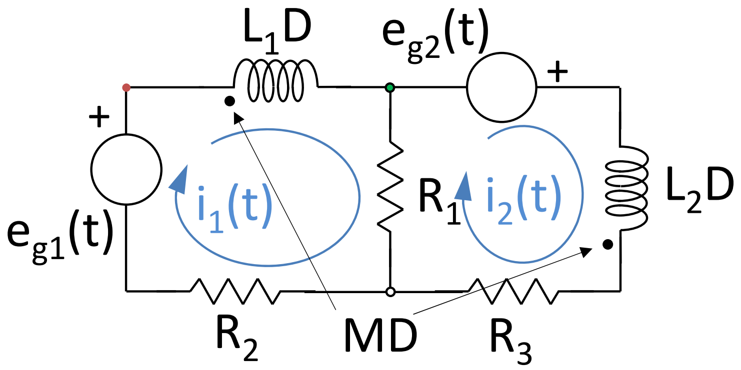
- *Los circuitos que contengan bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales, se analizarán mediante el método de las mallas (salvo casos especiales en los que se pueda obviar el acoplamiento magnético).*
- *Es posible la escritura directa de las ecuaciones de malla, si bien, en el caso de presencia de bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores la regla para dicha escritura se hace más complicada (buscar en la bibliografía en caso de interés)*

4.6. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales

- *En el caso de presencia de bobinas acopladas magnéticamente, se recomienda aplicar la 2ªLK a cada malla. Para aplicarla, se suman las tensiones en todos los elementos de cada malla y se hace esta suma igual a cero. Se recomienda empezar la suma de tensiones en un punto de la malla y terminarla en ese mismo punto, teniendo en cuenta que las tensiones en las bobinas acopladas no sólo se deben a que circula intensidad por ellas, sino que también se deben a que circula intensidad por las bobinas con las que están acopladas.*
- *En el caso de presencia de transformadores ideales, se recomienda aplicar la LKT a cada malla incluyendo la caída de tensión en los devanados del transformador y escribir más adelante las ecuaciones de definición del transformador de acuerdo a las referencias consideradas.*
- *Recordar el criterio de escritura de la LKT en el método de análisis por mallas: **Caídas de tensión positivas las crea la intensidad de la malla considerada en cada momento**.*

4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

- *Ejemplo:*



En la bobina L_1 cae tensión debido a que circula intensidad por ella (en este caso $i_1(t)$), pero también debido a que circula intensidad por la bobina L_2 (en este caso $i_2(t)$).

Idem para la bobina L_2

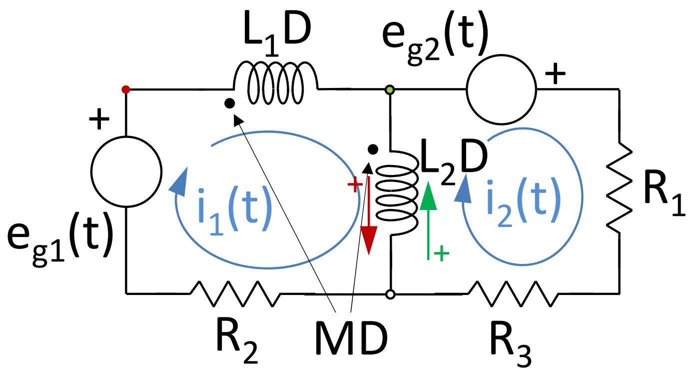
- Malla 1: $\underbrace{L_1D\cdot i_1(t) - MD\cdot i_2(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_1} + R_1\left(i_1(t) - i_2(t)\right) + R_2 i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$

- Malla 2: $-e_{g2}(t) + \underbrace{L_2D\cdot i_2(t) - MD\cdot i_1(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_2} + R_3 i_2(t) + R_1\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0$

$$\begin{bmatrix} L_1D + R_1 + R_2 & -R_1 - MD \\ -R_1 - MD & L_2D + R_3 + R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{g1}(t) \\ e_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

- *Ejemplo:*



Por el criterio expresado:

Caída de tensión positiva en L_2 como elemento de la malla 1

Caída de tensión positiva en L_2 como elemento de la malla 2

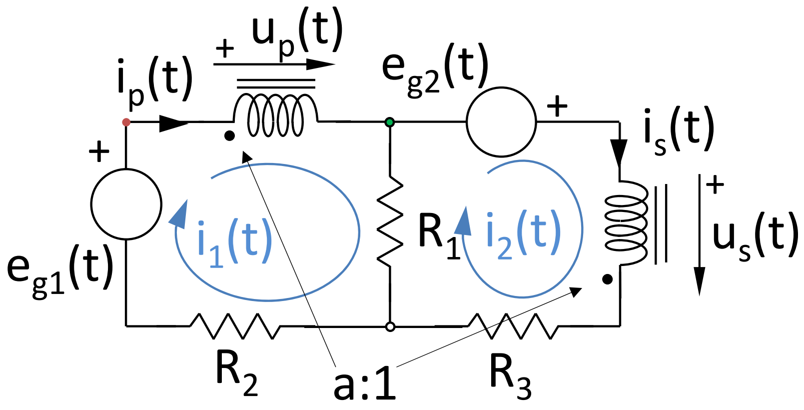
- Malla 1: $\underbrace{L_1D\cdot i_1(t)+MD\cdot\big(i_1(t)-i_2(t)\big)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_1}+\underbrace{L_2D\cdot\big(i_1(t)-i_2(t)\big)+MD\cdot i_1(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_2}+R_2i_1(t)-e_{g1}(t)=0$

- Malla 2: $-e_{g2}(t)+R_1i_2(t)+R_3i_2(t)+\underbrace{L_2D\cdot\big(i_2(t)-i_1(t)\big)-MD\cdot i_1(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_2}=0$

$$\begin{bmatrix} L_1D+L_2D+R_2+2MD & -MD-L_2D \\ -MD-L_2D & L_2D+R_3+R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{g1}(t) \\ e_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

4.6.2. Circuitos con transformadores ideales

- *Ejemplo:*



Ecs. transformador:

$$\frac{u_p(t)}{u_s(t)} = -a \Rightarrow u_p(t) = -a u_s(t)$$

$$\frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{1}{a} \Rightarrow i_1(t) = \frac{1}{a} i_2(t)$$

$$i_p(t) = i_1(t)$$

$$i_s(t) = i_2(t)$$

- Malla 1: $u_p(t) + R_1\left(i_1(t) - i_2(t)\right) + R_2 i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$
- Malla 2: $-e_{g2}(t) + u_s(t) + R_3 i_2(t) + R_1\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0$

$$\left.\begin{aligned} & -a u_s(t) + R_1\left(i_1(t) - i_2(t)\right) + R_2 i_1(t) - e_{g1}(t) = 0 \\ & -e_{g2}(t) + u_s(t) + R_3 i_2(t) + R_1\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0 \\ & i_1(t) = \frac{1}{a} i_2(t) \end{aligned}\right\}$$

incógnitas: $u_s(t), i_1(t), i_2(t)$

Referencias

- *PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.:* ***"Teoría de Circuitos (Tomo I)"****. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).*
- *BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.:* ***"Análisis de circuitos eléctricos I".*** *Colección Textos Docentes, vol. 58. Prensas Universitarias de Zaragoza.*