

# Circuitos Monofásicos en Régimen Estacionario Sinusoidal

Miguel Ángel García García  
Joaquín Mur Amada



Abril/2021

|          |   |    |
|----------|---|----|
| 1.-      | INTRODUCCIÓN .....  | 4  |
| 2.-      | GENERACIÓN DE UNA TENSIÓN SINUSOIDAL.....   | 4  |
| 3.-      | DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL.....  | 6  |
| 3.1.-    | Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal mediante el método de los Coeficientes Indeterminados ..... | 8  |
| 3.2.-    | Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal mediante el Método Simbólico .....                          | 9  |
| 3.2.1.-  | Representación de ondas sinusoidales mediante números complejos. Fasores. ....                                | 9  |
| 4.-      | RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS PASIVOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL..                                       | 14 |
| 4.1.-    | Resistencia .....   | 14 |
| 4.2.-    | Bobina .....  | 16 |
| 4.3.-    | Condensador .....   | 18 |
| 5.-      | LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA .....   | 21 |
| 5.1.-    | Ley de Kirchhoff de las intensidades (LKI).....   | 21 |
| 5.2.-    | Ley de Kirchhoff de las tensiones (LKT) .....   | 21 |
| 6.-      | IMPEDANCIA Y ADMITANCIA COMPLEJAS .....   | 22 |
| 7.-      | ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS PASIVOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL.....                                       | 25 |
| 7.1.-    | Asociación Serie. Divisor de tensión .....  | 25 |
| 7.2.-    | Asociación en paralelo. Divisor de intensidad .....   | 26 |
| 8.-      | ESTUDIO DE ALGUNOS CIRCUITOS SERIE .....  | 28 |
| 8.1.-    | Circuito RC.....  | 28 |
| 8.2.-    | Circuito RL .....   | 30 |
| 8.3.-    | Circuito RLC .....  | 31 |
| 9.-      | ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL .....  | 34 |
| 9.1.-    | Teorema de Superposición .....  | 34 |
| 9.2.-    | Teorema de Thévenin .....   | 35 |
| 9.3.-    | Teorema de Norton.....  | 35 |
| 10.-     | POTENCIA EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL.....  | 36 |
| 10.1.-   | Potencia instantánea .....  | 36 |
| 10.2.-   | Potencia activa, potencia reactiva y potencia aparente.....   | 38 |
| 10.3.-   | Potencia Compleja .....   | 41 |
| 10.4.-   | Expresión de la potencia compleja en dipolos pasivos.....   | 43 |
| 10.4.1.- | Resistencia .....   | 44 |
| 10.4.2.- | Bobina .....  | 45 |

|   |    |
|---|----|
| 10.4.3.- Condensador.....   | 45 |
| 10.5.- Teorema de Boucherot .....                                 | 46 |
| 10.6.- Factor de potencia .....                                   | 47 |
| 10.6.1.- Importancia del factor de potencia .....                 | 48 |
| 10.7.- Compensación del factor de potencia .....                  | 50 |
| 11.- TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA (ACTIVA)..... | 53 |
| 12.- BIBLIOGRAFÍA.....  | 55 |

## CIRCUITOS MONOFÁSICOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

### 1.- INTRODUCCIÓN

Debido a las múltiples ventajas que presenta, la energía eléctrica se genera, se transporta y se distribuye casi exclusivamente en forma sinusoidal. De ahí que este capítulo se va a centrar en el análisis de circuitos alimentados por fuentes sinusoidales, cuyas respuestas serán asimismo sinusoidales. Por otra parte, en general, la respuesta completa de un circuito consta de una componente que se amortigua con el tiempo, respuesta que constituye el régimen transitorio de dicho circuito, y una componente que permanece en el tiempo y que tiene la misma forma que las fuentes de excitación. Esta respuesta constituye el régimen permanente o estacionario del circuito. En este capítulo, estudiaremos el régimen estacionario o permanente de los circuitos alimentados por fuentes de excitación sinusoidales.

Además, si se sabe analizar un circuito en régimen estacionario sinusoidal, es posible analizar su comportamiento para excitaciones no sinusoidales, basta con aplicar un análisis de Fourier a la excitación y las respuestas de dicho circuito.

### 2.- GENERACIÓN DE UNA TENSIÓN SINUSOIDAL

Supongamos una bobina rectangular de  $N$  espiras y área  $A$  situada en una región en la que existe un campo magnético uniforme  $B$ .

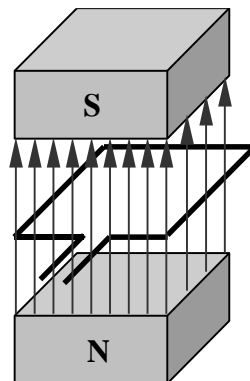


Figura 1

El flujo magnético que atraviesa cada espira de la bobina depende del ángulo en el que la bobina se encuentra con respecto al campo magnético. De acuerdo con la Figura 2 y atendiendo a la definición de flujo magnético se tiene:

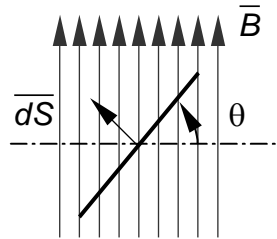


Figura 2

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot \vec{dS} = B \cdot A \cdot \cos \theta \quad (1)$$

El flujo total que atravesará las N espiras de la bobina vale:

$$\Phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta \quad (2)$$

Si la bobina está fija, el flujo que la atraviesa es constante y, en consecuencia, por la ley de inducción de Faraday, no se inducirá tensión en ella al ser la derivada de dicho flujo cero.

Si la bobina gira sobre su eje a una velocidad angular constante  $\omega$  rad/s, el flujo que atraviesa la bobina es variable con el tiempo, esto es:

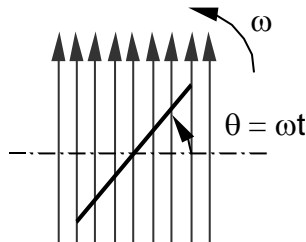


Figura 3

$$\Phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

Debido a que ahora varía el flujo que atraviesa la bobina, entre sus terminales se inducirá una tensión (ley de inducción de Faraday) de valor:

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega t = N \cdot \Phi_m \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega t \quad (4)$$

De forma más general podemos escribir:

$$u(t) = U_0 \text{ sen } \omega t \quad (5)$$

donde  $U_0$  es el valor máximo que alcanza la tensión generada. Puede apreciarse que, en bornes de la bobina, por el hecho de girar con velocidad angular constante en el seno de un campo magnético

uniforme, se induce una tensión con forma de onda sinusoidal. Éste es el principio de la generación de tensiones sinusoidales

En general, se va a hablar de formas de onda sinusoidales independientemente de si la ecuación temporal que las define viene dada en forma seno o en forma coseno. Esto es así ya que en ambos casos se trata de formas de onda similares, sólo separadas por un ángulo de desfase de  $\pm \pi/2$ .

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi_1) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2) \quad (6)$$

### 3.- DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

Las tensiones y las intensidades en un circuito lineal alimentado por fuentes sinusoidales son, en régimen permanente, funciones sinusoidales. En adelante, nos vamos a ocupar de circuitos lineales.

Supongamos el circuito de la figura:

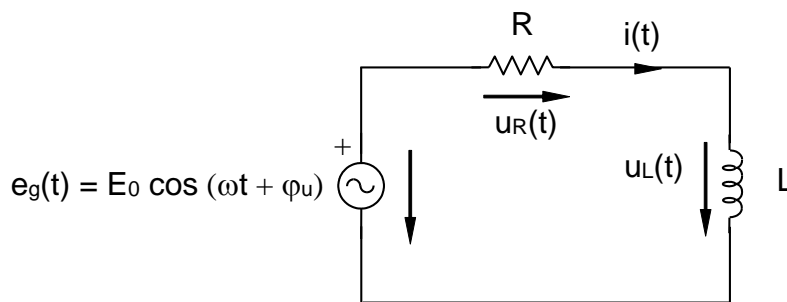


Figura 4

Aplicando la LKT al circuito, se puede escribir que:

$$e_g(t) = u_R(t) + u_L(t) \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones de definición de los elementos que componen este circuito, esto es:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad (8)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (9)$$

la ecuación queda:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = e_g(t) \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que la fuente de excitación de este circuito es sinusoidal, la ecuación diferencial que rige el comportamiento del circuito es:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (11)$$

La solución completa de esta ecuación diferencial se puede determinar mediante la suma de dos soluciones, la solución de la ecuación diferencial homogénea más una solución particular de la ecuación.

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t) \quad (12)$$

La ecuación diferencial homogénea es:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (13)$$

y su solución es:

$$i_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{donde } C \text{ es una constante} \quad (14)$$

En cuanto a la solución particular, se prueba una que sea del mismo tipo que la excitación del circuito, esto es:

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (15)$$

La solución completa de la ecuación consta, como ya se ha dicho, de dos partes. Una es la solución particular de la ecuación diferencial correspondiente al circuito y la otra parte de la solución corresponde a la respuesta propia o natural del circuito, que es la que se obtiene de la ecuación diferencial homogénea.

Se puede apreciar, a partir de la ecuación 14, que la solución de la ecuación diferencial homogénea se amortigua con el tiempo. Esta solución constituye lo que se conoce como **régimen transitorio** o **respuesta natural** del circuito, y en la mayoría de los casos, transcurrido un tiempo más o menos largo, puede despreciarse.

La solución particular tiene la misma forma de onda sinusoidal que la excitación del circuito, y constituye el **régimen permanente** o **régimen estacionario**. Se denomina así dado que, en la mayoría de los circuitos, los modos propios o naturales son amortiguados y, al cabo de un intervalo de tiempo más o menos largo, pueden despreciarse, quedando únicamente como respuesta del sistema la solución particular.

Si la respuesta natural no es amortiguada, el circuito no es estable. En los circuitos estables, los modos naturales no dependen de la excitación del circuito.

Para determinar completamente la solución particular de la ecuación diferencial es necesario calcular los valores de  $I_0$  y  $\varphi_i$ . Una forma de determinar estos parámetros es mediante el **método de los coeficientes indeterminados**. A continuación, se muestra dicho método.

### 3.1.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal mediante el método de los Coeficientes Indeterminados

Como la solución particular es una solución de la ecuación diferencial, imponemos que verifique la ecuación diferencial.

Se sustituye esta solución particular en la ecuación diferencial:

$$-LI_0\omega\text{sen}(\omega t + \varphi_i) + RI_0\cos(\omega t + \varphi_i) = E_0\cos(\omega t + \varphi_u) \quad (16)$$

Desarrollando las sumas de senos y cosenos se llega a:

$$\begin{aligned} -LI_0\omega\text{sen}\omega t \cos\varphi_i - LI_0\omega\cos\omega t\text{sen}\varphi_i + RI_0\cos\omega t \cos\varphi_i - RI_0\text{sen}\omega t\text{sen}\varphi_i = \\ = E_0\cos\omega t \cos\varphi_u - E_0\text{sen}\omega t\text{sen}\varphi_u \end{aligned} \quad (17)$$

Agrupando términos e igualando coeficientes, se obtiene:

$$RI_0\cos\varphi_i - \omega LI_0\text{sen}\varphi_i = E_0\cos\varphi_u \quad (18)$$

$$RI_0\text{sen}\varphi_i - \omega LI_0\cos\varphi_i = E_0\text{sen}\varphi_u \quad (19)$$

Ecuaciones que constituyen un sistema de ecuaciones que permite calcular las incógnitas  $I_0$  y  $\varphi_i$ .

Elevando al cuadrado los dos miembros de ambas ecuaciones:

$$R^2I_0^2\cos^2\varphi_i + \omega^2L^2I_0^2\text{sen}^2\varphi_i - 2R\omega LI_0^2\cos\varphi_i\text{sen}\varphi_i = E_0^2\cos^2\varphi_u \quad (20)$$

$$R^2I_0^2\text{sen}^2\varphi_i + \omega^2L^2I_0^2\cos^2\varphi_i + 2R\omega LI_0^2\cos\varphi_i\text{sen}\varphi_i = E_0^2\text{sen}^2\varphi_u \quad (21)$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$R^2I_0^2 + \omega^2L^2I_0^2 = E_0^2 \quad (22)$$

y despejando, se obtiene:

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \quad (23)$$

Si dividimos ambas ecuaciones:



$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{R \operatorname{sen} \varphi_i + \omega L \cos \varphi_i}{R \cos \varphi_i - \omega L \operatorname{sen} \varphi_i} \quad (24)$$

que también puede escribirse:

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i + \frac{\omega L}{R}}{1 - \frac{\omega L}{R} \operatorname{tg} \varphi_i} \quad (25)$$

Si se denota por  $\operatorname{tg} \varphi$  a la expresión:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} \quad (26)$$

se obtiene que:

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi) \quad (27)$$

y, por lo tanto:

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi \quad (28)$$

Esto es, la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) \quad (29)$$

Esta solución particular constituye el régimen permanente del circuito analizado. La intensidad que circula por el circuito tiene también forma de onda sinusoidal, de la que se ha determinado el valor de su amplitud y el desfase respecto a la forma de onda de la tensión de alimentación.

### 3.2.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal mediante el Método Simbólico

#### 3.2.1.- Representación de ondas sinusoidales mediante números complejos. Fasores.

Se ha podido comprobar en el apartado anterior que la determinación del régimen estacionario sinusoidal mediante el método de los coeficientes indeterminados no es sencilla, incluso para un circuito simple como el que se ha considerado. Esta dificultad en la determinación del régimen permanente se solventa en gran medida utilizando una transformación del circuito al dominio de la frecuencia. Para ello se aprovecha la posibilidad de representar las formas de onda sinusoidales mediante números complejos. A continuación, se estudian los principios de esta transformación.

Sea una forma de onda sinusoidal:

$$f(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

Esta función sinusoidal se puede considerar como el resultado de proyectar en el eje vertical un vector giratorio, tal y como puede verse en la figura siguiente.

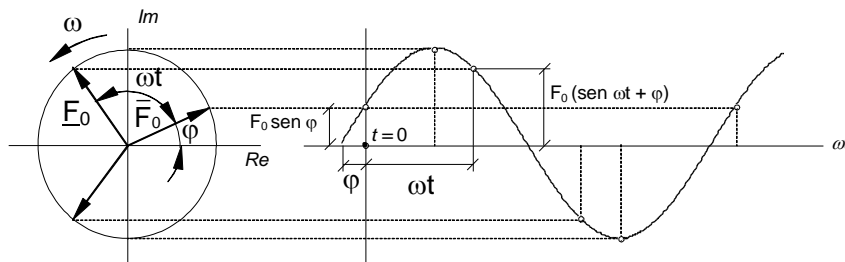


Figura 5

En  $t = 0$ , el número complejo  $\overline{F}_0$  forma un ángulo  $\varphi$  con el eje horizontal. De acuerdo con el álgebra de los números complejos y la fórmula de Euler, este número se puede representar por la forma:

$$\overline{F}_0 = F_0 e^{j\varphi} = F_0 \cos \varphi + j F_0 \sin \varphi \quad (31)$$

Ahora bien, si el vector que representa al número complejo  $\overline{F}_0$  gira en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad angular de  $\omega$  rad/s, en el instante  $t$  el vector habrá barrido un ángulo  $\omega t$ , que sumado a la fase inicial significará que el ángulo que forma el vector con el eje real será:

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (32)$$

En estas condiciones, el vector giratorio  $\underline{F}_0$  se puede representar en la forma:

$$\underline{F}_0 = F_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (F_0 e^{j\varphi}) e^{j\omega t} \quad (33)$$

En esta expresión, la parte entre paréntesis representa la posición del vector  $\overline{F}_0$  en  $t = 0$ , mientras que el término  $e^{j\omega t}$  (que representa a un vector giratorio de módulo unidad), indica el giro de dicho número complejo  $\overline{F}_0$ .

Se denomina **Fasor** a la cantidad compleja:

$$\underline{F}_0 = \overline{F}_0 e^{j\omega t} \quad (34)$$

que representa al número complejo  $\overline{F}_0$  girando a una velocidad angular de  $\omega$  rad/s

$$\underline{F}_0 = F_0 \cos(\omega t + \varphi) + j F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (35)$$

Las sucesivas proyecciones de este fasor sobre el eje vertical, es decir, la parte imaginaria del número complejo, dan origen a una onda forma seno, mientras que las sucesivas proyecciones sobre

el eje horizontal, es decir la parte real del número complejo, da lugar a una forma de onda sinusoidal en forma coseno; esto es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Re}\left[\underline{F}_0 e^{j\omega t}\right] = F_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ f(t) &= \operatorname{Im}\left[\underline{F}_0 e^{j\omega t}\right] = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (36)$$

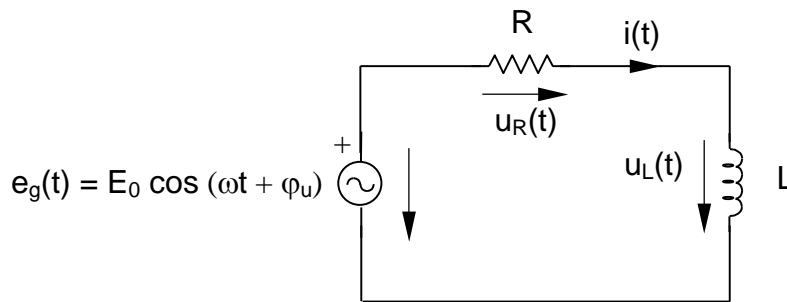
Es habitual representar los fasores mediante su forma polar, de manera que:

$$\underline{F}_0 = F_0 \angle \varphi \quad (37)$$

donde  $F_0$  se denomina módulo del fasor y  $\varphi$  es su argumento.

### Método Simbólico

Se considera el circuito RL analizado en un apartado anterior, y del que se ha obtenido su respuesta permanente hallando una solución particular de la ecuación diferencial que determina su comportamiento.



**Figura 6**

Se va a obtener nuevamente la respuesta permanente de este circuito, pero utilizando ahora el método simbólico desarrollado por *Steinmetz*, que consiste en aplicar la posibilidad de representar señales sinusoidales mediante números complejos giratorios ideada por *Fresnel*, al campo de los circuitos eléctricos.

Como se ha visto, la ecuación diferencial que determina el comportamiento del circuito es:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (38)$$

La fuente de excitación del circuito es sinusoidal, por lo que se le podrá asociar un fasor que denotaremos por  $\underline{E}_0$ . De esta manera, se tendrá que:

$$\underline{E}_0 = E_0 \angle \varphi_u = \left(E_0 e^{j\varphi_u}\right) e^{j\omega t} = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u) + j E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_u) \quad (39)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial la fuente sinusoidal por su fasor asociado, se tendrá:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \underline{E}_0 \quad (40)$$

Una solución particular de esta ecuación diferencial tendrá la misma forma que su término independiente, por lo que será un fasor asociado a la intensidad que circula por el circuito, que también será una forma de onda sinusoidal, al igual que la excitación:

$$\underline{I}_0 = I_0 \angle \varphi_i = (I_0 e^{j\varphi_i}) e^{j\omega t} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) + j I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) \quad (41)$$

Sustituyendo la solución particular en la ecuación diferencial:

$$(R + j\omega L) \underline{I}_0 = \underline{E}_0 \quad (42)$$

$$R I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} + j\omega L I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = E_0 e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad (43)$$

Simplificando:

$$R I_0 e^{j\varphi_i} + j\omega L I_0 e^{j\varphi_i} = E_0 e^{j\varphi_u} \quad (44)$$

$$(R + j\omega L) I_0 e^{j\varphi_i} = E_0 e^{j\varphi_u} \quad (45)$$

En notación de números complejos, la ecuación se puede escribir como:

$$(R + j\omega L) \overline{I}_0 = \overline{E}_0 \quad (46)$$

La ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación algebraica en números complejos, en principio más sencilla de resolver. Planteando la igualdad de módulos y argumentos, se tendrá:

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0 &= E_0 \\ \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} + \varphi_i &= \varphi_u \end{aligned} \quad (47)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ \varphi_i &= \varphi_u - \varphi \quad \text{siendo} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} \end{aligned} \quad (48)$$

En Ingeniería Eléctrica, es habitual medir y expresar las tensiones y las intensidades de los circuitos en régimen estacionario sinusoidal a través de sus valores eficaces. La relación entre el valor de la amplitud de una onda sinusoidal y su correspondiente valor eficaz es:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$
(49)

Si se utilizan valores eficaces en vez de valores de amplitud, la ecuación fasorial para el circuito RL analizado queda:

$$(R + j\omega L)\underline{I} = \underline{E}$$
(50)

Como antes se mencionaba, la transformación del circuito del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia consigue que la ecuación diferencial se convierta en una ecuación algebraica, cuya solución se puede obtener aplicando las reglas del álgebra compleja.

Una vez resuelta la ecuación, se ve que se obtiene la amplitud de la respuesta del circuito, en este caso la intensidad que circula por él, así como su fase inicial. Con estos datos, sin más que fijarse en la forma de la onda de la fuente de excitación, es posible escribir la respuesta del circuito en el dominio del tiempo. Así pues:

$$\begin{aligned} \text{Fuente en forma cos} &\rightarrow i(t) = \text{Re}[\underline{I}_0] = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \text{Fuente en forma sen} &\rightarrow i(t) = \text{Im}[\underline{I}_0] = I_0 \text{sen}(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$
(51)

En general, la transformación de un circuito al dominio de la frecuencia para proceder a su análisis mediante fasores se hace siguiendo los pasos que a continuación se detallan:

1. Comprobar que todas las fuentes de excitación del circuito siguen una forma de onda sinusoidal y que todas tienen la misma pulsación. Si alguna de estas condiciones no se cumple será imprescindible analizar el circuito aplicando el teorema de superposición.
2. Poner todas las fuentes de excitación sinusoidales de la misma forma, es decir, bien todas en forma seno o bien todas en forma coseno. Basta recordar que:

$$\cos(\omega t + \varphi_1) = \text{sen}\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(\omega t + \varphi_2)$$
(52)

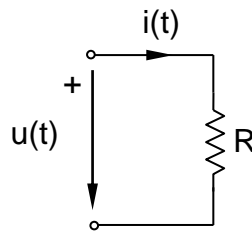
3. Transformar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un circuito al dominio de la frecuencia. Para ello, se sustituye el operador derivada ( $D = d/dt$ ) por  $j\omega$  y las tensiones e intensidades se sustituyen por sus fasores asociados.
4. Resolver las ecuaciones algebraicas en números complejos así obtenidas.
5. Hacer la transformación de las respuestas al dominio del tiempo tomando la parte real o la parte imaginaria de los fasores obtenidos por la resolución de las ecuaciones anteriores.

#### 4.- RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS PASIVOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

En este apartado, se va a ver la respuesta, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, de los elementos pasivos básicos cuando se alimentan con fuentes de excitación sinusoidales. Para ello, se va a ver la relación que existe entre la intensidad que circula por dichos elementos y la tensión que aparece en sus bornes.

##### 4.1.- Resistencia

Sea la resistencia de la figura siguiente.



**Figura 7**

Si la intensidad que atraviesa la resistencia es sinusoidal

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (53)$$

para las referencias de la figura, aplicando la ley de *Ohm* se tendrá que:

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (54)$$

A partir de la ecuación del circuito, escrita en el dominio temporal, puede verse que:

$$\begin{aligned} U_0 &= R \cdot I_0 \\ \varphi_u &= \varphi_i \end{aligned} \quad (55)$$

Gráficamente:

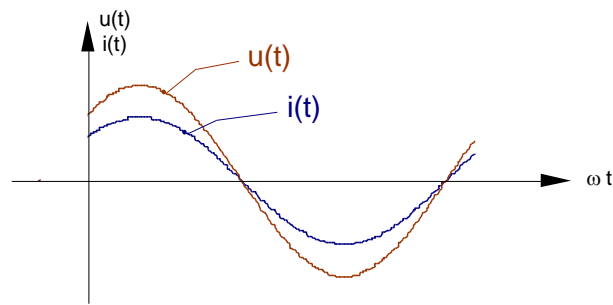


Figura 8

Analicemos el comportamiento de la resistencia transformándola al dominio frecuencial:

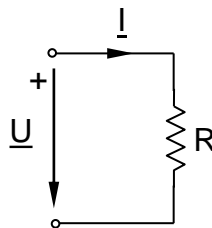


Figura 9

La ecuación, transformada al dominio de la frecuencia, queda:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} \quad (56)$$

Por lo que, efectuando el producto de dos números complejos queda:

$$\begin{cases} \underline{U} = R \cdot \underline{I} \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases} \quad (57)$$

Esto quiere decir que en una resistencia, el módulo del fasor tensión es  $R$  veces el módulo del fasor intensidad y que ambos fasores están en fase (no hay desfase entre ellos).

La representación fasorial (diagrama vectorial de tensiones e intensidades) es:

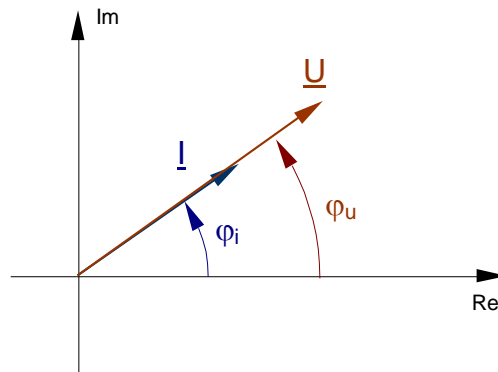


Figura 10

#### 4.2.- Bobina

Sea la bobina de la figura:

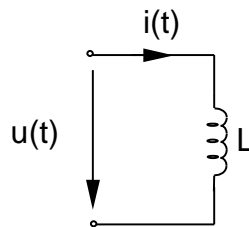


Figura 11

Si la intensidad que atraviesa la bobina es sinusoidal

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (58)$$

Para las referencias de la figura, y recordando la ecuación de definición de una bobina, se tendrá que:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L \cdot I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) = \\ &= L \cdot I_0 \omega \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (59)$$

Identificando términos se tiene que:

$$\begin{aligned} U_0 &= \omega L I_0 \\ \varphi_u &= \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (60)$$

Gráficamente:



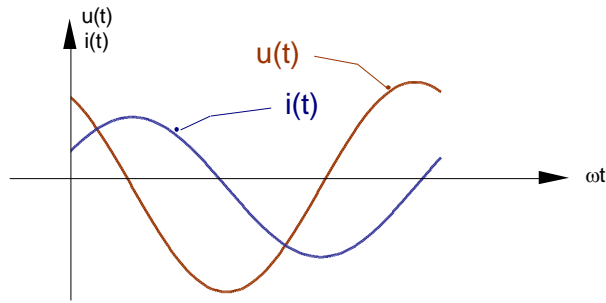


Figura 12

En el dominio de la frecuencia:

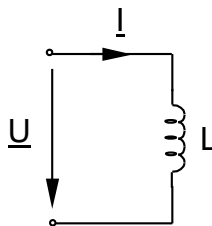


Figura 13

Transformando la ecuación de definición al campo complejo:

$$j\omega L \underline{I} = \underline{U} \quad (61)$$

O lo que es lo mismo:

$$\omega L \underline{I} \angle 90^\circ = \underline{U} \quad (62)$$

Efectuando el producto de dos números complejos, e igualando módulos y argumentos se tiene que:

$$\begin{aligned} U &= \omega L I \\ \varphi_u &= \varphi_i + 90^\circ \end{aligned} \quad (63)$$

En una bobina, el módulo de la tensión es  $\omega L$  veces el módulo de la intensidad y el fasor tensión adelanta  $90^\circ$  al fasor intensidad (el desfase entre tensión e intensidad es de  $90^\circ$ )

El correspondiente diagrama vectorial es:

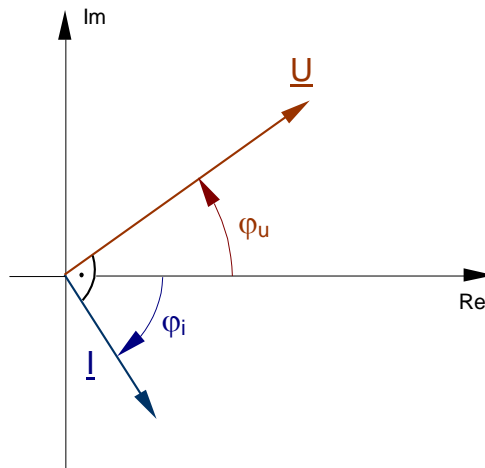


Figura 14

#### 4.3.- Condensador

Sea el condensador de la figura:

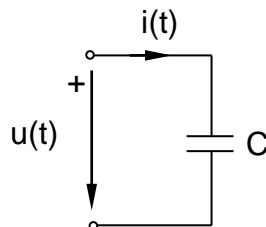


Figura 15

Si la tensión aplicada en bornes del condensador es sinusoidal:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (64)$$

Para las referencias de la figura, y teniendo en cuenta la ecuación de definición del condensador, se tendrá que:

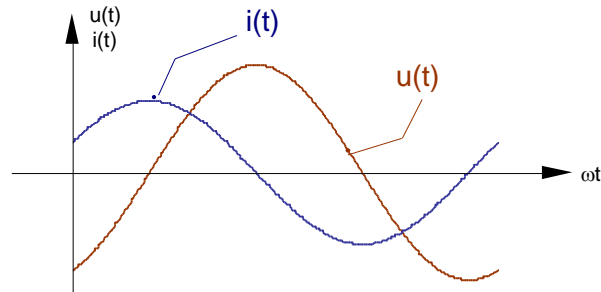
$$\begin{aligned} i(t) &= C \cdot \frac{du(t)}{dt} = -C \cdot U_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_u) = \\ &= C \cdot U_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (65)$$

Identificando términos se tiene que:

$$I_0 = \omega C U_0$$

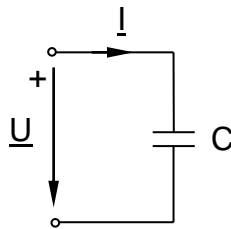
$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$
(66)

Gráficamente:



**Figura 16**

En el dominio de la frecuencia:



**Figura 17**

Transformando la ecuación de definición al campo complejo:

$$\underline{I} = j \omega C \underline{U}$$
(67)

O lo que es lo mismo:

$$U \angle \varphi_u = \omega C \angle 90^\circ I \angle \varphi_i$$
(68)

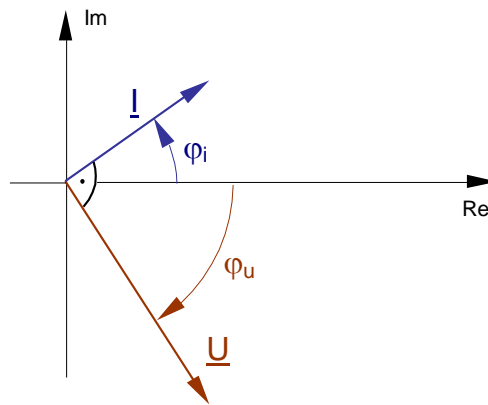
Efectuando el producto de dos números complejos, e igualando módulos y argumentos se tiene que:

$$I = \omega C U$$

$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$
(69)

En un condensador el módulo del fasor intensidad es  $\omega C$  veces el módulo del fasor tensión y el fasor intensidad adelanta  $90^\circ$  al fasor tensión (o bien el fasor tensión retrasa  $90^\circ$  respecto del fasor intensidad).

El correspondiente diagrama vectorial es:



**Figura 18**

## 5.- LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El análisis de los circuitos eléctricos se basa en la aplicación de las leyes de Kirchhoff a los nudos y/o trayectorias cerradas presentes en ellos. La transformación de los circuitos al dominio de la frecuencia hace que estas leyes pasen a ser enunciadas considerando los fasores asociados a las tensiones e intensidades presentes en dichos circuitos.

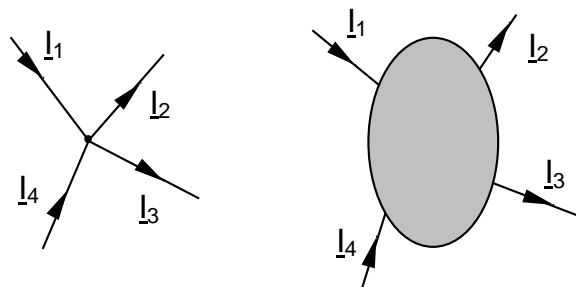
### 5.1.- Ley de Kirchhoff de las intensidades (LKI)

La suma vectorial de los fasores intensidad que entran (salen) en un nudo es siempre igual a cero.

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0 \quad (70)$$

La LKI admite una **generalización** que se puede enunciar de la siguiente manera: La suma vectorial de los fasores de intensidad que entran (salen) por los conductores que atraviesan la frontera de un recinto cerrado es siempre cero.

Como ejemplo de aplicación, sea el nudo o el recinto cerrado de la siguiente figura:



**Figura 19**

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0 \quad (71)$$

**ATENCIÓN:** en general **NO SE CUMPLE** que  $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$  (es importante distinguir entre un fasor, por ejemplo  $\underline{I}$  y su módulo  $I$ ).

### 5.2.- Ley de Kirchhoff de las tensiones (LKT)

La suma vectorial de los fasores tensión a lo largo de una trayectoria cerrada de un circuito es siempre igual a cero.

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0 \quad (72)$$

Como ejemplo de aplicación, en la figura siguiente se muestran diferentes puntos de un circuito y las tensiones existentes entre ellos. Se consideran varias trayectorias cerradas entre dichos puntos:

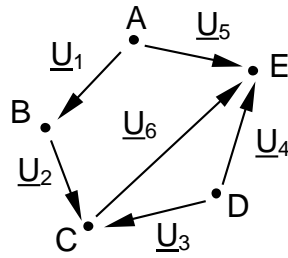


Figura 20

$$\begin{aligned}
 \text{Trayectoria ABCDEA: } & \underline{U}_1 + \underline{U}_2 - \underline{U}_3 + \underline{U}_4 - \underline{U}_5 = 0 \\
 \text{Trayectoria ABCEA: } & \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_6 - \underline{U}_5 = 0 \\
 \text{Trayectoria CDEC: } & -\underline{U}_3 + \underline{U}_4 - \underline{U}_6 = 0
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

## 6.- IMPEDANCIA Y ADMITANCIA COMPLEJAS

Se define la **Impedancia Compleja** de un dipolo pasivo como la relación entre la tensión en bornes del dipolo y la intensidad que lo atraviesa

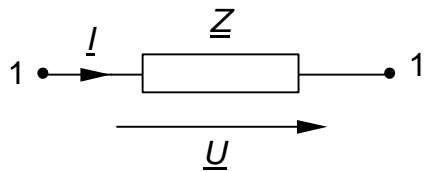


Figura 21

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}
 \tag{74}$$

La impedancia es un número complejo, y como tal se podrá escribir en forma polar o bien en forma binómica, esto es:

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z = R + jX
 \tag{75}$$

La parte real,  $R$ , recibe el nombre de **Resistencia** y a la parte imaginaria,  $X$ , se le denomina **Reactancia**. Las unidades de la impedancia, la resistencia y la reactancia son los Ohmios ( $\Omega$ ).

Si se representa gráficamente este número complejo, se tendrá:

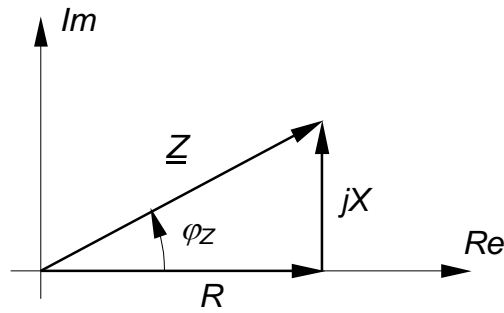


Figura 22

A partir de esta representación, se puede ver que:

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi_z = \arctg \frac{X}{R} \end{cases} \quad (76)$$

Dado que  $R \geq 0$ , entonces:

$$\begin{cases} \text{Si } X > 0 \text{ (Reactancia Inductiva)} \Rightarrow \varphi_z > 0 \\ \text{Si } X < 0 \text{ (Reactancia Capacitiva)} \Rightarrow \varphi_z < 0 \end{cases} \quad (77)$$

Aunque la impedancia es la relación entre dos fasores, no es un fasor, pues no está relacionada con una forma de onda sinusoidal.

También se puede establecer una relación entre la tensión en bornes de un dipolo pasivo y la intensidad que lo atraviesa de la siguiente manera:

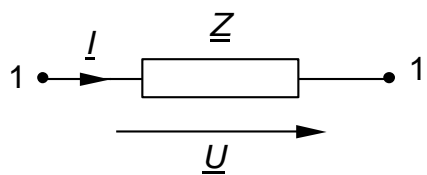


Figura 23

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad (78)$$

Donde  $\underline{Y}$  recibe el nombre de **Admitancia Compleja**.

Como también se trata de un número complejo, admite su escritura en forma binómica o bien en forma polar, esto es:

$$\underline{Y} = Y \angle \psi_Y = G + jB \quad (79)$$

A la parte real,  $G$ , se le denomina **Conductancia**, y a la parte imaginaria,  $B$ , se le denomina **Susceptancia**. Las unidades de la admitancia, la conductancia y la susceptancia son los Siemens (S).

Representando gráficamente este número complejo, se tendrá:

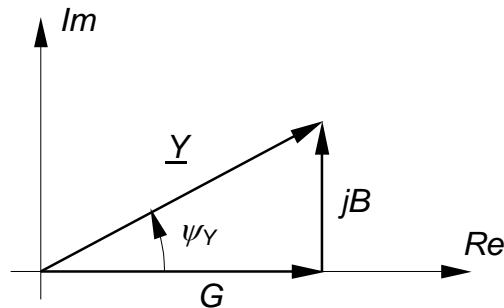


Figura 24

A partir de ella, puede verse que:

$$\begin{cases} Y = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \psi_Y = \arctg \frac{B}{G} \end{cases} \quad (80)$$

Como siempre se verifica que  $G \geq 0$ , entonces:

$$\begin{cases} \text{Si } B > 0 \text{ (Susceptancia Capacitiva)} \Rightarrow \psi_Y > 0 \\ \text{Si } B < 0 \text{ (Susceptancia Inductiva)} \Rightarrow \psi_Y < 0 \end{cases} \quad (81)$$

Se puede observar que:

$$\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 1 \quad (82)$$

de donde se deduce que:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (83)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z \angle \varphi_Z} = \frac{1}{Z} \angle -\varphi_Z \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{1}{Z} \\ \psi_Z = -\varphi_Z \end{cases} \quad (84)$$

Notar que:



$$\begin{cases} G \neq \frac{1}{R} \\ B \neq \frac{1}{X} \end{cases} \quad (85)$$

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (86)$$

Identificando parte real y parte imaginaria de ambos números complejos, se tiene que:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (87)$$

## 7.- ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS PASIVOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

### 7.1.- Asociación Serie. Divisor de tensión

Sean n elementos pasivos conectados tal y como se muestra en la figura.

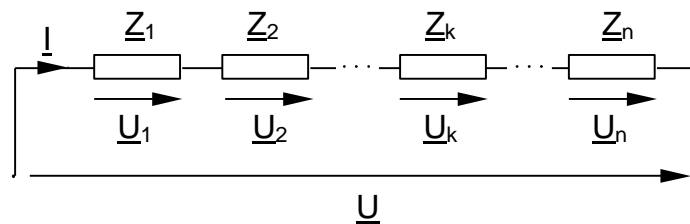


Figura 25

Por todos ellos circula la misma intensidad  $I$  entonces:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} \\ &\vdots \\ \underline{U}_k &= \underline{Z}_k \cdot \underline{I} \\ &\vdots \\ \underline{U}_n &= \underline{Z}_n \cdot \underline{I} \end{aligned} \quad (88)$$

Y aplicando la LKT puede verse que:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_k + \dots + \underline{U}_n \quad (89)$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I} + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} + \dots + \underline{Z}_k \cdot \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \cdot \underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_k + \dots + \underline{Z}_n) \underline{I} \quad (90)$$

Tratamos de encontrar un elemento tal que sea equivalente a los n elementos conectados en serie, es decir un elemento tal que:

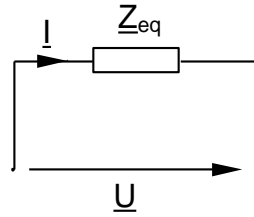


Figura 26

$$\underline{U} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I} \quad (91)$$

Identificando ambas ecuaciones:

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_k + \dots + \underline{Z}_n \quad (92)$$

Es decir, la impedancia equivalente a  $n$  impedancias conectadas en serie es igual a la suma de todas las impedancias.

Por otra parte, para el elemento  $k$ -ésimo de esta asociación tendremos:

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I} \quad (93)$$

Y dado que:

$$\underline{U} = \left( \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \right) \underline{I} \quad (94)$$

Dividiendo ambas expresiones, se tiene que:

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k} \Rightarrow \underline{U}_k = \underline{U} \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k} \quad (95)$$

Expresión que permite calcular la tensión en bornes de un elemento del divisor en función de la tensión aplicada en bornes de la asociación y la impedancia de los diversos elementos que la componen, y que se conoce como expresión del **divisor de tensión**.

### 7.2.- Asociación en paralelo. Divisor de intensidad

Sean  $n$  elementos pasivos conectados como indica la figura.

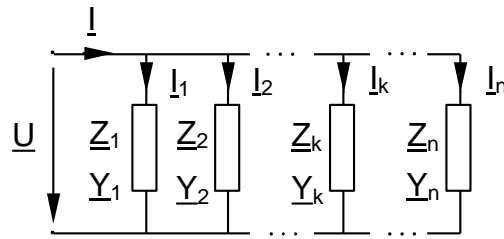


Figura 27

Todos ellos están sometidos a la misma tensión  $\underline{U}$ .

Se podrá escribir entonces:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_1 \cdot \underline{U} \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_2 \cdot \underline{U} \\ &\vdots \\ \underline{I}_k &= \underline{Y}_k \cdot \underline{U} \\ &\vdots \\ \underline{I}_n &= \underline{Y}_n \cdot \underline{U} \end{aligned} \quad (96)$$

Aplicando la LKI se tendrá que:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_k + \dots + \underline{I}_n \\ \underline{I} &= \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} + \dots + \underline{Y}_k \underline{U} + \dots + \underline{Y}_n \underline{U} \\ \underline{I} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_k + \dots + \underline{Y}_n) \underline{U} \end{aligned} \quad (97)$$

Se trata de encontrar un elemento equivalente a la asociación de elementos pasivos, esto es, un elemento tal que al circular por él la intensidad  $\underline{I}$  caiga en sus bornes la misma tensión  $\underline{U}$  que en bornes del conjunto de elementos en paralelo.

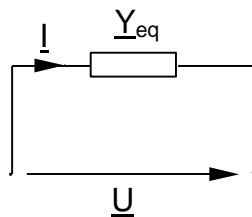


Figura 28

$$\underline{I} = \underline{Y}_{eq} \cdot \underline{U} \quad (98)$$

Identificando se tiene que:

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_k + \dots + \underline{Y}_n \quad (99)$$

Es decir, la admitancia equivalente de  $n$  admitancias conectadas en paralelo, es igual a la suma de las admitancias.

Por otra parte, para el elemento  $k$ -ésimo de esta asociación se tendrá que:

$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U} \quad (100)$$

Y dado que:

$$\underline{I} = \left( \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \right) \underline{U} \quad (101)$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \quad (102)$$

de donde se obtiene:

$$\underline{I}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \quad (103)$$

Expresión que permite hallar la intensidad que circula por el elemento  $k$ -ésimo del divisor a partir de la intensidad total y las admitancias de los elementos que componen la asociación, y que se conoce como expresión del **divisor de intensidad**.

## 8.- ESTUDIO DE ALGUNOS CIRCUITOS SERIE

### 8.1.- Circuito RC

Sea el circuito de la figura:

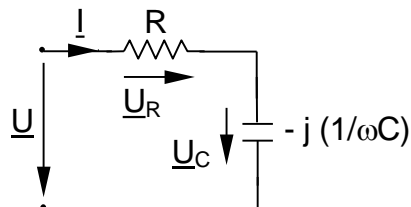


Figura 29

Aplicando la LKT

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C \quad (104)$$

y dado que:

$$\begin{aligned}\underline{U}_R &= R \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_C &= \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) \underline{I}\end{aligned}\quad (105)$$

Se tiene:

$$\underline{U} = \left(R - j \frac{1}{\omega C}\right) \underline{I} \quad (106)$$

Por lo tanto:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R - j \frac{1}{\omega C} \quad (107)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (108)$$

$$\varphi_z = \arctg \frac{-1/\omega C}{R} < 0 \quad (\omega, R, C > 0) \quad (109)$$

Entonces:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_z + \varphi_i \end{cases} \quad (110)$$

Dado que  $\varphi_z < 0$ , entonces:

$$\varphi_u < \varphi_i \quad (111)$$

es decir, la intensidad que circula por el circuito RC adelanta a la tensión en bornes de dicho circuito.

El diagrama fasorial de tensiones e intensidades del circuito RC es:

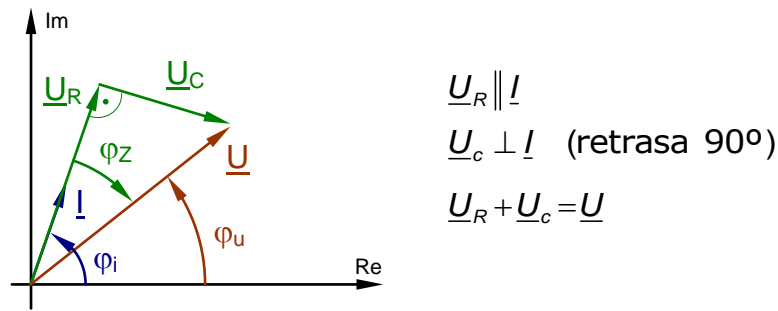


Figura 30

### 8.2.- Circuito RL

Sea el circuito de la figura:

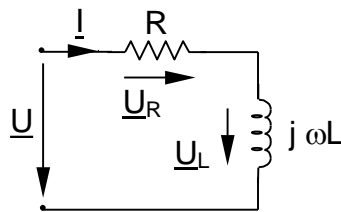


Figura 31

Aplicando la LKT

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad (112)$$

y dado que:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= R \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_L &= j\omega L \underline{I} \end{aligned} \quad (113)$$

Se tiene:

$$\underline{U} = (R + j\omega L) \underline{I} \quad (114)$$

Por lo tanto:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + j\omega L \quad (115)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (116)$$

$$\varphi_z = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0 \quad (\omega, R, L > 0) \quad (117)$$

Entonces:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_z + \varphi_i \end{cases} \quad (118)$$

Dado que  $\Re\{Z\} > 0$ , entonces:

$$\varphi_u > \varphi_i \quad (119)$$

es decir, la tensión en bornes del circuito RL adelanta a la intensidad que circula por dicho circuito.

El diagrama fasorial de tensiones e intensidades del circuito RL es:

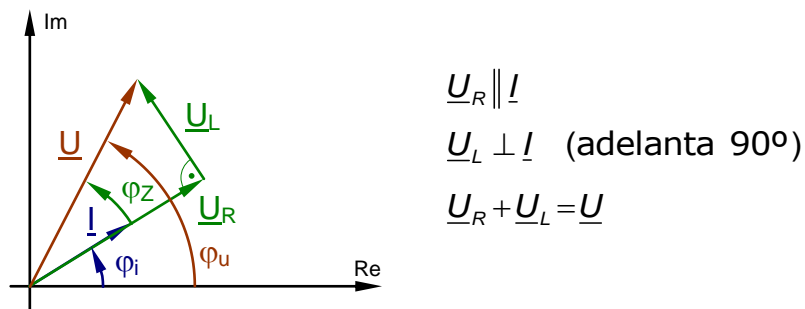


Figura 32

### 8.3.- Circuito RLC

Sea el circuito de la figura:

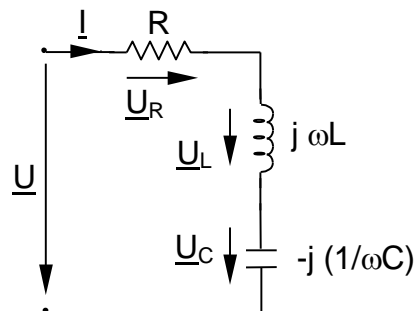


Figura 33

Aplicando la LKT

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (120)$$

y dado que:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= R \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_L &= j\omega L \underline{I} \\ \underline{U}_C &= -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} \end{aligned} \quad (121)$$

Se tiene:

$$\underline{U} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} \quad (122)$$

Por lo tanto:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (123)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (124)$$

$$\varphi_z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (125)$$

Como R, C, L > 0, podrán darse tres casos:

$$\begin{aligned} \omega L > \frac{1}{\omega C} &\Rightarrow \varphi_z > 0 \\ \omega L = \frac{1}{\omega C} &\Rightarrow \varphi_z = 0 \\ \omega L < \frac{1}{\omega C} &\Rightarrow \varphi_z < 0 \end{aligned} \quad (126)$$

Entonces:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_z + \varphi_i \end{cases} \begin{cases} \varphi_z > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i \\ \varphi_z = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i \\ \varphi_z < 0 \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i \end{cases} \quad (127)$$

Es decir, en función del valor de  $\omega L$  y  $1/\omega C$  puede ocurrir que:

1.  $\omega L > (1/\omega C) \Rightarrow \varphi_z > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i$ , esto es, la tensión en bornes del circuito adelantará a la intensidad que circula por él.
2.  $\omega L = (1/\omega C) \Rightarrow$ (RESONANCIA) $\Rightarrow \varphi_z = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$ , esto es, la tensión en bornes del circuito estará en fase con la intensidad que circula por él.
3.  $\omega L < (1/\omega C) \Rightarrow \varphi_z < 0 \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i$ , esto es, la intensidad que circula por el circuito adelantará a la tensión en sus bornes.



El diagrama fasorial de tensiones e intensidades en el primer caso es:

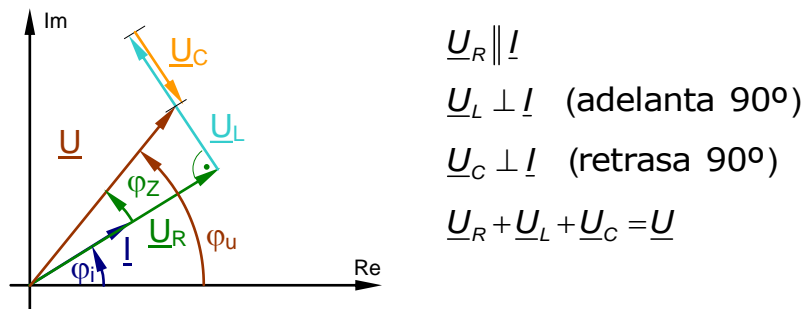


Figura 34

En el segundo caso, el diagrama fasorial de tensiones e intensidades es:

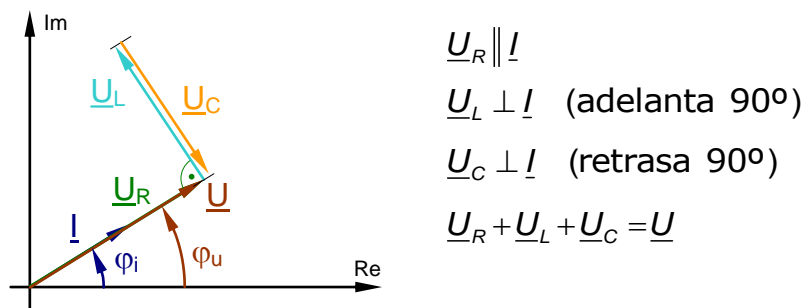


Figura 35

Mientras que en el tercer caso, el diagrama fasorial de tensiones e intensidades es:

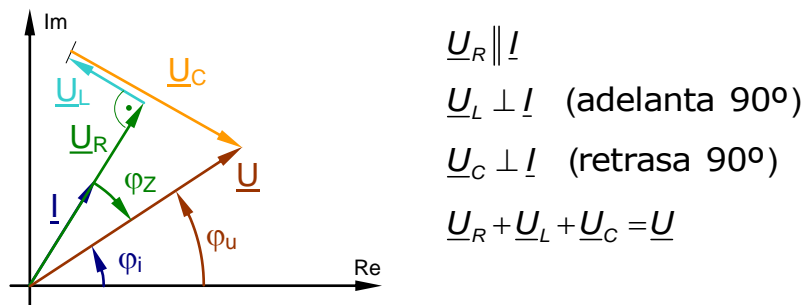


Figura 36

Así pues, puede verse que, en general, la impedancia de un dipolo pasivo es función de la pulsación de la fuente de excitación, es decir, es función de la frecuencia de la onda sinusoidal con que se alimenta a dicho dipolo.

Por otra parte, a través de los circuitos serie vistos, se puede comprobar que el desfase entre la tensión en bornes de un dipolo pasivo y la intensidad que entra en él coincide con el argumento de la impedancia equivalente de dicho dipolo. De esta manera, se puede confeccionar una tabla resumen de los diferentes tipos de cargas (dipolos pasivos) que pueden encontrarse y la relación

que existe entre los ángulos de fase de la tensión y la intensidad en las cargas en función de su carácter.

| <i>Tipo de carga</i> | <i>Tensión respecto de la intensidad</i> |
|----------------------|--|
| Resistiva pura       | En fase                                  |
| Capacitiva pura      | Retrasa 90°                              |
| Inductiva pura       | Adelanta 90°                             |
| Carácter capacitivo  | Retrasa un ángulo igual a $\varphi_z$    |
| Carácter inductivo   | Adelanta un ángulo igual a $\varphi_z$   |

Tabla 1

## 9.- ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

El análisis de los circuitos en régimen estacionario sinusoidal puede hacerse en el dominio de la frecuencia utilizando cualquiera de los métodos de análisis conocidos para el dominio del tiempo (método de análisis por mallas, método de análisis por nudos, etc.) pero utilizando la representación fasorial. De esta manera, se obtendrán sistemas de ecuaciones algebraicas, en vez de sistemas de ecuaciones diferenciales, que llevarán a poder determinar las respuestas del circuito en régimen permanente de manera más sencilla que si se analizase en el dominio del tiempo. Se dan por conocidos los diferentes métodos generales de análisis y los diversos teoremas útiles para la resolución de circuitos, si bien, en caso de ser necesario, son fáciles de encontrar en cualquier libro de Teoría de Circuitos.

No obstante lo anterior, se van a enunciar tres teoremas que, por diversas razones, se consideran fundamentales para el análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal. El primero que se enuncia es el teorema de superposición, de obligado uso cuando se desea analizar, utilizando el método simbólico, circuitos alimentados por fuentes sinusoidales y no sinusoidales o alimentados por fuentes todas ellas sinusoidales, pero de diferentes frecuencias. Los dos siguientes teoremas son los teoremas de Thévenin y de Norton, relacionados entre sí, y de amplio uso cuando en el estudio de una red sólo son de interés los resultados en una parte de ella. En ese caso, la parte de la red cuyas variables no interesa conocer, se sustituye por su equivalente Norton o su equivalente Thévenin, haciendo más sencillo el cálculo de la parte de la red de la que se desea el estudio específico.

### 9.1.- Teorema de Superposición

Dado un circuito lineal, la respuesta de dicho circuito cuando actúan en él de manera simultánea varias fuentes de excitación, es igual a la suma de las respuestas del circuito si actúa cada fuente de excitación de manera independiente.

En circuitos en régimen estacionario sinusoidal, este teorema es de uso obligado cuando se desea analizar circuitos en los que actúan simultáneamente varias fuentes sinusoidales de diferente frecuencia. La manera de obtener la respuesta total del circuito es sumar, en el dominio del tiempo, las diferentes respuestas del circuito cuando se agrupan fuentes de la misma frecuencia. De esta manera, la respuesta a cada frecuencia se puede calcular utilizando el método simbólico.

Es importante no olvidar que la suma de las respuestas ha de hacerse en el dominio temporal. No es posible sumar respuestas en el dominio de la frecuencia ya que los fasores correspondientes a cada pulsación giran a velocidades angulares diferentes

### 9.2.- Teorema de Thévenin

Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo puede ser sustituido por una fuente real de tensión, formada por una fuente ideal de tensión de valor la tensión en bornes del dipolo activo cuando éste se encuentra a circuito abierto, y en serie con ella una impedancia de valor la impedancia equivalente del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.

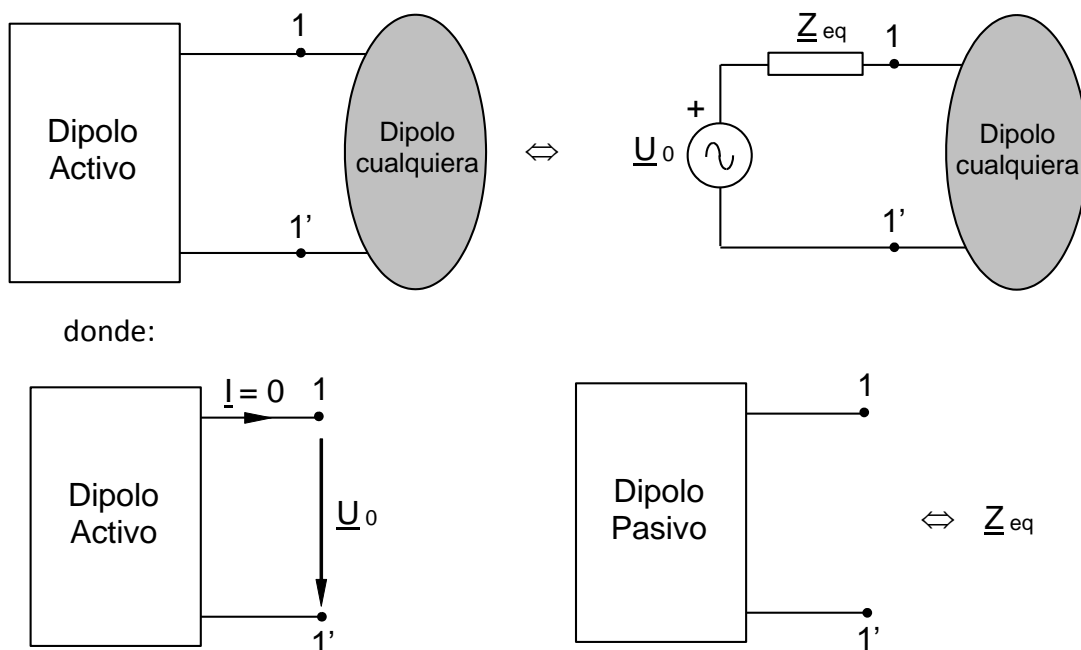


Figura 37

### 9.3.- Teorema de Norton

Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo puede ser sustituido por una fuente real de intensidad, formada por una fuente ideal de intensidad de valor la corriente que circula entre los bornes del dipolo activo cuando éstos se unen mediante un cortocircuito, y en paralelo con ella una impedancia de valor la impedancia equivalente del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.

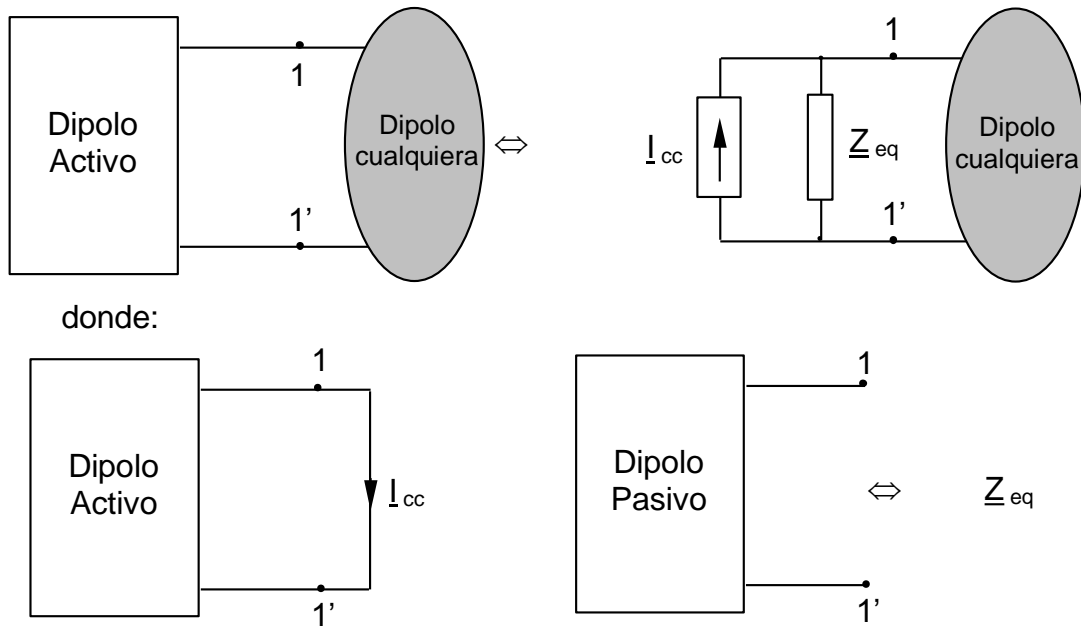


Figura 38

**10.- POTENCIA EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL**

**10.1.-Potencia instantánea**

Sea el dipolo pasivo de la figura, alimentado por una tensión sinusoidal:

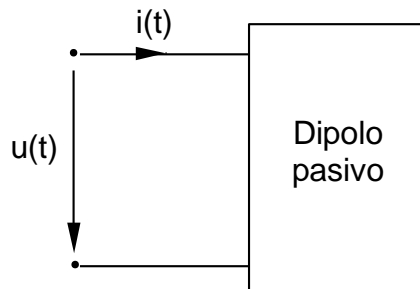


Figura 39

Supóngase que los valores de la tensión y la intensidad en el dipolo son sinusoidales, es decir:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U_0 \cos \omega t \\
 i(t) &= I_0 \cos(\omega t - \varphi)
 \end{aligned}
 \tag{128}$$

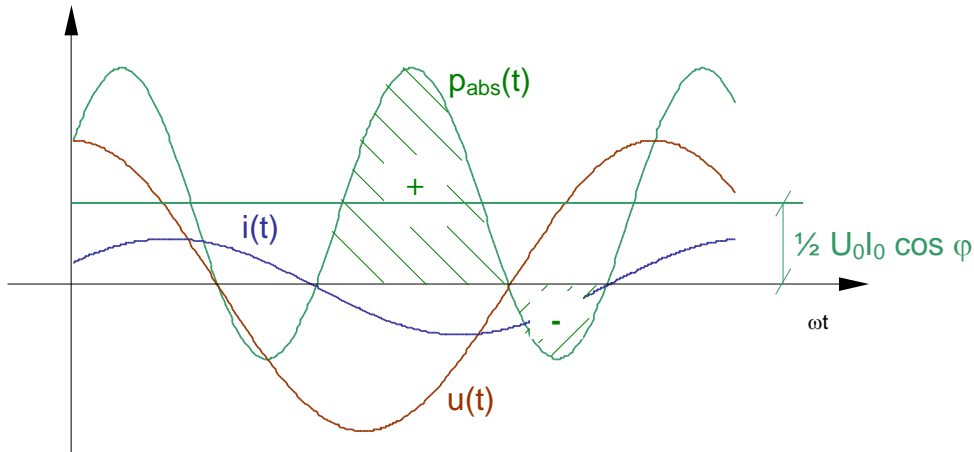
Para las referencias de la figura, la **Potencia Instantánea** absorbida por el dipolo es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)
 \tag{129}$$

que transformado el producto de cosenos queda:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(2\omega t - \varphi) \quad (130)$$

Si se representan estas formas de onda:



**Figura 40**

Observando estas curvas puede verse que la potencia instantánea tiene una frecuencia doble de la frecuencia de la tensión o la intensidad. Por otra parte, se observa que existen intervalos de tiempo en los que la potencia absorbida es mayor que cero e intervalos en los que esta potencia es negativa. Durante estos últimos intervalos, el dipolo devuelve energía a la fuente de excitación, y esto es debido a la presencia de elementos inductivos o capacitivos en el dipolo. Estos elementos hay periodos en los que almacenan energía, energía que posteriormente devuelven a la fuente.

Escribiendo la expresión de la potencia instantánea en función de los valores eficaces de la tensión y la intensidad se tiene que:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = U I \cos \varphi + U I \cos(2\omega t - \varphi) \quad (131)$$

A la vista de esta expresión y de la representación gráfica de la potencia instantánea, se puede ver que dicha potencia está compuesta por dos términos, uno, independiente del tiempo, que coincide con el valor medio de la potencia instantánea, y que se va a denominar **Potencia Media**, más otro término oscilante con pulsación  $2\omega$ , de valor medio nulo, que se denomina **Potencia Fluctuante**, esto es:

$$\begin{aligned} p_{abs}(t) &= \text{Potencia Media} + \text{Potencia Fluctuante} \\ \text{Potencia Media} &= U I \cos \varphi \\ \text{Potencia Fluctuante} &= U I \cos(2\omega t + \varphi) = \\ &= (U I \cos \varphi) \cos 2\omega t + (U I \cos \varphi) \sen 2\omega t \end{aligned} \quad (132)$$

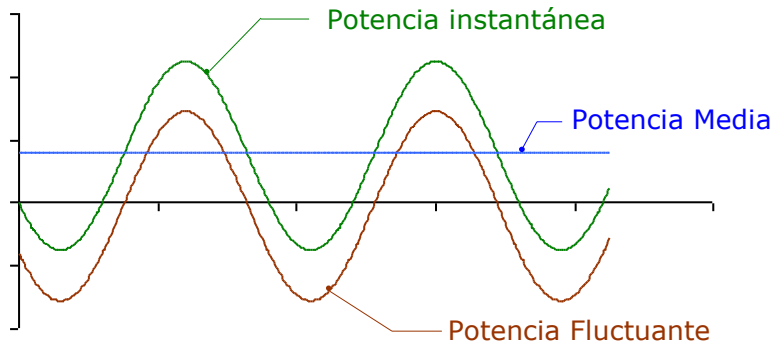


Figura 41

### 10.2.- Potencia activa, potencia reactiva y potencia aparente

Sea un dipolo pasivo alimentado por una tensión sinusoidal de una determinada pulsación.

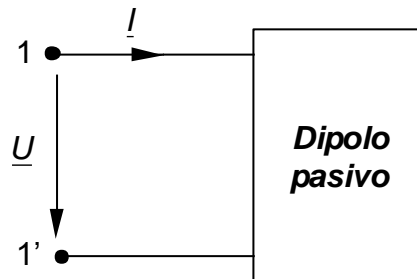


Figura 42

Este dipolo, al ser pasivo, puede caracterizarse mediante su impedancia equivalente, cuya representación gráfica es un triángulo, el *triángulo de impedancias*.

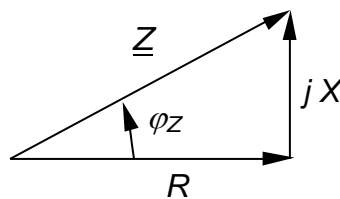


Figura 43

Si se considera la intensidad que entra en el dipolo como el origen de fases y se multiplican todos los lados del triángulo de impedancias por esta intensidad, se obtendrá un triángulo semejante al anterior en el que cada lado tendrá unidades de tensión. Es el *triángulo de tensiones*

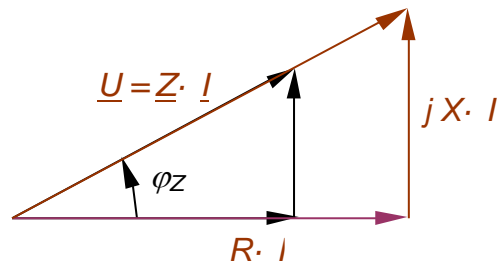


Figura 44

Es fácil ver que  $R \cdot I$  es la caída de tensión en la parte resistiva del dipolo y  $X \cdot I$  es la caída de tensión en la parte reactiva del dipolo pasivo. La suma de estos dos vectores perpendiculares es la tensión en bornes del dipolo.

Multiplicando todos los lados del triángulo de tensiones por la tensión que entra en el dipolo pasivo, se obtendrá un nuevo triángulo semejante a los dos anteriores.

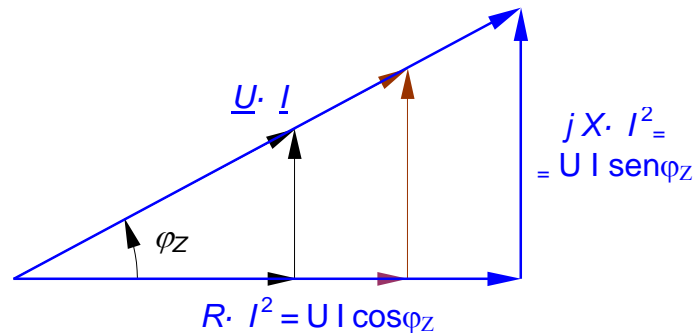


Figura 45

El cateto horizontal:

$$UI \cos \varphi_Z = RI^2 \quad (133)$$

coincide con la expresión de la potencia instantánea media que absorbe un dipolo, esto es, y se ve que en el caso de un dipolo pasivo coincide con la potencia que absorbe la parte resistiva de dicho dipolo.

Por otra parte, la longitud del cateto vertical:

$$UI \sen \varphi_Z = XI^2 \quad (134)$$

coincide con el valor de la amplitud de las oscilaciones de la potencia absorbida en la componente reactiva del dipolo y está relacionado con la potencia fluctuante.

Puede verse que los lados de este triángulo tienen unidades de potencia, de ahí que reciba el nombre de **Triángulo de Potencias**.

El cateto horizontal se denomina **Potencia Activa**, se denota por la letra  $P$  y sus unidades son los Vatios (W).

El cateto vertical se denomina **Potencia Reactiva**, se denota por la letra  $Q$  y sus unidades son los Voltamperios reactivos (var).

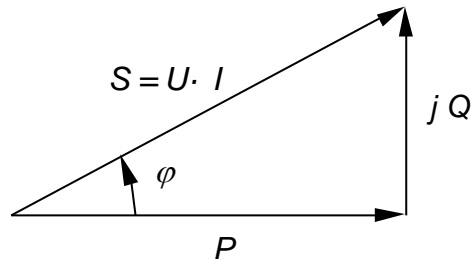


Figura 46

Se cumple que:

$$\begin{aligned} P &= UI \cos\varphi \\ Q &= UI \sin\varphi \end{aligned} \quad (135)$$

El módulo de la hipotenusa del triángulo de potencias es el producto del valor eficaz de la tensión por el valor eficaz de la intensidad y se denomina **Potencia Aparente**, se denota por la letra  $S$  y sus unidades son los Voltamperios (VA).

Puede verse, sin más que fijarse en el triángulo, que se cumple que:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P &= S \cos\varphi \\ Q &= S \sin\varphi \end{aligned} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} \quad (136)$$

En función de las referencias de tensión e intensidad consideradas para un determinado dipolo, se estarán calculando potencias absorbidas o bien potencias cedidas. En concreto, para las referencias dadas en la Figura 42 el cálculo corresponde a potencias absorbidas. En función del signo de las potencias se distingue entre:

$P_{abs} > 0 \Rightarrow$  El dipolo absorbe potencia activa  $\Rightarrow$  Dipolo Receptor

$P_{abs} < 0 \Rightarrow$  El dipolo cede potencia activa  $\Rightarrow$  Dipolo Generador

$Q_{abs} > 0 \Rightarrow$  El dipolo absorbe potencia reactiva

$Q_{abs} < 0 \Rightarrow$  El dipolo cede potencia reactiva



Para las referencias antes mencionadas, si en un diagrama fasorial se dibuja el fasor intensidad como origen de fases, sin más que saber en qué cuadrante se encuentra el fasor tensión es posible determinar si el dipolo es generador o receptor y si absorbe o cede potencia reactiva. Esta determinación se puede hacer basándose en la figura siguiente.

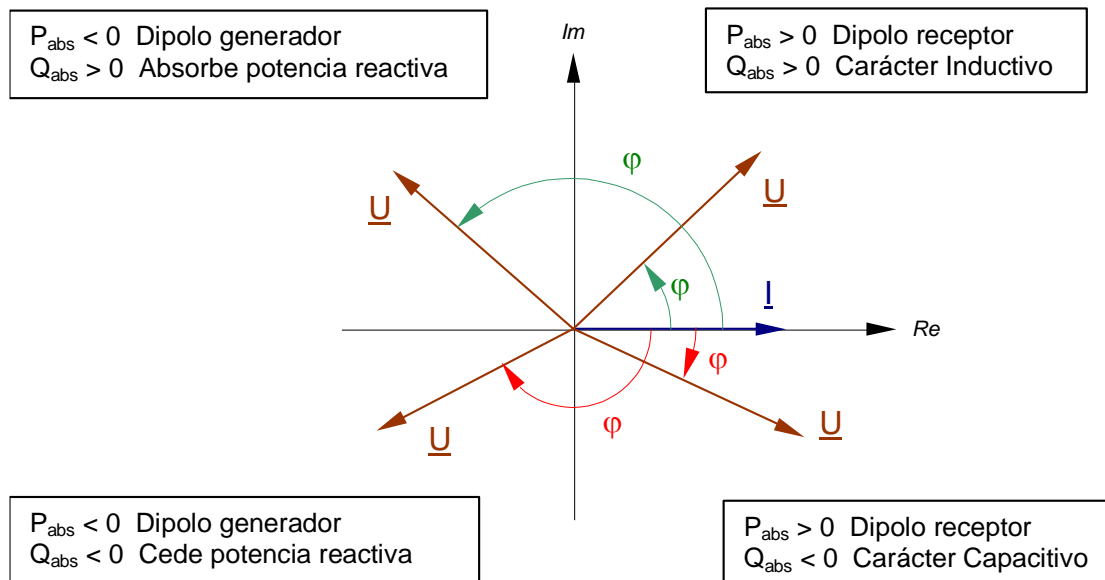


Figura 47

El desfase entre la tensión en bornes de un dipolo y la intensidad que entra en él coincide con el ángulo  $\varphi$  del triángulo de potencias. De esta manera el signo de la potencia activa y la potencia reactiva absorbidas por un determinado dipolo vendrá determinado por el signo de  $\cos \varphi$  y  $\sin \varphi$  respectivamente, como puede verse en la figura 47.

Un dipolo pasivo actuará siempre como receptor, es decir, siempre absorberá potencia activa, mientras que un dipolo activo puede actuar como generador o bien como receptor (una fuente puede absorber o puede ceder potencia activa). Por otra parte, un dipolo pasivo tiene muy bien determinado su carácter, siendo éste capacitivo (siempre cede potencia reactiva) o inductivo (siempre absorbe potencia reactiva), mientras que un dipolo activo puede en un instante absorber potencia reactiva para pasar a cederla más adelante, en función de las circunstancias impuestas por la red a la cual pertenece.

### 10.3.-Potencia Compleja

Cuando se efectúan cálculos de potencia en régimen estacionario sinusoidal, en ocasiones es muy útil combinar la potencia activa y la potencia reactiva de un dipolo en una cantidad compleja que se denomina **Potencia Compleja**, y que se denota como  $\underline{S}$ . Esta potencia corresponde a la hipotenusa del triángulo de potencias, cuyo módulo, como se ha visto, es la potencia aparente.

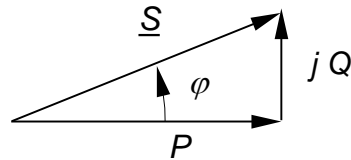


Figura 48

Según se ve en el triángulo de la figura anterior, se puede escribir que:

$$\underline{S} = P + jQ = S \left[ \varphi = UI \left[ \varphi = \sqrt{P^2 + Q^2} \right] \arctg \frac{Q}{P} \right] \quad (137)$$

La potencia compleja no está asociada a una forma de onda sinusoidal por lo que no se trata de un fasor. Al igual que la impedancia o la admitancia, se trata de un vector fijo.

Para un dipolo general, y las referencias indicadas en la figura, la expresión, en el dominio de la frecuencia, de la potencia compleja absorbida por el dipolo es:

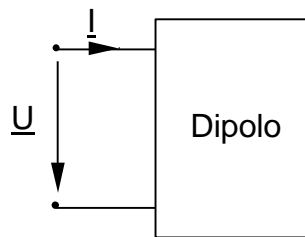


Figura 49

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (138)$$

donde  $\underline{I}^*$  es el complejo conjugado del fasor intensidad

Se ha visto la relación entre las diferentes potencias que aparecen en el triángulo de potencias. Es necesario señalar que tanto la potencia reactiva como la potencia aparente no son físicamente potencias (no tienen significado físico). Se definen porque se pueden medir y porque son útiles a la hora de efectuar cálculos electrotécnicos.

Por otra parte, hay que decir que la especificación de las potencias en los equipos eléctricos se hace de diferentes maneras, dependiendo de qué equipo se trate. Por ejemplo, en el caso de generadores y transformadores sus potencias se suelen indicar en forma de su potencia aparente. Conociendo la potencia aparente y la tensión nominal de la máquina (esencialmente constante) se puede calcular la corriente que va a circular por la máquina, lo que determinará la sección de los conductores de los devanados y la de los terminales de salida.

Los motores se especifican por su tensión de alimentación y por su potencia mecánica en el eje, expresada en kW o bien en CV. Conociendo el rendimiento del motor es fácil determinar la potencia eléctrica que absorben de la red a la que están conectados.

Las reactancias, tanto inductivas como capacitivas, se especifican en términos de su potencia reactiva, mientras que las resistencias eléctricas se especifican en forma de su potencia activa.

#### 10.4.-Expresión de la potencia compleja en dipolos pasivos

Sea un dipolo pasivo, caracterizado por su impedancia equivalente, y las referencias indicadas en la figura siguiente.

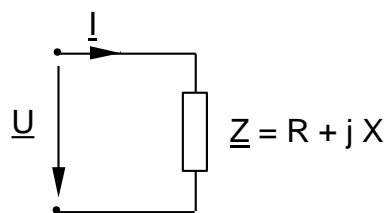


Figura 50

Para este dipolo se cumple que:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (139)$$

La potencia compleja que absorbe el dipolo pasivo es:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (140)$$

Por lo tanto:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (\underline{Z} \cdot \underline{I}) \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot I^2 \quad (141)$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Z} \cdot I^2 = (R + jX) I^2 = R I^2 + jX I^2 = P_{abs} + jQ_{abs} \quad (142)$$

Identificando parte real y parte imaginaria de ambos números complejos, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{abs} &= R I^2 \\ Q_{abs} &= X I^2 \end{aligned} \quad (143)$$

Como en un dipolo pasivo se cumple siempre que  $R \geq 0$ , se tiene que  $P_{abs} \geq 0$ , mientras que  $Q_{abs}$  puede ser mayor o menor que cero, en función del valor de  $X$ , esto es:

$$\begin{aligned} \text{Dipolo carácter inductivo} &\Rightarrow X > 0 \Rightarrow Q_{abs} > 0 \\ \text{Dipolo carácter capacitivo} &\Rightarrow X < 0 \Rightarrow Q_{abs} < 0 \end{aligned} \quad (144)$$

Si se considera la admitancia equivalente del dipolo pasivo en vez de su impedancia, entonces:

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \quad (145)$$

por lo que:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{Y} \cdot \underline{U})^* = \underline{U} \cdot \underline{Y}^* \cdot \underline{U}^* = \underline{Y}^* \cdot \underline{U} \cdot \underline{U}^* = \underline{Z} \cdot U^2 \quad (146)$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = (G - jB)U^2 = GU^2 - jBU^2 = P_{abs} + jQ_{abs} \quad (147)$$

Identificando partes reales y partes imaginarias:

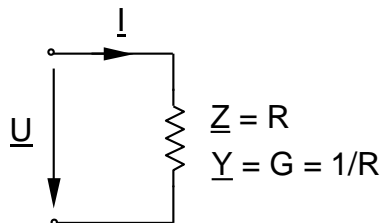
$$\begin{aligned} P_{abs} &= GU^2 \\ Q_{abs} &= -BU^2 \end{aligned} \quad (148)$$

Como en el caso en el que se trabaja con la impedancia equivalente, en un dipolo pasivo también se cumple siempre que  $G \geq 0$ , por lo que  $P_{abs} \geq 0$ , mientras que  $Q_{abs}$  puede ser mayor o menor que cero, en función del valor de B, esto es:

$$\begin{aligned} \text{Dipolo carácter inductivo} &\Rightarrow B < 0 \Rightarrow Q_{abs} > 0 \\ \text{Dipolo carácter capacitivo} &\Rightarrow B > 0 \Rightarrow Q_{abs} < 0 \end{aligned} \quad (149)$$

#### 10.4.1.- Resistencia

Sea la resistencia de la figura:



**Figura 51**

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Z} \cdot I^2 = R \cdot I^2 = P_{abs} + jQ_{abs} \quad (150)$$

Identificando:

$$\begin{aligned} P_{abs} &= R \cdot I^2 \geq 0 \\ Q_{abs} &= 0 \end{aligned} \quad (151)$$

O también:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = G \cdot U^2 = \frac{1}{R} \cdot U^2 = P_{abs} + jQ_{abs} \quad (152)$$

Esto es:

$$P_{abs} = G \cdot U^2 = \frac{1}{R} \cdot U^2 \geq 0$$

$$Q_{abs} = 0$$
(153)

La potencia activa absorbida por una resistencia es siempre mayor o igual que cero, mientras que ni cede ni absorbe potencia reactiva.

#### 10.4.2.- Bobina

Sea la bobina y las referencias de la figura.

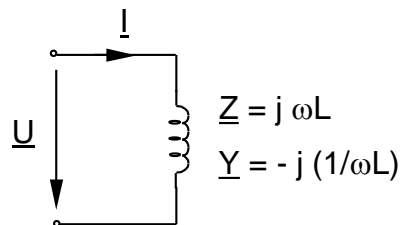


Figura 52

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Z} \cdot I^2 = j\omega L \cdot I^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$
(154)

Identificando:

$$P_{abs} = 0$$

$$Q_{abs} = \omega L \cdot I^2 \geq 0$$
(155)

En función de la admitancia:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = \left(-j \frac{1}{\omega L}\right)^* \cdot U^2 = j \frac{1}{\omega L} \cdot U^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$
(156)

Esto es:

$$P_{abs} = 0$$

$$Q_{abs} = \frac{1}{\omega L} \cdot U^2 \geq 0$$
(157)

Una bobina ni cede ni absorbe potencia activa y por el contrario absorbe potencia reactiva.

#### 10.4.3.- Condensador

Sea el condensador de la figura con las referencias indicadas en ella.

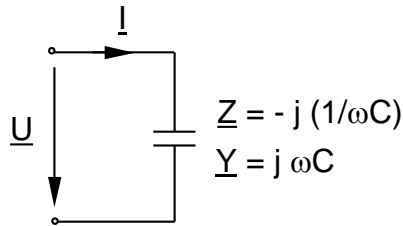


Figura 53

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Z} \cdot I^2 = -j \frac{1}{\omega C} \cdot I^2 = P_{abs} + j Q_{abs} \quad (158)$$

Identificando:

$$\begin{aligned} P_{abs} &= 0 \\ Q_{abs} &= -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (159)$$

En función de la admitancia:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = (j\omega C)^* \cdot U^2 = -j\omega C \cdot U^2 = P_{abs} + j Q_{abs} \quad (160)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} P_{abs} &= 0 \\ Q_{abs} &= \omega C \cdot U^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (161)$$

Puede verse que un condensador no absorbe ni cede potencia activa y cede potencia reactiva.

### 10.5.- Teorema de Boucherot

En un circuito en régimen estacionario sinusoidal, y para una frecuencia constante, se verifica, de forma independiente, la conservación de la potencia activa y la conservación de la potencia reactiva.

Expresado de otra manera, el teorema de Boucherot se puede enunciar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{abs k} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n Q_{abs k} &= 0 \end{aligned} \quad (162)$$

Esto es, la suma algebraica de la potencia activa absorbida por todos los elementos que forman parte de un circuito es cero; y la suma algebraica de todas las potencias reactivas absorbidas por todos los elementos de un circuito es también cero.

Teniendo en cuenta que:

$$\underline{S}_{absk} = P_{absk} + jQ_{absk} \quad (163)$$

El teorema de Boucherot se puede expresar también:

$$\sum_{k=1}^n \underline{S}_{absk} = 0 \quad (164)$$

O lo que es lo mismo, la suma algebraica de las potencias complejas absorbidas por todos los elementos de un circuito es siempre igual a cero.

Hay que hacer notar que el teorema de Boucherot **no impone** que la suma de las potencias aparentes absorbidas por todos los elementos de un circuito sea siempre igual a cero.

### 10.6.-Factor de potencia

De todas las potencias que se han definido, la única que tiene sentido físico es la potencia activa, ya que es la única que indica cuál es la energía consumida.

La potencia activa es, en general, menor que la potencia aparente.

Se llama **factor de potencia** ( $k$ ) a la relación:

$$k = \frac{P}{S} \quad (165)$$

donde  $P$  es la potencia activa y  $S$  la potencia aparente.

A partir de las expresiones de las potencias vistas para circuitos en régimen estacionario sinusoidal, el factor de potencia queda:

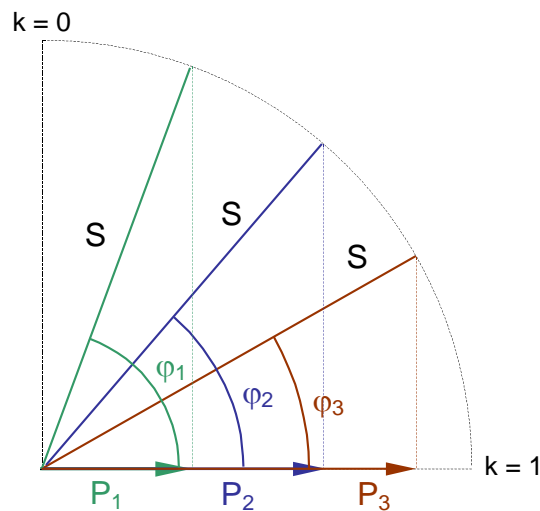
$$k = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (166)$$

Recordando el triángulo de potencias, puede deducirse que, en el caso de dipolos pasivos, el factor de potencia coincide con el coseno del argumento de su impedancia equivalente.

En un generador, la tensión es una magnitud esencialmente constante, mientras que la intensidad máxima que puede circular por sus conductores sin que se produzcan calentamientos inadmisibles viene determinada por la sección de estos. De esta manera, la capacidad de un generador viene determinada por su potencia aparente.

$$S = UI \quad (167)$$

Pero para la misma potencia aparente, un generador puede suministrar infinitas potencias activas distintas, ya que esta potencia activa vendrá determinada por el factor de potencia de trabajo que imponga el resto del sistema al generador. Gráficamente se puede expresar:



**Figura 54**

#### 10.6.1.- Importancia del factor de potencia

Históricamente, la introducción de los diversos tipos de potencia que se han visto, así como el concepto del factor de potencia, se debe a las compañías eléctricas que necesitan transportar grandes cantidades de energía de un lugar a otro. Resulta evidente que la eficacia con la que se realice este transporte influye directamente sobre el precio de la energía eléctrica. Desde el punto de vista del usuario final, parece lógico que aquel usuario que conecta a la red una carga que da lugar a un bajo rendimiento de la red de transporte pague mayor precio por cada kWh de energía activa que consume. De la misma manera, parece lógico que se penalice al consumidor que conecte una carga que requiera una instalación más costosa para el transporte de la energía activa que consume.

Como se ha dicho, la potencia activa representa realmente la potencia media que se consume, mientras que la potencia reactiva representa una oscilación de energía entre el generador y el receptor, y su función consiste en suministrar energía para la generación de los campos eléctricos y magnéticos en el receptor y transferir esta energía de vuelta a la fuente cuando se anulan dichos campos. Como ejemplo cabe citar el caso de un motor eléctrico. La potencia activa que absorbe un motor está relacionada con la potencia mecánica que proporciona en su eje, pero a su vez requiere una potencia reactiva para mantener los campos magnéticos en los que se basa su funcionamiento. Esta potencia reactiva precisa la circulación de una mayor corriente por la red, lo que provoca unas mayores pérdidas en el transporte, ya que se disipará una potencia en las líneas igual a  $R \cdot I^2$ , con la consiguiente disminución del rendimiento de la instalación.



Para ilustrar la importancia del factor de potencia en el rendimiento de una instalación de suministro de energía eléctrica, se va a considerar un ejemplo. Supóngase un generador de 10 kVA de potencia aparente que alimenta a una tensión de 100 V a un receptor que absorbe una potencia activa de 1 kW. En el caso a) se supondrá que el receptor consume esa potencia activa con un  $\cos \varphi = 1$  y en el caso b) se supondrá que el receptor consume esa potencia activa, pero con un  $\cos \varphi = 0,1$ .

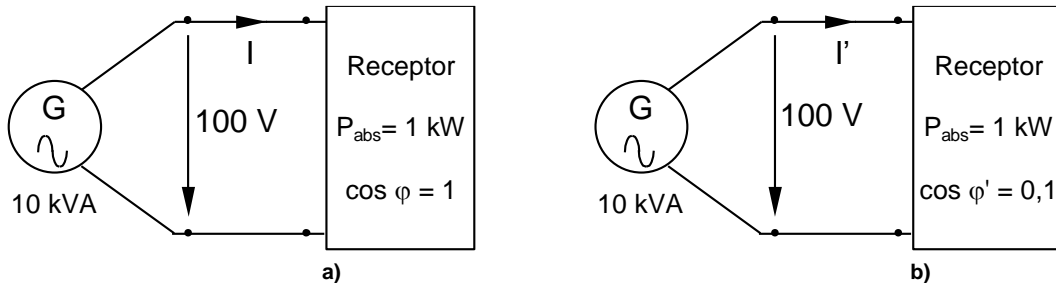


Figura 55

Si la potencia aparente del generador es de 10 kVA y su tensión nominal es de 100 V, quiere decir que la corriente máxima que puede circular por sus devanados es:

$$S_{gen} = U \cdot I_{gen} \Rightarrow I_{gen} = \frac{10000 \text{ VA}}{100 \text{ V}} = 100 \text{ A} \quad (168)$$

Caso a): El receptor absorbe 1 kW de potencia activa con un  $\cos \varphi = 1$ , esto es, la intensidad, I, que llega al receptor ha de ser:

$$P_{abs} = U \cdot I \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{P_{abs}}{U \cos \varphi} = \frac{1000 \text{ W}}{100 \text{ V} \cdot 1} = 10 \text{ A} \quad (169)$$

Es decir, el receptor va a demandar del generador 10 A para consumir la potencia activa de 1 kW.

Caso b): Ahora el receptor absorbe también 1 kW de potencia activa, pero lo hace con un  $\cos \varphi' = 0,1$ , esto es, la intensidad, I', que llega al receptor en este caso ha de ser:

$$P_{abs} = U \cdot I' \cos \varphi' \Rightarrow I' = \frac{P_{abs}}{U \cos \varphi'} = \frac{1000 \text{ W}}{100 \text{ V} \cdot 0,1} = 100 \text{ A} \quad (170)$$

Es decir, el receptor va a demandar del generador 100 A para consumir la potencia activa de 1 kW.

En ambos casos el receptor consume la misma potencia activa, que es la única de la que se extrae trabajo útil, pero en las condiciones del caso a) se precisa que por la línea circulen 10 A, mientras que en las condiciones del caso b) se requiere la circulación de 100 A. Este aumento de la intensidad requerida tiene una traducción inmediata en pérdidas en el transporte, ya que en las líneas se disipará una potencia que será proporcional al cuadrado de la intensidad que circula por ellas.

Por otra parte, en el caso a), la demanda por parte del receptor de 10 A permite disponer de 90 A para dar suministro a otros receptores hasta alcanzar la intensidad máxima en el generador. En el caso b), el receptor exige que todo el generador esté dedicado en exclusiva a su suministro, ya que demanda 100 A, la intensidad máxima de dicho generador. Esto significa que, para el mismo consumo de potencia activa, en el segundo caso la instalación está mucho peor aprovechada.

En los casos anteriores se ha supuesto que la tensión en bornes de la carga era igual a la tensión en bornes del generador, es decir, no se producen caídas de tensión en la línea que une la generación y la carga. Esto en realidad no es cierto, y dado que la línea se puede representar por una impedancia equivalente, es fácil ver que la caída de tensión que se produce en ella será mayor cuanto mayor sea la corriente que transporte. Por lo tanto, un mal factor de potencia de la carga, es decir, el consumo apreciable potencia reactiva por parte de la carga, conlleva una mayor caída de tensión en las líneas.

El consumo de potencia reactiva por parte de una carga lleva asociado directamente una disipación de potencia activa. Supóngase una carga alimentada por una línea de resistencia  $r$ . La pérdida de potencia en dicha línea vale:

$$\Delta P = r \cdot I^2 = r \frac{S^2}{U^2} \quad (171)$$

donde  $S$  es la potencia aparente que consume la carga y  $U$  la tensión en sus bornes.

Dado que:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (172)$$

la pérdida de potencia en la línea se puede expresar:

$$\Delta P = r \frac{S^2}{U^2} = r \left( \frac{P^2}{U^2} + \frac{Q^2}{U^2} \right) = r \frac{P^2}{U^2} + r \frac{Q^2}{U^2} = \Delta P_P + \Delta P_Q \quad (173)$$

Esto es, el consumo de potencia reactiva por parte de la carga tiene una traducción directa en disipación de potencia activa en la línea que la alimenta.

### 10.7.-Compensación del factor de potencia

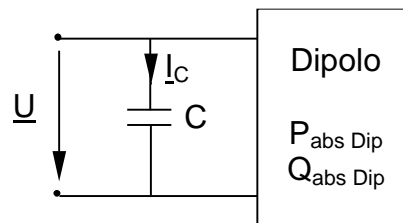
A la vista de los efectos negativos que provoca un factor de potencia bajo en las cargas, las compañías eléctricas estimulan el consumo de potencia activa con factores de potencia altos. Esto lo hacen mediante el establecimiento de unas bonificaciones sobre el consumo en el caso de factores de potencia altos y una penalización en el caso de un mal factor de potencia.

Generalmente los consumidores requieren de la red energía reactiva de tipo inductivo, ya que lo habitual en la industria y en el consumo doméstico es el uso de máquinas eléctricas que requieren de este tipo de energía para establecer los campos magnéticos en los que basan su funcionamiento.

Así pues, el factor de potencia de estas cargas es inherente a ellas mismas, y su modificación como tal sólo es posible mediante un mejor diseño y utilización.

Sin embargo, si es posible que la red vea un mejor factor de potencia en conjunto. Esto se consigue conectando junto con las cargas inductivas otras cargas que suministren potencia reactiva. Las cargas que suministran potencia reactiva sin consumir potencia activa son los condensadores. De esta manera, si la potencia activa permanece constante y se disminuye la potencia reactiva que absorbe el conjunto de cargas de la red, el factor de potencia global disminuirá.

La manera de conectar estos condensadores para compensar el factor de potencia de una instalación es colocarlos en paralelo con el dipolo consumidor de potencia reactiva, tal y como se indica en la figura siguiente.



**Figura 56**

La potencia activa que absorbe el conjunto será la misma que la que absorbe el dipolo, ya que los condensadores no absorben potencia activa.

$$P_{abs conjunto} = P_{abs Dip} \quad (174)$$

En cuanto a la potencia reactiva, se ha visto anteriormente que la potencia reactiva que cede un condensador es:

$$Q_{ced cond} = -Q_{abs cond} = -\left(-\frac{1}{\omega C} I_C^2\right) = -(-\omega C U^2) \quad (175)$$

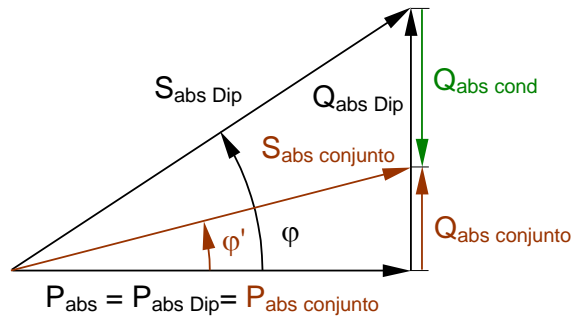
por lo que la potencia reactiva que absorbe de la red el conjunto dipolo+condensador vale:

$$Q_{abs conjunto} = Q_{abs Dip} - Q_{ced cond} \quad (176)$$

Esto es:

$$Q_{ced cond} = Q_{abs conjunto} + Q_{abs Dip} \quad (177)$$

Fijándose en el triángulo de potencias de la figura siguiente:



**Figura 57**

$$\begin{aligned} Q_{abs\ Dip} &= P_{abs\ Dip} \operatorname{tg} \varphi = P_{abs} \operatorname{tg} \varphi \\ Q_{abs\ conjunto} &= P_{abs\ conjunto} \operatorname{tg} \varphi' = P_{abs} \operatorname{tg} \varphi' \end{aligned} \quad (178)$$

Por lo tanto:

$$Q_{ced\ cond} = P_{abs} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (179)$$

Esto es:

$$\omega C U^2 = P_{abs} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (180)$$

De donde se deduce que la capacidad del condensador que consigue pasar de un ángulo  $\varphi$  a un ángulo  $\varphi'$  vale:

$$C = \frac{P_{abs} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega U^2} \quad (181)$$

La conexión de un banco de condensadores para corregir el factor de potencia conlleva una disminución en el valor de la intensidad que circula por las líneas, tal y como se justifica a continuación.

El condensador óptimo será aquel que ceda tanta potencia reactiva como la que absorbe el dipolo al cual se conecta en paralelo (el conjunto dipolo+condensador no cede ni absorbe potencia reactiva, es decir, su factor de potencia es la unidad, esto es,  $\varphi'_{conjunto} = 0$ ). La capacidad de este condensador óptimo se calcula:

$$C_{opt} = \frac{P_{abs} \operatorname{tg} \varphi}{\omega U^2} \quad (182)$$

Se toma como origen de fases la tensión en bornes del dipolo, esto es:

$$\underline{U} = U|0^\circ \quad (183)$$

La corriente que circula por la batería de condensadores vale:

$$\underline{I}_{cond} = \underline{Y}_{cond} \cdot \underline{U} = j B_{cond} \cdot \underline{U} = j \omega C \cdot \underline{U} = \omega C |90^\circ \cdot U |0^\circ = \omega C U |90^\circ \quad (184)$$

El diagrama fasorial de tensiones e intensidades es:

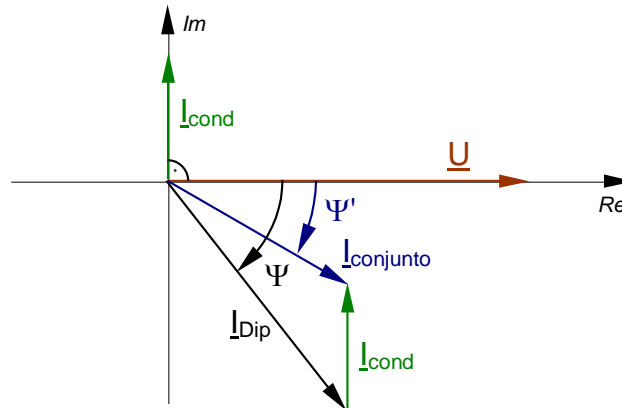


Figura 58

En él puede verse que el módulo del fasor  $\underline{I}_{conjunto}$  es menor que el módulo del fasor  $\underline{I}_{dip}$ , es decir, la intensidad que se absorbe de la red cuando se colocan condensadores para compensar el factor de potencia es menor que la intensidad que demanda el dipolo.

### 11.- TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA (ACTIVA)

En algunas aplicaciones interesa que la potencia de la señal eléctrica que llega a un determinado elemento de un sistema sea máxima (la antena en un sistema de telecomunicaciones, el altavoz en un equipo de sonido, etc.). En esos casos, es muy útil saber determinar el valor de la impedancia que, conectada en bornes de un dipolo activo, sea capaz de absorber la máxima potencia activa de ese dipolo activo. El teorema de la máxima transferencia de potencia permite determinar el valor de esta impedancia.

**Enunciado 1:** Sea un dipolo activo caracterizado por su equivalente Thévenin.

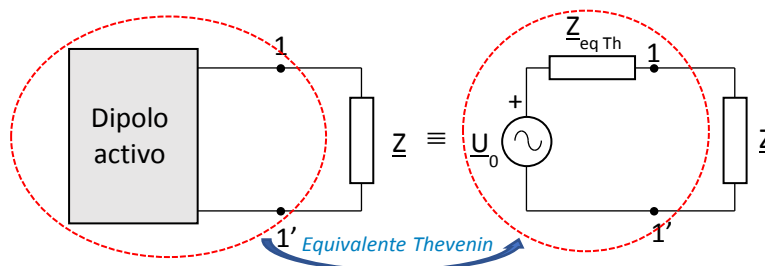


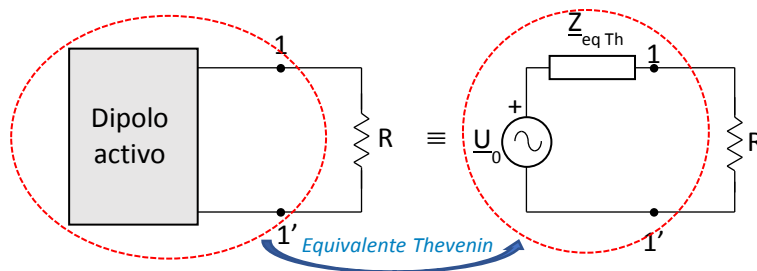
Figura 59

De las infinitas impedancias que se pueden conectar en bornes del dipolo activo, la que absorbe la máxima potencia es aquella de valor:

$$\underline{Z}_{\text{máx pot}} = \underline{Z}_{\text{eq Th}}^* \quad (185)$$

Es decir, la impedancia que absorbe la máxima potencia es aquella que tiene como valor el complejo conjugado de la impedancia del equivalente Thévenin del dipolo activo al cual se conecta.

**Enunciado 2:** Sea un dipolo activo caracterizado por su equivalente Thévenin.



**Figura 60**

De las infinitas resistencias que se pueden conectar en bornes del dipolo activo, la que absorbe la máxima potencia es aquella de valor:

$$R_{\text{máx pot}} = Z_{\text{eq Th}} \quad (186)$$

Es decir, la resistencia que absorbe la máxima potencia es aquella que tiene como valor el módulo de la impedancia del equivalente Thévenin del dipolo activo al cual se conecta.

La diferencia entre los dos enunciados es que en el primero se deja elegir los valores de la parte real y de la parte imaginaria de la impedancia que se conecta en bornes del dipolo activo, mientras en el segundo caso, la parte imaginaria de la impedancia a conectar en bornes del dipolo viene impuesta y ha de ser igual a cero, esto es, sólo se puede elegir el valor de la parte real de la impedancia que se conecta al dipolo.

## **12.- BIBLIOGRAFÍA**

- Parra Prieto, V. M. y otros. *Teoría de Circuitos I y II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1990.
- Fraile Mora, J. *Electromagnetismo y circuitos eléctricos*. McGraw Hill, 2002.
- Bayod Rújula, A.A. *Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal*. Prensas Universitarias de Zaragoza, Colección Textos Docentes nº 107, 2005.
- Bayod Rújula, A.; Bernal Agustín, J.L.; Domínguez Navarro J.A.; Llombart Estopiñán, A.; García García, M.A. y Yusta Loyo, J.M. *Análisis de circuitos eléctricos I*. Prensas Universitarias de Zaragoza, Colección Textos Docentes nº 58, 1998.
- Bayod Rújula, A. (Coordinador). *Fundamentos de sistemas eléctricos*. Capítulo 2, García García, M.A: *Circuitos monofásicos en régimen estacionario sinusoidal*. Prensas Universitarias de Zaragoza, Colección Textos docentes nº 147. Serie Energías Renovables, 2008.
- Alexander, C. *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. McGraw Hill, 2001.
- Nilsson, J.W. *Electric Circuits*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

