

Tema 6

Análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal



Tema 6.- Análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal.

6.1.- Introducción.

6.2.- Generación de una tensión sinusoidal.

6.3.- Formas de onda sinusoidales. Propiedades.

6.3.1.- Formas de onda sinusoidales.

6.3.2.- Valores asociados a formas de onda sinusoidales.

6.4.- Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales.

6.5.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal (RES).

6.5.1.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal por el método de los coeficientes indeterminados.

6.5.2.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal por el método simbólico.

6.6.- Impedancias y Admitancias complejas. Asociación de impedancias complejas.

6.6.1.- Impedancias y admitancias complejas.

6.6.2.- Asociación de impedancias complejas.

continúa ...

- 6.7.- Elementos pasivos en régimen estacionario sinusoidal.
 - 6.7.1.- Resistencia.
 - 6.7.2.- Bobina.
 - 6.7.3.- Condensador.
 - 6.7.4.- Bobinas acopladas magnéticamente.
 - 6.7.5.- Transformador ideal.
- 6.8.- Leyes de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
 - 6.8.1.- Primera ley de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
 - 6.8.2.- Segunda ley de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
- 6.9.- Métodos de análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal.
- 6.10.- Teoremas fundamentales en régimen estacionario sinusoidal.
 - 6.10.1.- Teorema de superposición.
 - 6.10.2.- Teorema de Thévenin.
 - 6.10.3.- Teorema de Norton.
- 6.11.- Estudio de circuitos básicos en régimen estacionario sinusoidal.
 - 6.11.1.- Circuito RC.
 - 6.11.2.- Circuito RL.
 - 6.11.3.- Circuito RLC.
 - 6.11.4.- Resumen.

6.1. Introducción

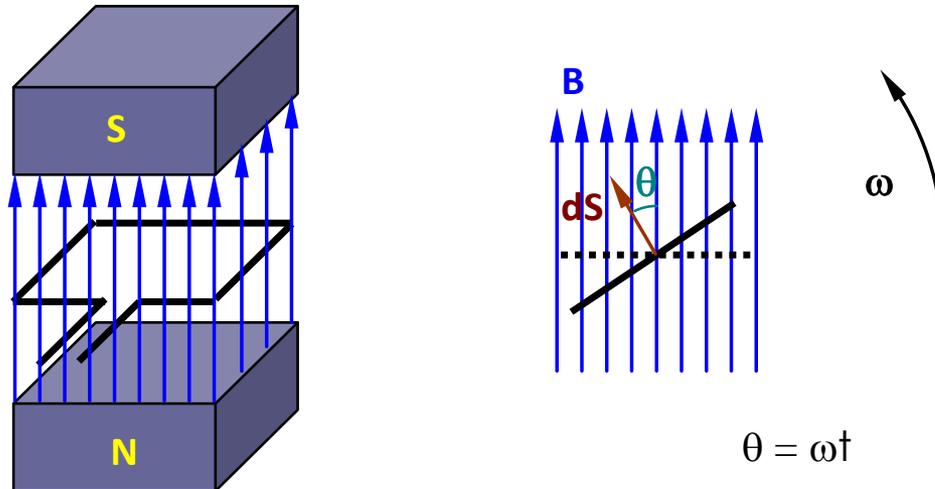
6.1. Introducción

- *Generación, transporte, distribución y consumo de la energía eléctrica se lleva a cabo principalmente en forma sinusoidal.*
- *Inicialmente, el principal uso de la electricidad era la iluminación. A medida que la energía eléctrica cobró importancia como fuente de energía, comenzó la disyuntiva entre corriente alterna y corriente continua, adoptándose finalmente como mayoritario el uso de la corriente alterna.*
- *La principal ventaja de la corriente alterna sobre la continua es la eficiencia en el transporte de la energía eléctrica.*
- *Se van a ver los fundamentos del análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal, utilizando para ello el método simbólico desarrollado por Steinmetz. Para el análisis de dichos circuitos, se utilizarán los números complejos.*

6.2. Generación de una tensión sinusoidal

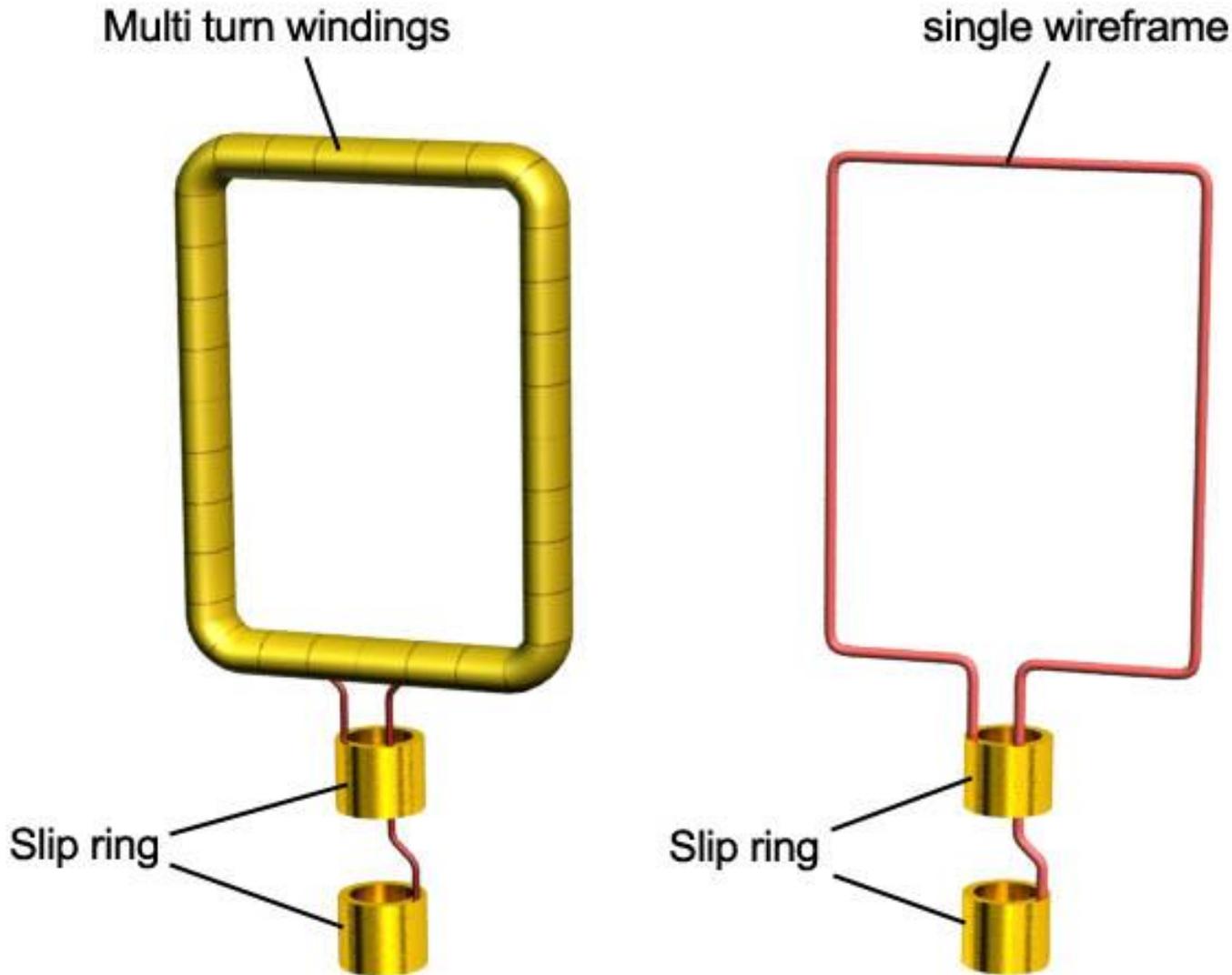
6.2. Generación de una tensión sinusoidal

- Bobina rectangular de N espiras situada en un campo magnético uniforme.



- Flujo que atraviesa una espira: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot A \cdot \cos \theta$
- Flujo que atraviesa las N espiras de la bobina: $\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta$

Devanado multivuelta y espira simple



6.2. Generación de una tensión sinusoidal

- Si la bobina gira con una velocidad angular ω , el flujo que la atraviesa variará con el tiempo:

$$\Phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \omega t$$

- Por la “Ley de inducción de Faraday”, se inducirá una fuerza electromotriz en bornes de la bobina de valor:

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t = N \cdot \Phi_m \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t$$

- De forma más general, se puede escribir:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

donde U_0 es el valor máximo que alcanza la tensión generada en bornes de la bobina.

6.3. Formas de onda sinusoidales. Propiedades

6.3.1. Formas de onda sinusoidales

- Una forma de onda es sinusoidal cuando se puede formular mediante la expresión:

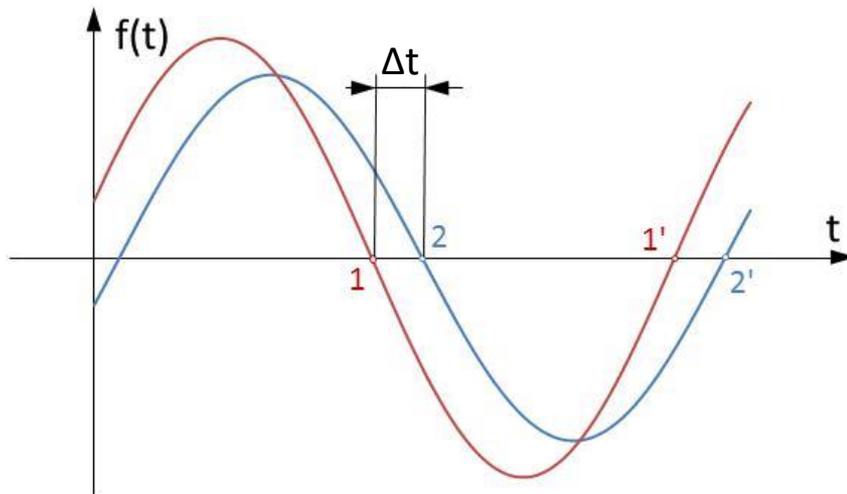
$$f(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{donde: } \left\{ \begin{array}{l} F_0 : \text{Amplitud} \\ \omega t + \varphi : \text{Fase de la onda} \\ \varphi : \text{Fase inicial} \\ \omega : \text{Pulsación} \end{array} \right.$$

- Para toda forma de onda sinusoidal se verifica que:

$$\omega \cdot T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f \quad \text{donde: } \left\{ \begin{array}{l} T : \text{periodo (s)} \\ f : \text{frecuencia (Hz)} \end{array} \right.$$

6.3.2. Valores asociados a formas de onda sinusoidales

- *Desfase entre dos ondas:*



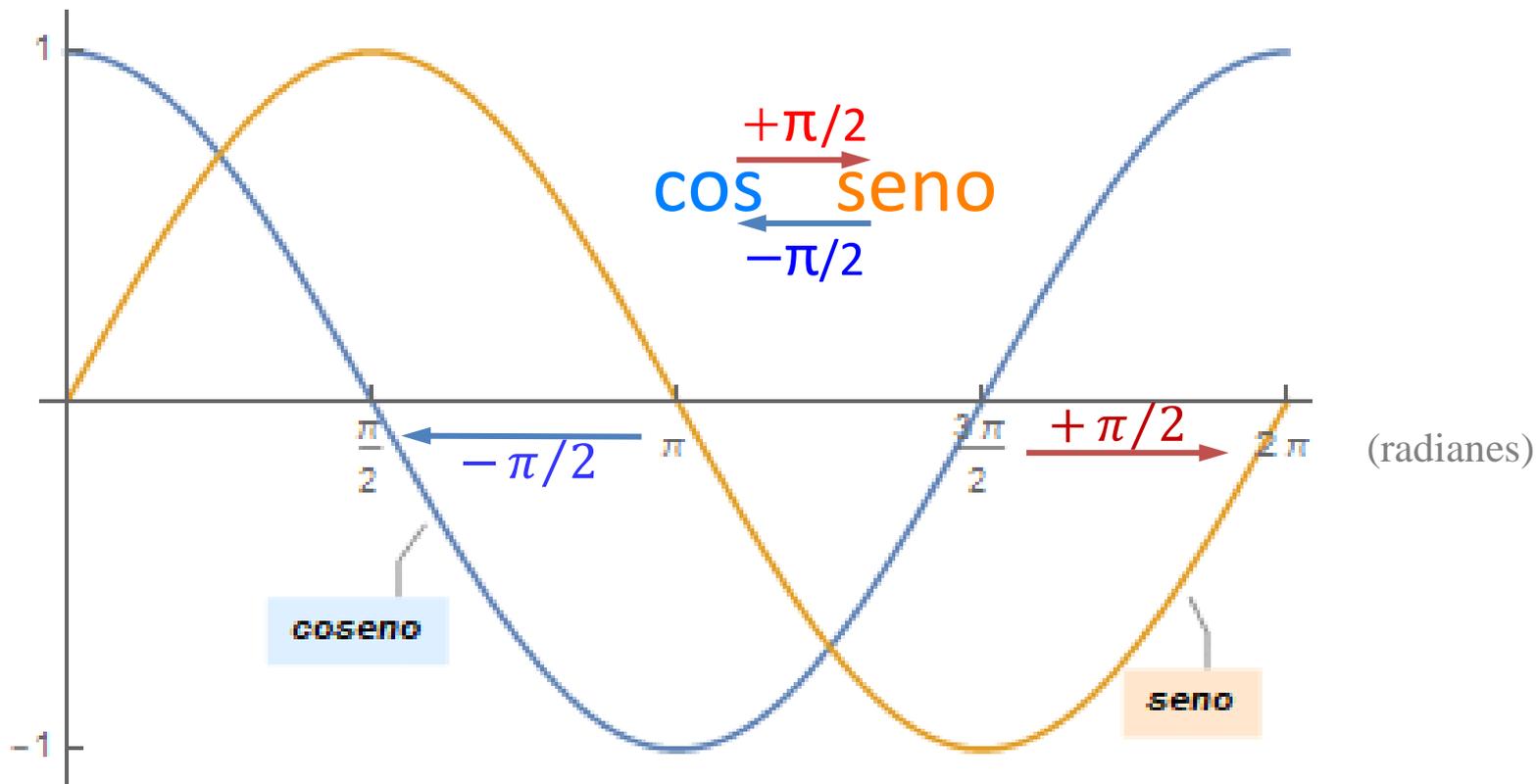
El desfase suele expresarse en grados:

$$\Delta\varphi = 360^\circ \frac{\Delta t}{T}$$

- Para medir el desfase entre dos ondas, se comparan estados homólogos de ambas ondas que estén separados por menos de un semiperiodo (1 y 2 ó 1' y 2', pero no 1 y 2', por ejemplo).
- Adelanta lo que primero sucede y, teniendo en cuenta que el eje horizontal es un eje de tiempo creciente, el punto 1 sucede antes que el punto 2. Por lo tanto, en el ejemplo, la onda 1 adelanta a la onda 2.

6.3.2. Seno \Leftrightarrow coseno

- Toda forma de onda sinusoidal se puede expresar en forma seno o coseno, con sólo cambiar su fase inicial:



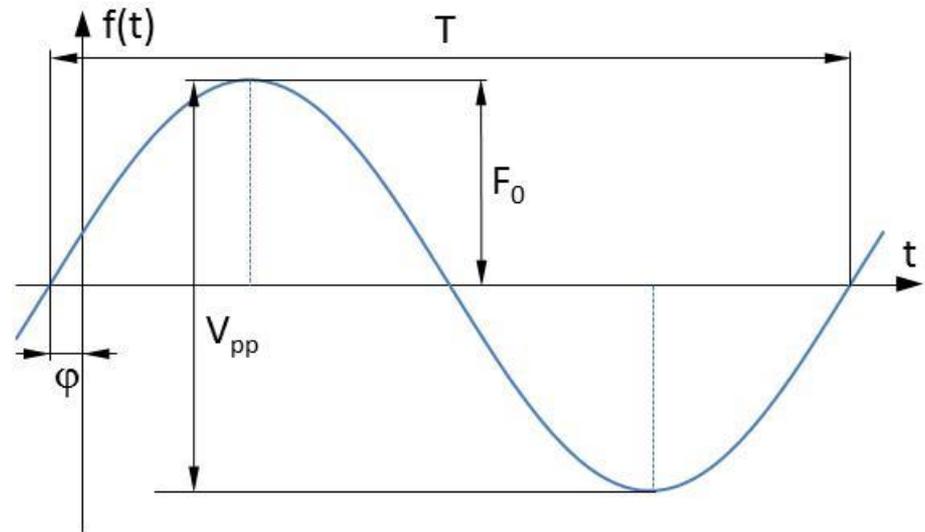
$$f(t) = F_0 \text{seno}(\omega t + \varphi) = F_0 \text{coseno}(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

$$f(t) = F_0 \text{coseno}(\omega t + \varphi) = F_0 \text{seno}(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

6.3.2. Valores asociados a formas de onda sinusoidales

- **Valor de pico:** Distancia vertical entre el cero y el valor máximo (o el mínimo) de la forma de onda. **En ondas sinusoidales coincide con la amplitud (F_0).**
- **Valor de pico a pico:** Distancia vertical entre el valor máximo y el valor mínimo de una forma de onda. **En ondas sinusoidales, dos veces la amplitud ($2F_0$).**
- **Valor medio:** Promedio integral en un período.

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{F_0}{T} \int_0^T \text{sen } \omega t dt = 0$$



- **Ciclo:** Porción de onda comprendida en un intervalo igual a un período.
- **Frecuencia:** N^o de ciclos que tienen lugar en una unidad de tiempo.

$$T \cdot f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

6.3.2. Valores asociados a ondas sinusoidales

- **Valor eficaz:** Es el resultado de:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{Sólo en el caso de formas de onda sinusoidales})$$

- El valor eficaz de cualquier forma de onda siempre es distinto de cero.
- **Interpretación física del valor eficaz:**
 - El valor eficaz de una tensión alterna es el valor de la tensión continua que, aplicada a una resistencia, produce la misma disipación de calor que el producido por dicha tensión alterna aplicada a esa misma resistencia.
 - El valor eficaz de una intensidad alterna es el valor de la intensidad continua que, circulando por una resistencia, produce la misma disipación de calor que el producido por dicha intensidad alterna circulando por esa misma resistencia.

6.3.3. *Propiedades de las ondas sinusoidales*

- *Las ondas sinusoidales cumplen las siguientes propiedades matemáticas:*
 - Al sumar o restar varias ondas sinusoidales de la misma frecuencia se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia.
 - Al derivar o integrar cualquier número de veces una onda sinusoidal se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia.
 - El producto de dos formas de onda sinusoidales, es otra forma de onda sinusoidal (aunque no de la misma frecuencia).

6.3.3. *Propiedades de las formas de onda sinusoidales*

El producto de dos formas de onda sinusoidales, es otra forma de onda sinusoidal (aunque no de la misma frecuencia).

- *Veremos esto con más detalle en el tema 7.*

6.3.3. Propiedades de las formas de onda sinusoidales

Al derivar o integrar cualquier número de veces una onda sinusoidal se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia.

$$f(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) = \omega F_0 \text{cos}(\omega t + \varphi)$$

$$D f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \omega F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

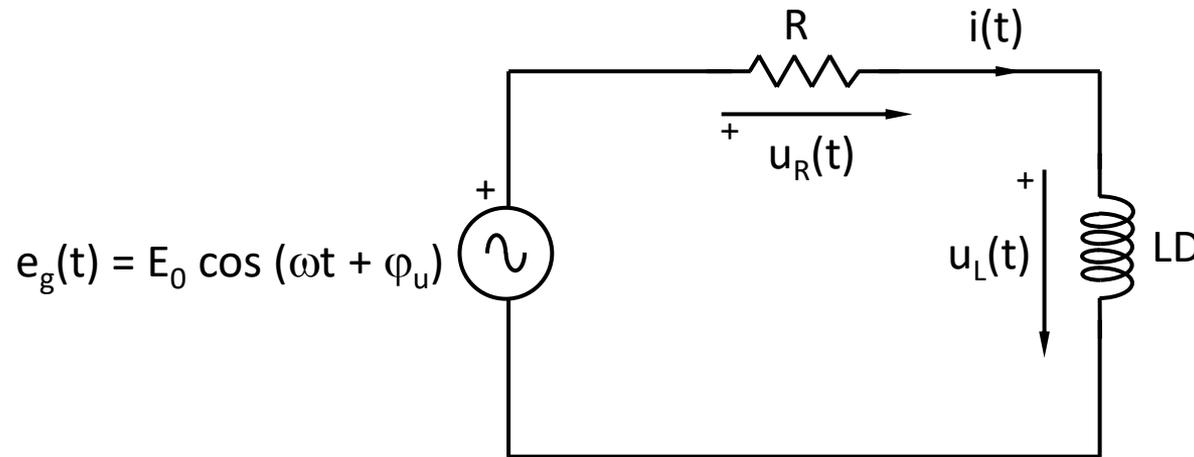
$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t F_0 \text{sen}(\omega \tau + \varphi) d\tau = \frac{F_0}{\omega} [\text{cos}(\varphi) - \text{cos}(\omega t + \varphi)]$$

$$\frac{f(t)}{D} = \int_0^t f(\tau) d\tau = \text{Cte} + \frac{F_0}{\omega} \text{sen}(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- Sea un circuito:



- Aplicando la LKT al circuito: $e_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$
- Y a partir de las ecuaciones de definición de los elementos del circuito:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad u_L(t) = LD \cdot i(t)$$

6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- *La ecuación diferencial que rige el comportamiento del circuito es:*

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = e_g(t)$$

- *Y dado que la fuente de tensión es sinusoidal:*

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

- *La solución de esta ecuación diferencial es la intensidad que circula por el circuito (es decir, su respuesta).*

6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- *¿Cómo se resuelve la ecuación diferencial?*
 - Solución completa de la ecuación diferencial:

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t)$$

- Ecuación diferencial homogénea:

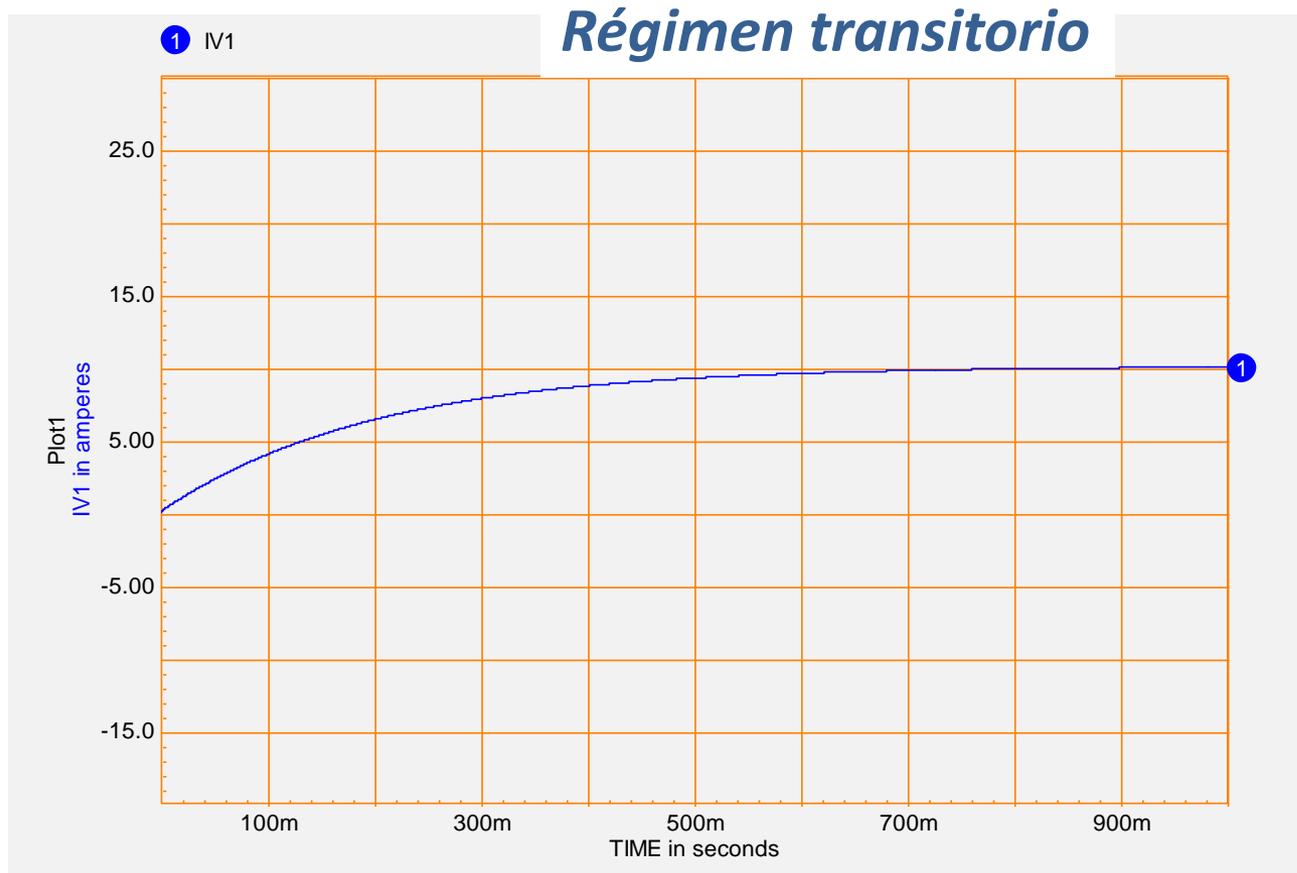
$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Solución}} \quad i_h(t) = C_1 e^{-t \frac{R}{L}}$$

(C_1 es una constante)

- Es el *modo natural* del circuito, constituye su *régimen transitorio*.
- Se amortigua con el tiempo.
- No depende de la forma de onda de la fuente de excitación del circuito.

6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- Solución de la ecuación diferencial homogénea:



6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

– Solución particular:

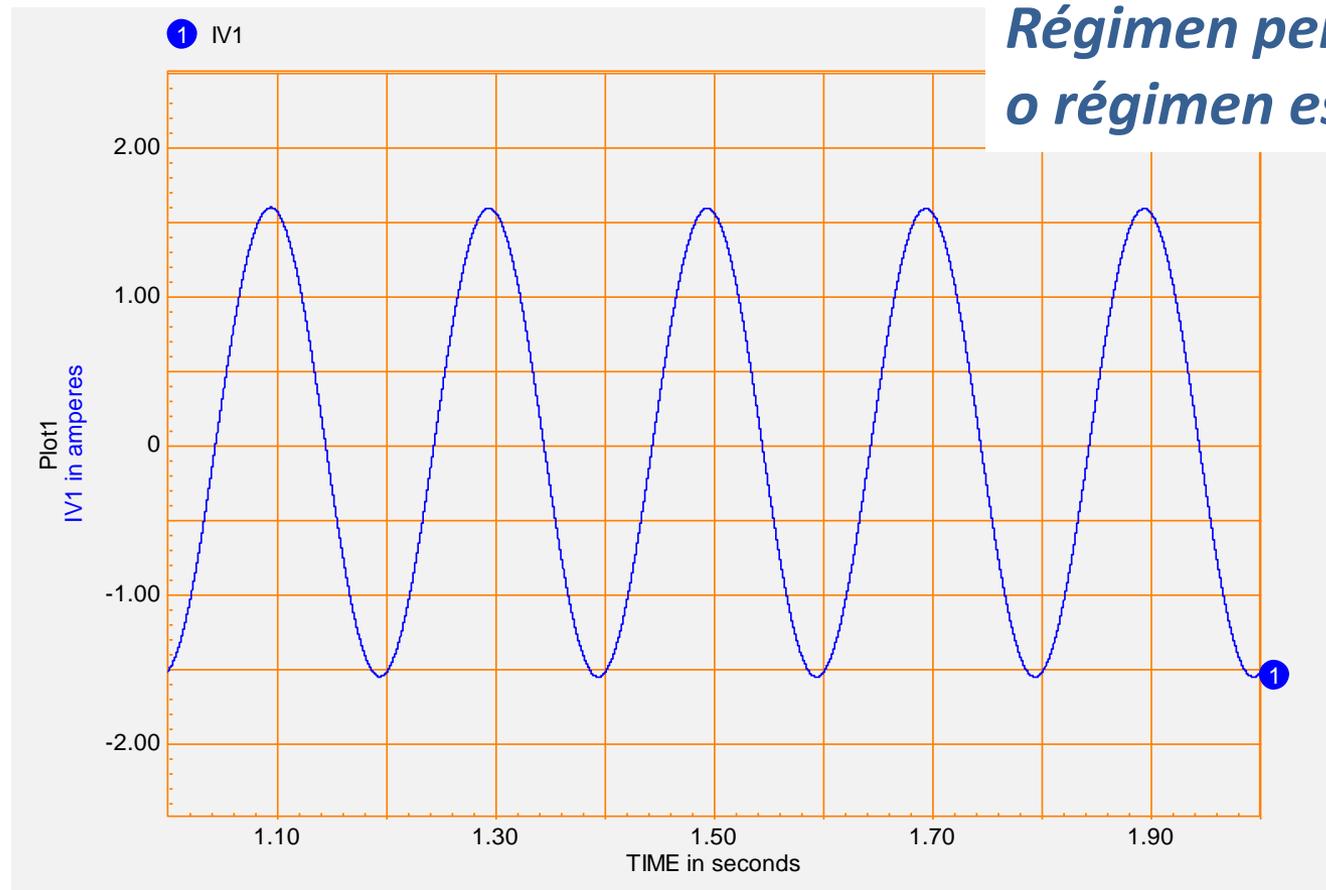
- Se prueba una solución que tenga la misma forma que la excitación del circuito:

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Esta solución constituye el *régimen permanente* o *régimen estacionario* del circuito, y es lo que estamos buscando determinar.
- Queda totalmente determinada calculando el valor de la amplitud I_0 y el valor del ángulo φ_i .

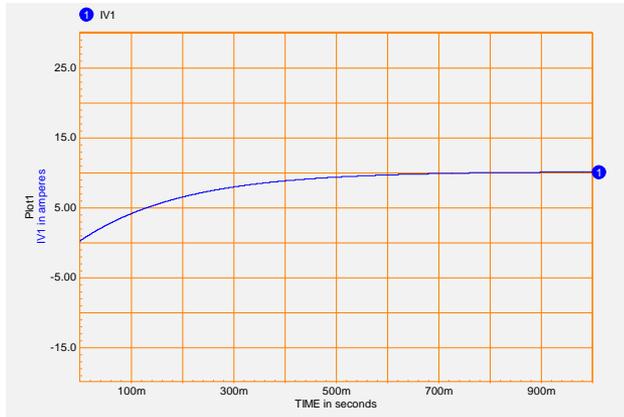
6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- *Solución particular de la ecuación diferencial:*

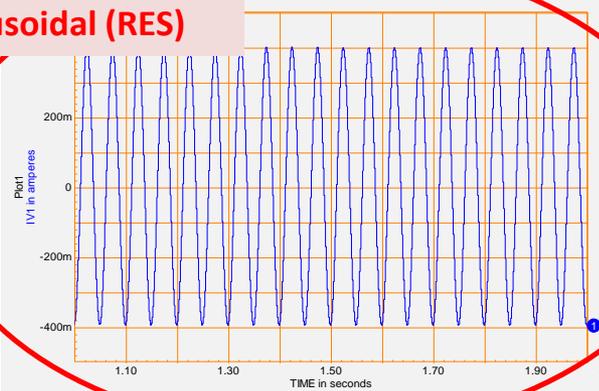


6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

Régimen transitorio



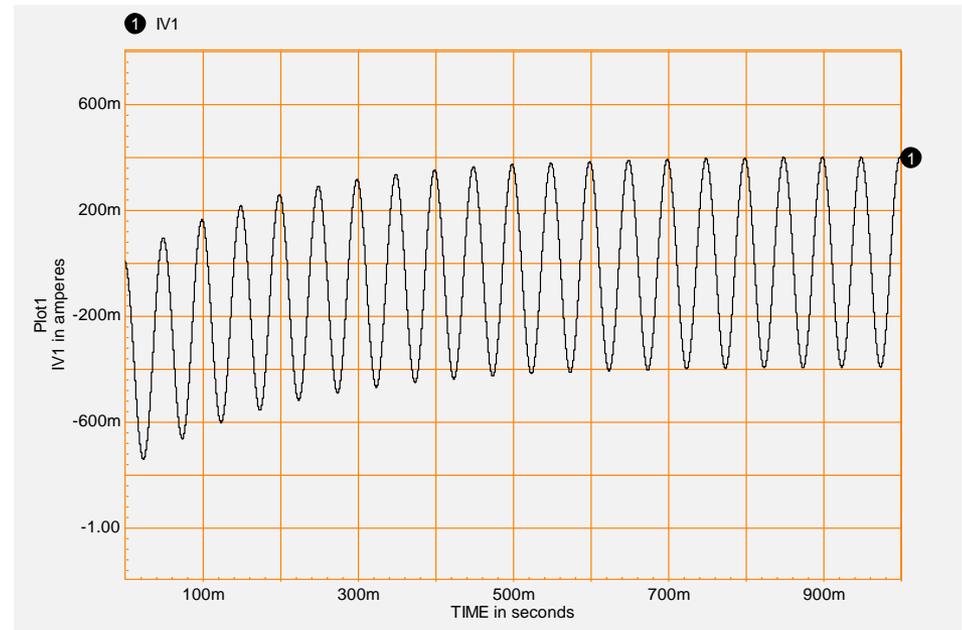
Régimen Estacionario Sinusoidal (RES)



+

=

Solución completa de la ecuación diferencial



Este tema se centra en esta respuesta

6.5. Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal

6.5. *Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal*

- *El régimen estacionario de un circuito viene dado por la solución particular de la ecuación diferencial que rige el comportamiento de dicho circuito.*
- *Formas de determinar los parámetros de la solución particular:*
 - Método de los coeficientes indeterminados o cualquier otro que permita la resolución de la ecuación diferencial.
 - ***Método simbólico.***

6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

– *Método de los coeficientes indeterminados:*

- Se considera una solución particular de la ecuación con la misma forma que el término independiente, donde I_0 y φ_i son los coeficientes a determinar.

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Esta solución ha de satisfacer la ecuación diferencial:

$$-LI_0\omega \text{sen}(\omega t + \varphi_i) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

- Desarrollando las sumas de senos y cosenos se llega a:

$$\begin{aligned} & -LI_0\omega \text{sen}\omega t \cos\varphi_i - LI_0\omega \cos\omega t \text{sen}\varphi_i + RI_0 \cos\omega t \cos\varphi_i - RI_0 \text{sen}\omega t \text{sen}\varphi_i = \\ & = E_0 \cos\omega t \cos\varphi_u - E_0 \text{sen}\omega t \text{sen}\varphi_u \end{aligned}$$

6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

- Agrupando términos e igualando coeficientes, se obtiene:

$$Rl_0 \cos \varphi_i - \omega L l_0 \operatorname{sen} \varphi_i = E_0 \cos \varphi_u$$

$$-Rl_0 \operatorname{sen} \varphi_i - \omega L l_0 \cos \varphi_i = E_0 \operatorname{sen} \varphi_u$$

- Ecuaciones que constituyen un sistema de ecuaciones que permite calcular las incógnitas l_0 y φ_i .
- Elevando al cuadrado los dos miembros de ambas ecuaciones:

$$R^2 l_0^2 \cos^2 \varphi_i + \omega^2 L^2 l_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i - 2R\omega L l_0^2 \cos \varphi_i \operatorname{sen} \varphi_i = E_0^2 \cos^2 \varphi_u$$

$$R^2 l_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i + \omega^2 L^2 l_0^2 \cos^2 \varphi_i + 2R\omega L l_0^2 \cos \varphi_i \operatorname{sen} \varphi_i = E_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_u$$

6.5.1 Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados

- Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$R^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2 = E_0^2$$

- y despejando, se obtiene:

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

- Si dividimos ambas ecuaciones:

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{-R \operatorname{sen} \varphi_i + \omega L \operatorname{cos} \varphi_i}{R \operatorname{cos} \varphi_i + \omega L \operatorname{sen} \varphi_i}$$

- que también puede escribirse: $\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i + \frac{\omega L}{R}}{1 - \frac{\omega L}{R} \operatorname{tg} \varphi_i}$

6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

- Si se denota por $\text{tg } \varphi$ a la expresión:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

- se obtiene que:

$$\text{tg } \varphi_u = \text{tg}(\varphi_i + \varphi)$$

- y, por lo tanto:

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

- Esto es, la solución particular de la ecuación diferencial queda:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi)$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

– Método simbólico:

- Consiste en la resolución analítica de circuitos en régimen estacionario sinusoidal mediante la aplicación del cálculo complejo a través del *método vectorial complejo*.
- El método se basa en la fórmula de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad \text{siendo } j = \sqrt{-1}$$

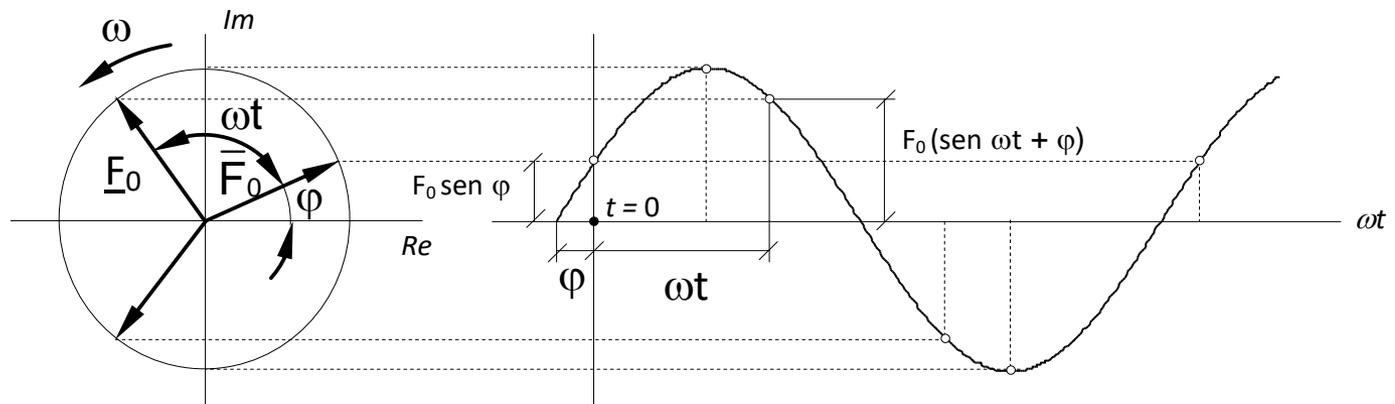
- Esta ecuación representa, en el plano complejo, un vector unitario que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, con una velocidad angular de ω radianes/segundo.

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

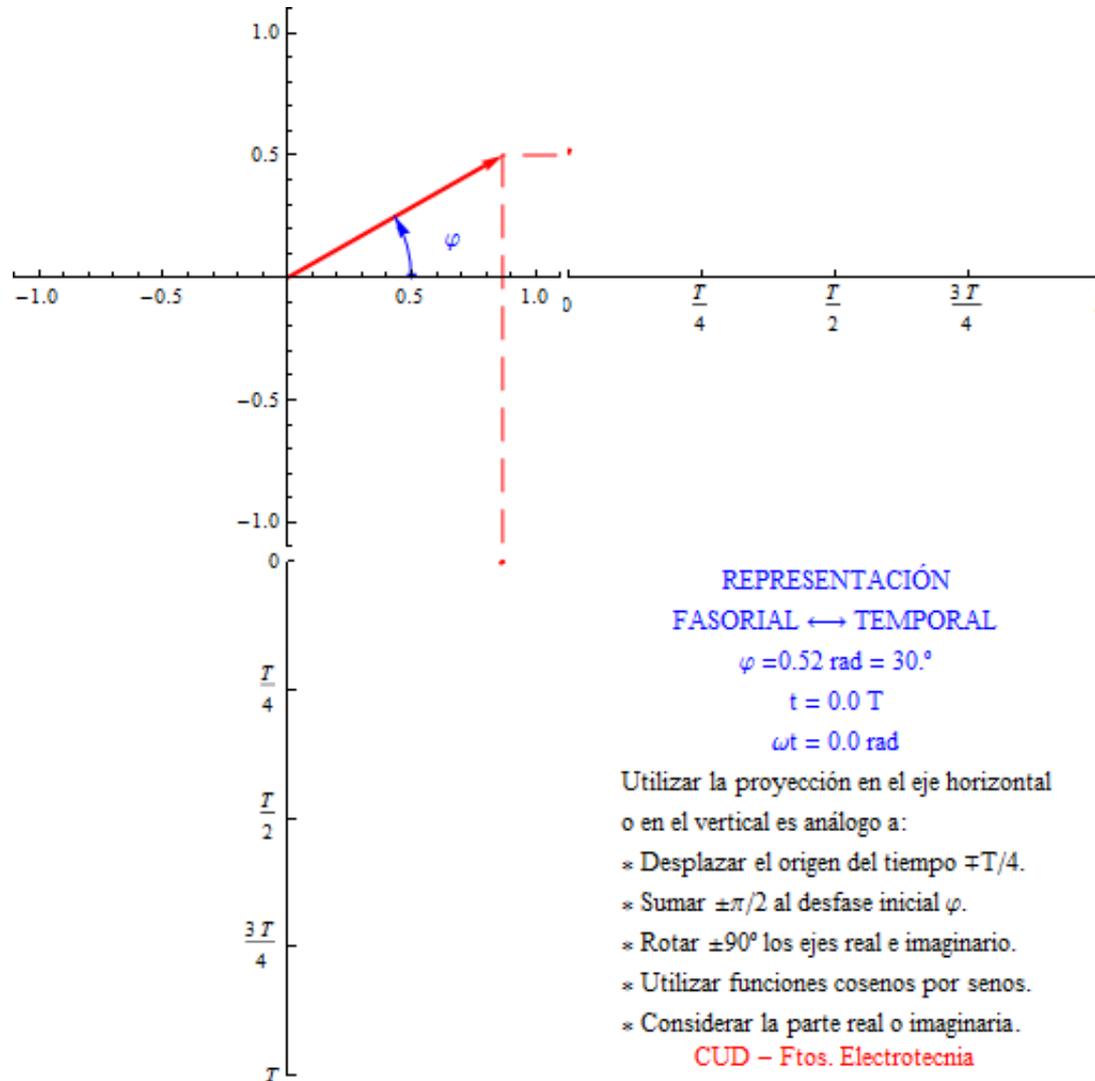
- Sea una forma de onda sinusoidal:

$$f(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

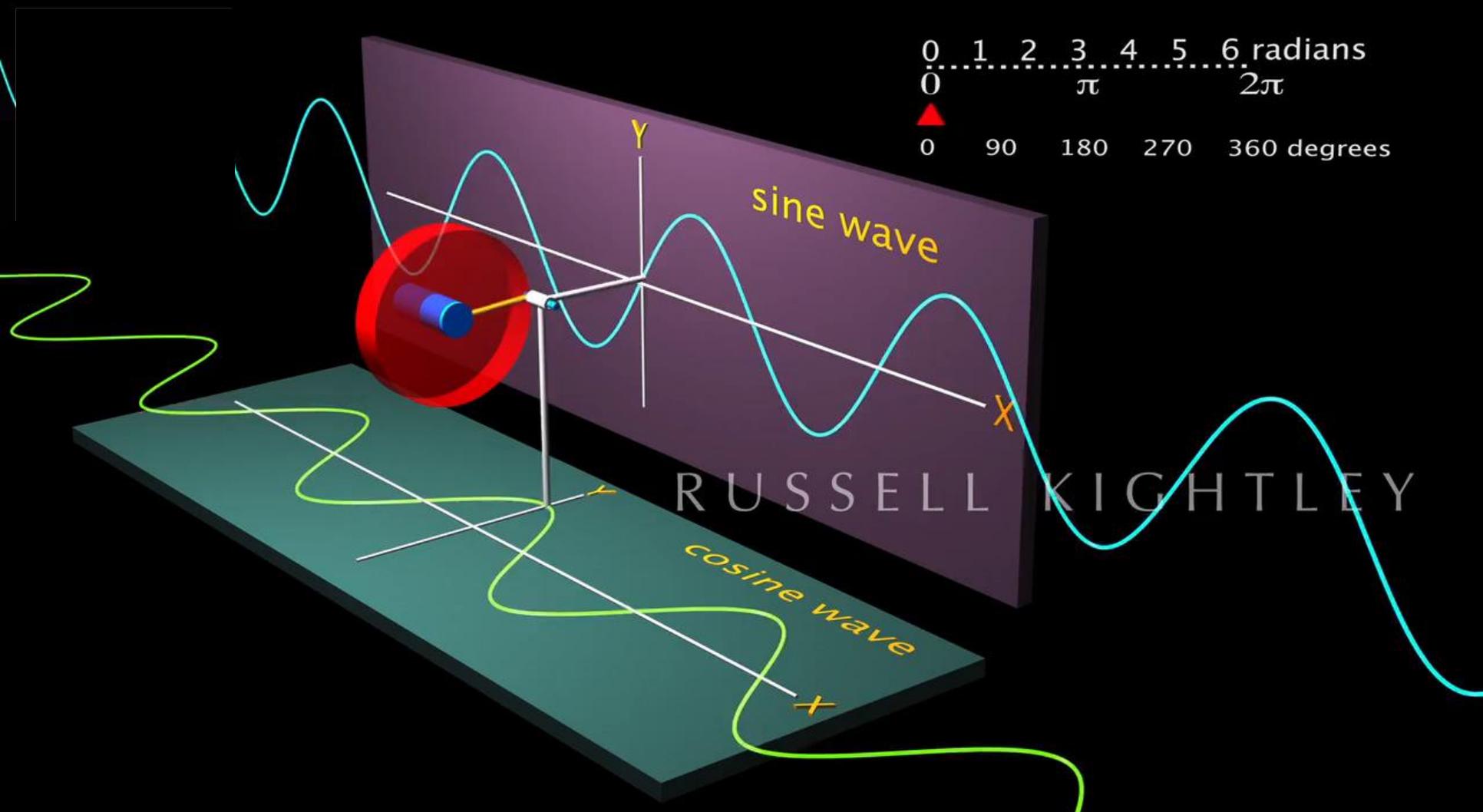
- Esta función sinusoidal se puede considerar como el resultado de proyectar en el eje vertical un vector giratorio, tal y como puede verse en la figura siguiente.



6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico



Russell Kightley - Animation of a sine wave and corresponding cosine wave



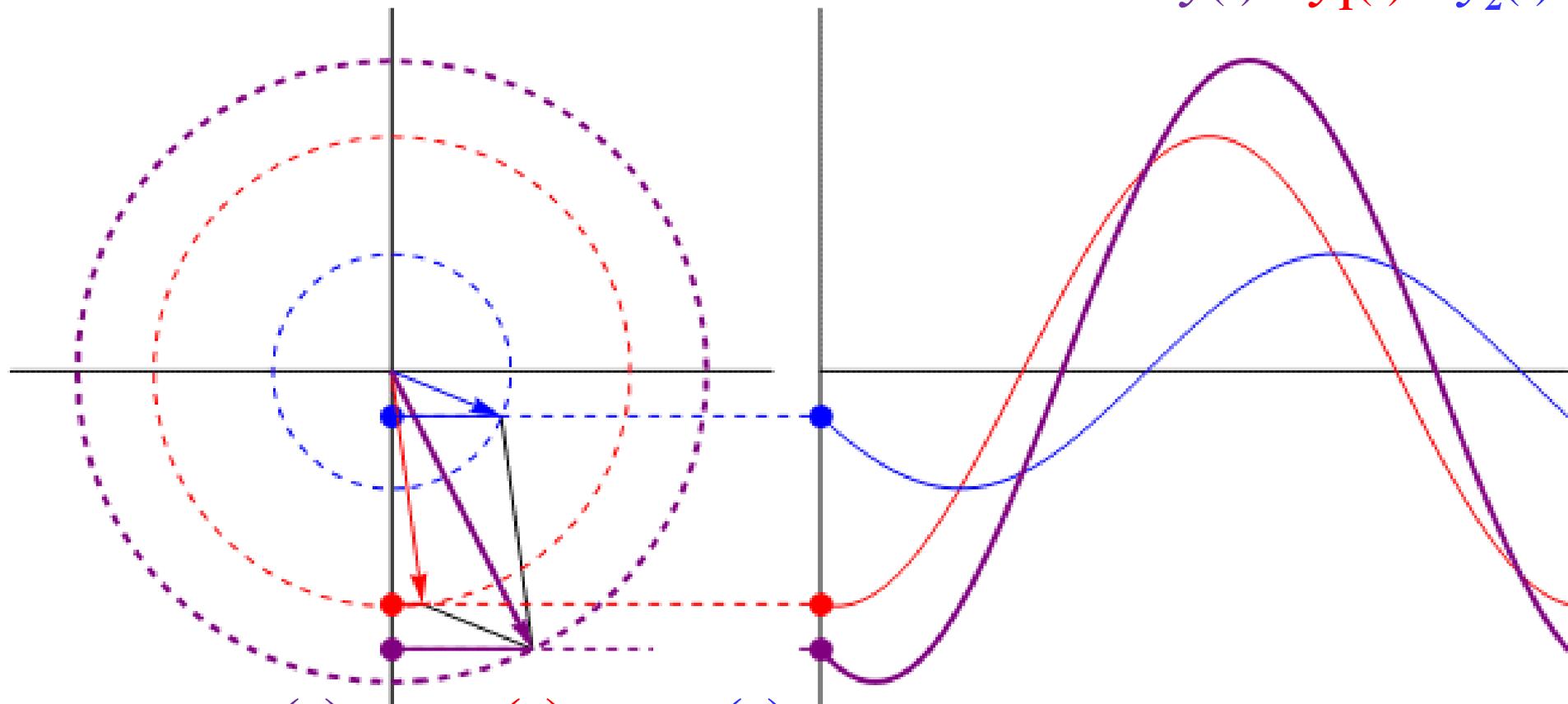


Fase-vectores giratorios (fasores)



Centro Universitario
de la Defensa Zaragoza

Al sumar o restar varias ondas sinusoidales de la misma frecuencia se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia: $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

© Antonio González Fernández <https://es.wikipedia.org/wiki/Fasor>



6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- En $t = 0$, el número complejo forma un ángulo φ con el eje horizontal. De acuerdo con el álgebra de los números complejos y la fórmula de *Euler*, este número se puede representar por la forma:

$$\bar{F}_0 = F_0 e^{j\varphi} = F_0 \cos \varphi + j F_0 \operatorname{sen} \varphi$$

- Ahora bien, si el vector que representa al número complejo gira en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad angular de ω rad/s, en el instante t el vector habrá barrido un ángulo ωt , que sumado a la fase inicial significará que el ángulo que forma el vector con el eje real será:

$$\theta = \omega t + \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ \omega: \text{pulsación (radianes / segundo)} \\ f: \text{frecuencia (Herzios)} \end{array} \right.$$

- En estas condiciones, el vector giratorio \underline{F}_0 (FASOR) se puede representar en la forma:

$$\underline{F}_0 = F_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (F_0 e^{j\varphi}) e^{j\omega t} = \bar{F}_0 e^{j\omega t}$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- La aplicación del método simbólico para determinar la solución particular de la ecuación diferencial se basa en la transformación del circuito al campo complejo, basándose en la posibilidad de representar las ondas sinusoidales mediante fasores.
- **Transformación del circuito al campo complejo:**
 - La fuente de excitación es sinusoidal, por lo que se le puede asociar un fasor:

$$\underline{E}_0 = E_0 \angle \varphi_u = (E_0 e^{j\varphi_u}) e^{j\omega t} = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u) + jE_0 \sin(\omega t + \varphi_u)$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial la fuente sinusoidal por su fasor asociado, se tendrá:

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = \underline{E}_0$$

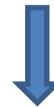
6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- En cuanto a la intensidad que circula por el circuito, también será sinusoidal, y se le podrá asociar un fasor:

$$\underline{i}_0 = I_0 \angle \varphi_i = (I_0 e^{j\varphi_i}) e^{j\omega t} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) + j I_0 \sin(\omega t + \varphi_i)$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$R I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} + j\omega L I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = E_0 e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$



$$(R + j\omega L) \underline{i}_0 = \underline{E}_0$$

- Puede verse que esta ecuación se trata ahora de una ecuación en números complejos, en vez de una ecuación diferencial.

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Se resuelve planteando la igualdad de módulos y argumentos:

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I_0 = E_0$$

$$\varphi + \varphi_i = \varphi_u \quad \text{siendo } \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

- Si en vez de utilizar valores de amplitud si se utilizan valores eficaces, algo habitual en ingeniería eléctrica, la ecuación se escribirá:

$$(R + j\omega L)\underline{I} = \underline{E}$$

- Este proceso de transformación para conseguir que las ecuaciones diferenciales pasen a ser ecuaciones algebraicas, suele denominarse “**transformar el circuito al campo complejo**”.

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Una vez resuelta la ecuación o sistemas de ecuaciones en números complejos, se tendrán los fasores correspondientes a las respuestas de los circuitos.
- Para hacer la transformación inversa, y obtener así la expresión temporal de las respuestas de los circuitos, se tomará la parte real o la parte imaginaria de los números complejos que representan a estos fasores en función de si las excitaciones se han expresado en forma coseno (parte real) o en forma seno (parte imaginaria).

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i \begin{cases} \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \text{si fuentes en forma coseno} \\ \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Im}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \text{ sen}(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \text{si fuentes en forma seno} \end{cases}$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

• Procedimiento para transformar el circuito al campo complejo:

1. Comprobar que todas las fuentes de excitación del circuito son de la **misma pulsación**. Si no lo son, y se desea analizar el circuito por el método simbólico, será imprescindible hacerlo aplicando el teorema de superposición.
2. Comprobar que las fuentes de excitación del circuito están expresadas todas con **seno** o todas con **coseno**. Si no, transformarlas sumando o restando $\pi/2$ a su fase inicial.
3. Sustituir las expresiones temporales de las fuentes de excitación del circuito por sus fasores asociados (números complejos cuyo módulo es el valor eficaz y cuyo argumento es la fase inicial de la onda).

$$e_g(t) = \textit{Amplitud} \cdot \mathbf{cos}(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\textit{criterio coseno}} \underline{E}_g = \frac{\textit{Amplitud}}{\sqrt{2}} \angle \varphi$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

4. Sustituir las expresiones temporales de las distintas variables del circuito por sus fasores asociados:

$$i(t) \rightarrow \underline{I} \quad u(t) \rightarrow \underline{U} \quad e_g(t) \rightarrow \underline{E}_g$$

5. Calcular las impedancias complejas \underline{Z} sustituyendo el operador derivada, D , por $j\omega$ en las impedancias operacionales del circuito $Z(D)$.

$$Z(D) \xrightarrow[D \rightarrow j\omega]{} \underline{Z}$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Razón por la que se sustituye el operador derivada, D , por $j\omega$ en las impedancias operacionales del circuito.

Fasor que representa una onda: $f(t) = F_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$D f(t) = \frac{d}{dt} F_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega F_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega f(t)$$

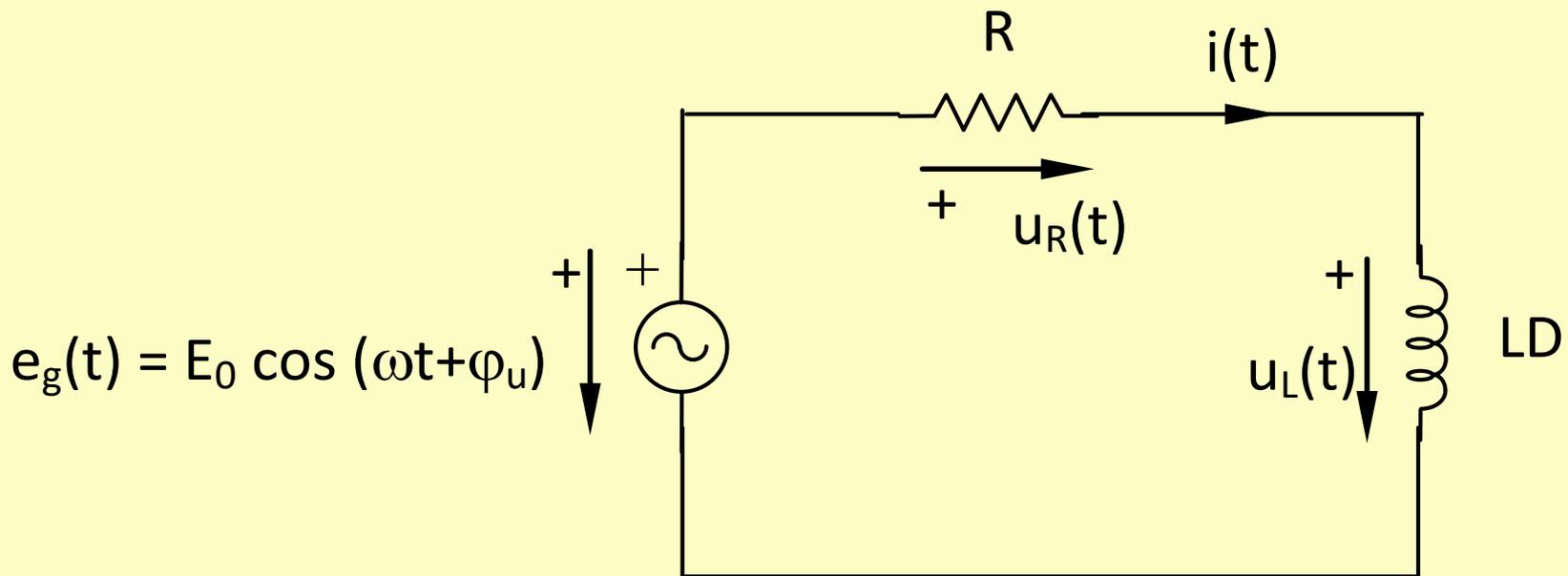
$$D f(t) = j\omega f(t)$$

$$\frac{f(t)}{D} = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t F_0 e^{j(\omega \tau + \varphi)} d\tau = \frac{F_0}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} + Cte$$

$$\frac{f(t)}{D} = \frac{f(t)}{j\omega}$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

(♦) **Cuestión 1:** Calcular la corriente $i(t)$ y las tensiones $u_R(t)$ y $u_L(t)$ en régimen estacionario sinusoidal del siguiente circuito. Datos: $E_0 = 230\sqrt{2}$ V, $R = 20$ Ω , $L = 63,7$ mH, $\varphi_u = -\pi/4$ rad, $f = 50$ Hz.



6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

Resolver el circuito por el método simbólico = utilizando fasores.

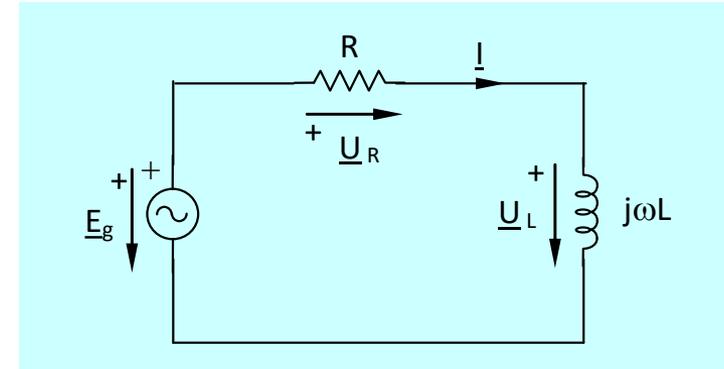
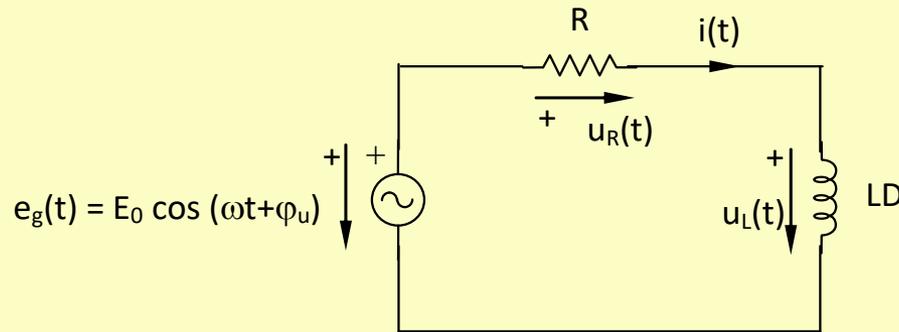
FASOR \approx número complejo que representa una onda.

Ese número complejo es la “fotografía” de los fase-vectores giratorios en el origen del tiempo ($t=0$).

Las expresiones temporales $i(t)$, $u(t)$, etc. son ondas sinusoidales que se sustituyen por sus fasores equivalentes.

- En amarillo, circuito en el dominio del tiempo.
- En azul, circuito en el campo complejo.

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico



$$e_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad u_L(t) = LD \cdot i(t)$$

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t)$$

$$i_{\text{particular}}(t) = i_{\text{estacionario}}(t)$$

$$\underline{E}_g = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}$$

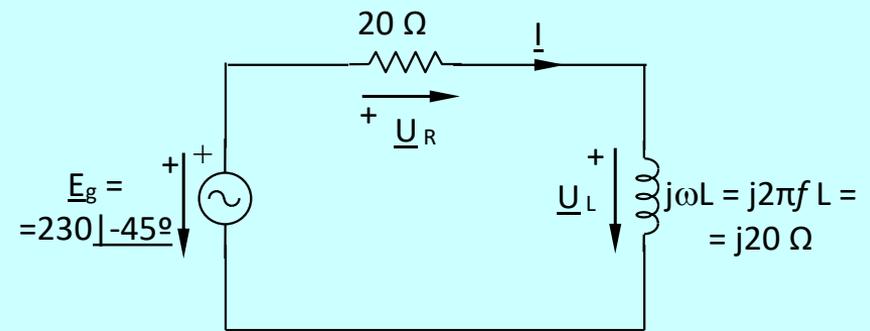
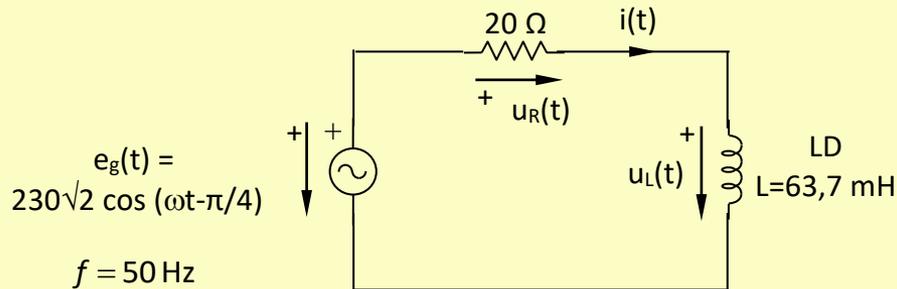
$$(R + j\omega L) \underline{I} = \underline{E}$$

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I = E \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\varphi + \varphi_i = \varphi_u \Rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi \quad \text{siendo } \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}(\underline{I}) = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico. Ejemplo 1



$$e_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$\underline{E}_g = \underline{U}_R + \underline{U}_L$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad u_L(t) = LD \cdot i(t)$$

$$(R + j\omega L) \underline{I} = \underline{E}$$

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$(20 + j20) \underline{I} = 230 \angle -45^\circ$$

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t)$$

$$\underline{I} = \frac{230 \angle -45^\circ}{20 + j20} = \frac{230 \angle -45^\circ}{20\sqrt{2} \angle +45^\circ} = \frac{230}{20\sqrt{2}} \angle -45^\circ - (+45^\circ)$$

$$i_{\text{particular}}(t) = i_{\text{estacionario}}(t)$$

$$\underline{I} = \frac{11,5}{\sqrt{2}} \angle -90^\circ \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \text{Re}(\underline{I}) = \sqrt{2} \frac{11,5}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Una vez resuelta la ecuación o sistemas de ecuaciones en números complejos, se tendrán los fasores correspondientes a las respuestas de los circuitos.
- Para hacer la transformación inversa, y obtener así la expresión temporal de las respuestas de los circuitos, se tomará la parte real o la parte imaginaria de los números complejos que representan a estos fasores en función de si las excitaciones se han expresado en forma coseno (parte real) o en forma seno (parte imaginaria).

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i \begin{cases} \longrightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \text{si fuentes en forma coseno} \\ \longrightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Im}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \text{ sen}(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \text{si fuentes en forma seno} \end{cases}$$

6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

FUENTES.

- TODAS con misma **pulsación** (=factor multiplicador del tiempo):
 - $\cos(3\omega t + \varphi)$, $\sin(5\omega t + \varphi)$, $\cos(100\pi t + \varphi)$
- TODAS en $\sin(\cdot)$ o todas en $\cos(\cdot)$
 - $\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$
 - $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$
- TODO lo que dependa del tiempo \Rightarrow FASOR
$$u(t) = \text{Amplitud} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{U} = \frac{\text{Amplitud}}{\sqrt{2}} \angle \varphi$$
- Todas las magnitudes complejas van en mayúsculas y subrayadas: \underline{Z} , \underline{Y} , \underline{U} , \underline{I} , etc.

$$\begin{array}{ccc} & +90^\circ & \\ & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \\ \cos & & \text{seno} \\ & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \\ & -90^\circ & \end{array}$$

IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS. Cambiar $D \Rightarrow j\omega$

$$\bullet Z(D) = LD \Rightarrow \underline{Z} = j\omega L$$

$$Y(D) = CD \Rightarrow \underline{Y} = j\omega C$$

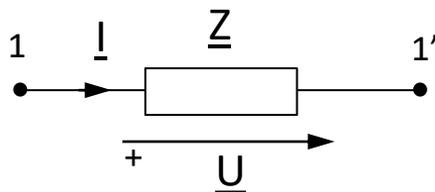
6.6. Impedancias y admitancias complejas. Asociación de impedancias

6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

- *Dado un dipolo pasivo, se definen:*
 - **Impedancia compleja:** relación entre la tensión compleja en bornes del dipolo y la intensidad compleja que lo atraviesa.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \begin{cases} \underline{Z} = Z \angle \varphi_Z & \text{Forma polar} \\ \underline{Z} = R + jX & \text{Forma binómica} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} R: \text{ Resistencia} \\ X: \text{ Reactancia} \end{array} \right.$$

Representación:



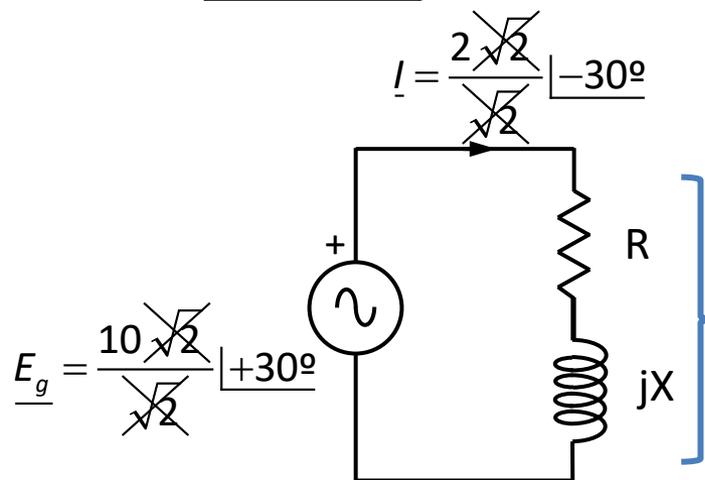
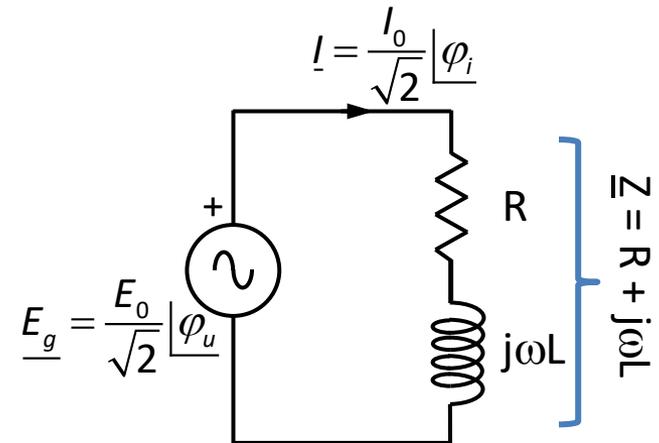
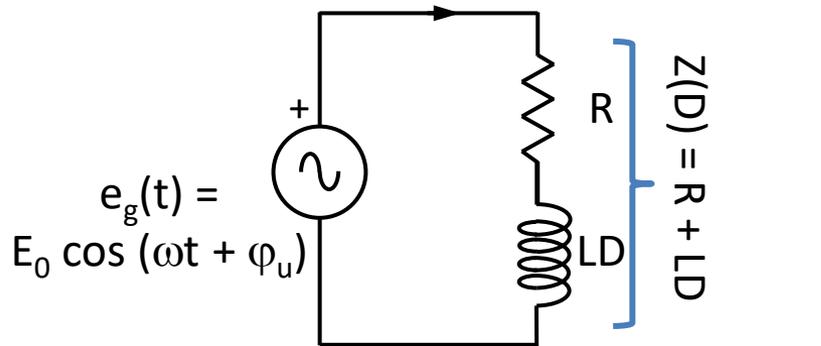
Unidades: $\left\{ \begin{array}{l} Z: \text{ Ohmios } (\Omega) \\ R: \text{ Ohmios } (\Omega) \\ X: \text{ Ohmios } (\Omega) \end{array} \right.$

6.5.2 Ejemplo 2

- Calcular la impedancia compleja \underline{Z} del circuito.

Datos: $E_0 = 10\sqrt{2}$ V, $\varphi_u = 30^\circ$, $I_0 = 2\sqrt{2}$ A, $\varphi_i = -30^\circ$, $\omega = 10$ rad/s

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{I}} = \frac{10 \angle +30^\circ}{2 \angle -30^\circ} = \frac{10}{2} \angle +30^\circ - (-30^\circ) = 5 \angle +60^\circ = 2,5 + 4,3j$$

$$\Rightarrow Z = 5 \Omega \quad R = 2,5 \Omega \quad X = 4,3 \Omega$$

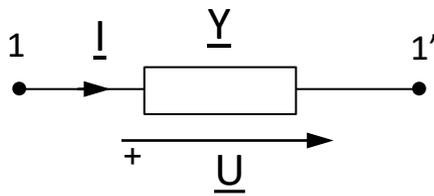
$$L = X / \omega$$

6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

- **Admitancia compleja:** relación entre la intensidad compleja que atraviesa un dipolo y la tensión compleja entre sus bornes.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad \begin{cases} \underline{Y} = Y \angle \varphi_Y & \text{Forma polar} \\ \underline{Y} = G + jB & \text{Forma binómica} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} G: \text{Conductancia} \\ B: \text{Susceptancia} \end{array} \right.$$

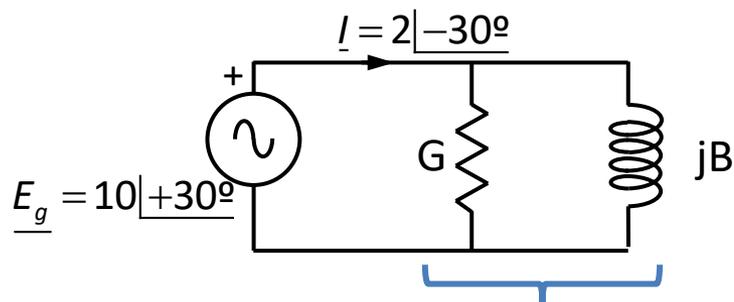
Representación:



$$\text{Unidades: } \left\{ \begin{array}{l} G: \text{Siemens (s)} \\ B: \text{Siemens (s)} \\ Y: \text{Siemens (s)} \end{array} \right.$$

6.5.2 Ejemplo 3

- Calcular la impedancia y admitancia compleja del circuito.
Datos: $E_0 = 10\sqrt{2}$ V, $\varphi_u = 30^\circ$, $I_0 = 2\sqrt{2}$ A, $\varphi_i = -30^\circ$



(se han dibujado los elementos en paralelo porque la admitancia \underline{Y} representa una resistencia de conductancia G en paralelo con una impedancia imaginaria de susceptancia B)

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}_g} = \frac{2\angle-30^\circ}{10\angle+30^\circ} = \frac{2}{10}\angle-30-30^\circ = 0,2\angle-60^\circ = 0,1 - 0,173j$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = 0,2 \text{ S} = \frac{1}{Z} \quad G = 0,1 \text{ S} \quad B = -0,173 \text{ S}$$

Al **dividir** y calcular **inversos** de n^{os} complejos, se recomienda trabajar en **forma polar**.

Regla nemotécnica: $\underline{Z} \rightarrow$ equivalente "Zerie", $\underline{Y} \rightarrow$ equivalente paralelo

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0,2\angle-60^\circ} = 5\angle+60^\circ = 2,5 + 4,3j$$

$$\frac{1}{0,1 - 0,173j} \neq \frac{1}{0,1} - j\frac{1}{0,173}$$

Atención: El **módulo de un fasor** se denota **quitando el subrayado** de la magnitud.

$$|\underline{Y}| = Y \quad |\underline{Z}| = Z \quad |\underline{E}_g| = E_g \quad (E_g = \text{valor eficaz tensión} = E_0 / \sqrt{2})$$

6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

– **Siempre** se cumple que:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

– **Atención:** $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ pero $G \neq \frac{1}{R}$ y $B \neq \frac{1}{X}$

– Comprobación:

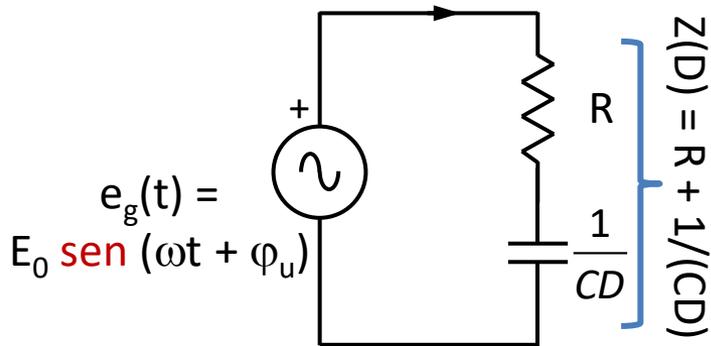
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

– Entonces: $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$

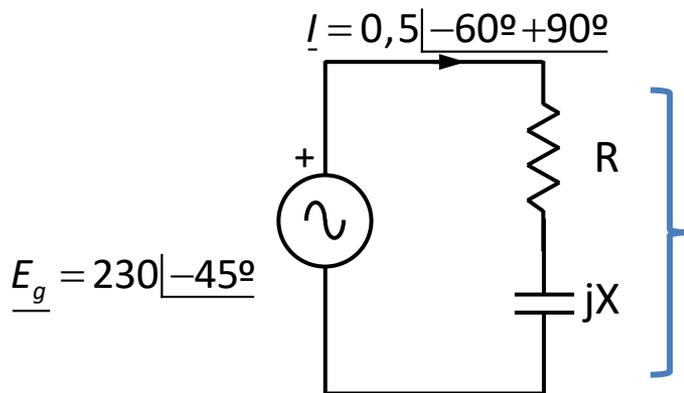
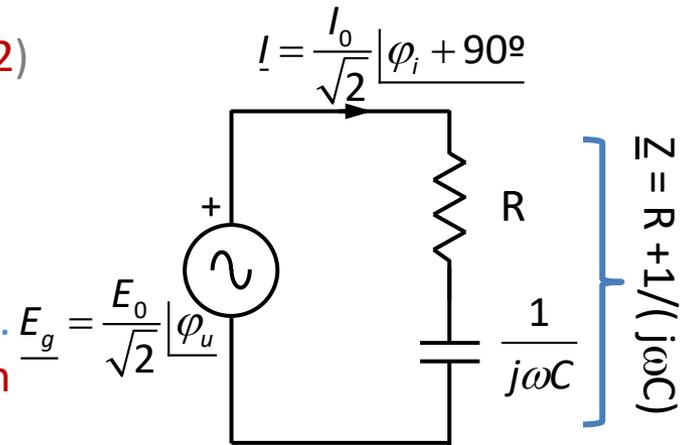
6.5.2 Ejemplo 4

- Calcular la impedancia y admitancia compleja del circuito.
Datos: $E_0 = 230\sqrt{2}$ V, $\varphi_u = -45^\circ$, $I_0 = 0,5\sqrt{2}$ A, $\varphi_i = -60^\circ$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = I_0 \text{sen}(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$$



Función trig.
elegida: **sen**



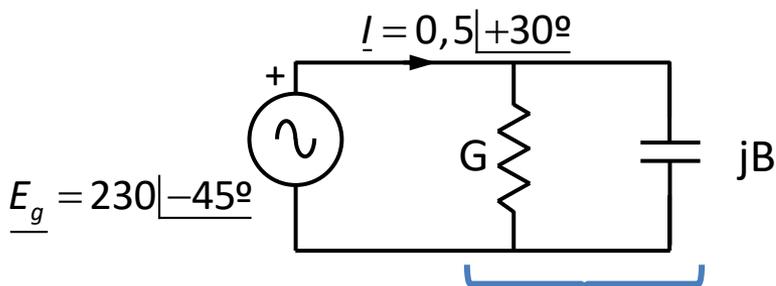
$$\underline{Z} = \frac{E_g}{I} = \frac{230 \angle -45^\circ}{0,5 \angle +30^\circ} = \frac{230}{0,5} \angle -45 - 30^\circ = 460 \angle -75^\circ = 119 - 444j$$

$$\Rightarrow Z = 460 \Omega \quad R = 119 \Omega \quad X = -444 \Omega$$

$$C = -1 / (\omega X)$$

6.5.2 Ejemplo 4 bis

- Calcular la impedancia y admitancia compleja del circuito.
Datos: $E_0 = 230\sqrt{2}$ V, $\varphi_u = -45^\circ$, $I_0 = 0,5\sqrt{2}$ A, $\varphi_i = +30^\circ$



(se han dibujado los elementos en paralelo porque la admitancia \underline{Y} representa una resistencia de conductancia G en paralelo con una impedancia imaginaria de susceptancia B)

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}_g} = \frac{0,5\angle+30^\circ}{230\angle-45^\circ} = 0,00217\angle+75^\circ = 0,562 \cdot 10^{-3} + 2,1 \cdot 10^{-3} j$$

$$\Rightarrow \underline{Y} = 0,00217 \text{ S} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$G = 0,562 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

$$B = +2,1 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

- Atención: al **dividir** y calcular **inversos** de n^{os} complejos, se recomienda trabajar en **forma polar**.
- Regla nemotécnica: $\underline{Z} \rightarrow$ equivalente "Zerie", $\underline{Y} \rightarrow$ equivalente paralelo

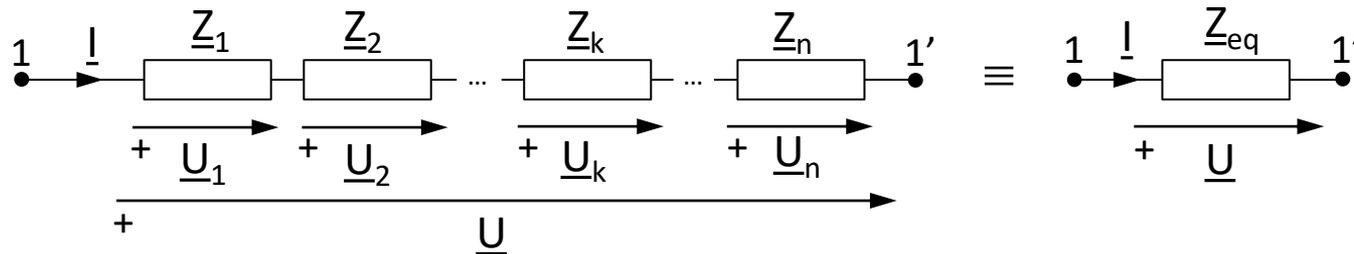
$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0,00217\angle+75^\circ} = 460\angle-75^\circ = 119 - 444j$$

$$\frac{1}{119 - j444} \quad \times \quad \frac{1}{119} - j\frac{1}{444}$$

6.6.2. Asociación de impedancias complejas

complejas

- Asociación de impedancias complejas en serie:



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} \\ &\vdots \\ \underline{U}_k &= \underline{Z}_k \cdot \underline{I} \\ &\vdots \\ \underline{U}_n &= \underline{Z}_n \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

Ley de Kirchhoff de las tensiones

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \left(\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \right) \cdot \underline{I}$$

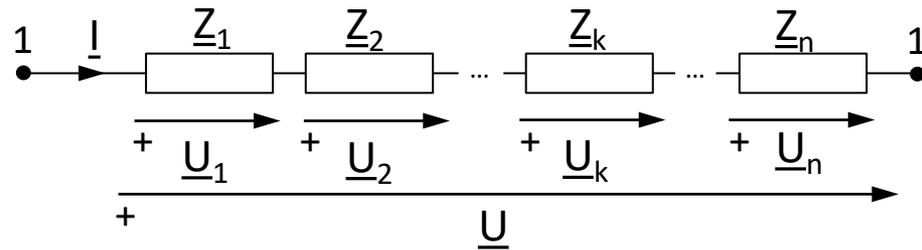
Ley de Ohm

$$\underline{U} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- *Divisor de tensión:*



$$\underline{U} = \left(\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \right) \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I}$$



$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k}$$

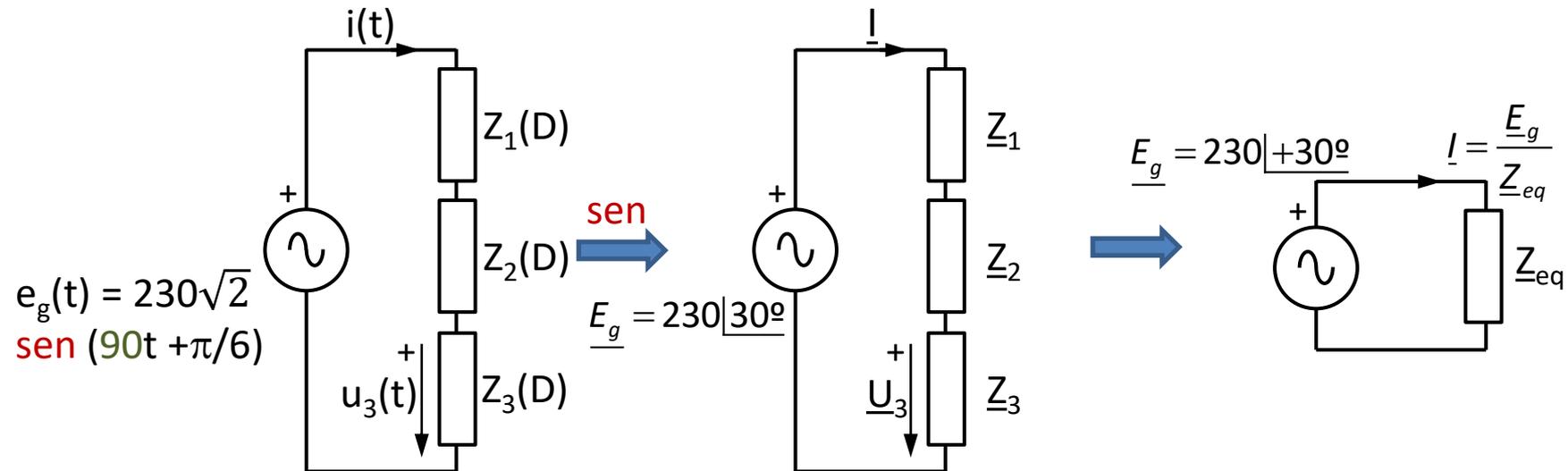


$$\underline{U}_k = \underline{U} \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k}$$

Expresión del divisor de
tensión

6.5.2 Ejemplo 5 (divisor tensión)

- Calcular la tensión $u_3(t)$ y la corriente $i(t)$.
 Datos: $\underline{Z}_1 = 3 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 7 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_3 = 10 \angle -60^\circ \Omega$



$$\underline{Z}_{eq} = 3 \angle +60^\circ + 7 \angle +60^\circ + 10 \angle -60^\circ = (1,5 + 2,6j) + (3,5 + 6,06j) + (5 - 8,66j) = 10 + 0j = 10 \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{230 \angle 30^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 23 \angle +30^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{sen}} \quad 30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$$

$$i(t) = 23\sqrt{2} \text{ sen}(90t + \pi/6)$$

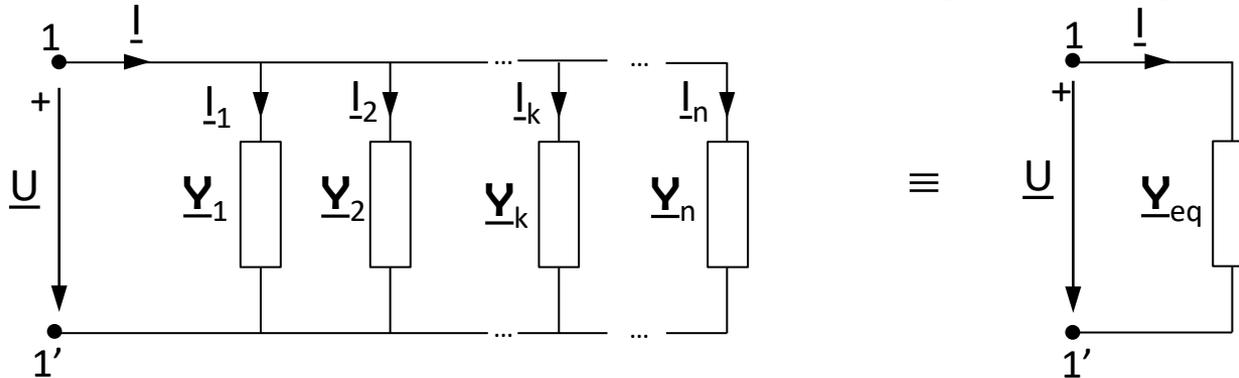
$$\underline{U}_3 = \underline{I} \underline{Z}_3 = 23 \angle 30^\circ \cdot 10 \angle -60^\circ = 230 \angle -30^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{sen}} \quad -30^\circ = -\pi/6 \text{ rad}$$

$$u_3(t) = 230\sqrt{2} \text{ sen}(90t - \pi/6)$$

6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- Asociación de admitancias complejas en paralelo:



$$I_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}$$

$$I_2 = \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}$$

$$\vdots$$

$$I_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U}$$

$$\vdots$$

$$I_n = \underline{Y}_n \cdot \underline{U}$$

Ley de Kirchhoff de las intensidades

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \left(\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \right) \cdot \underline{U}$$

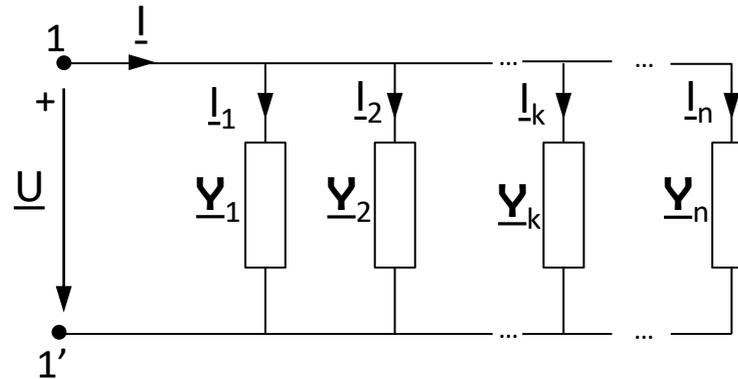
Ley de Ohm

$$I = \underline{Y}_{eq} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- *Divisor de intensidad:*



$$\underline{I} = \left(\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \right) \cdot \underline{U}$$

$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U}$$



$$\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$



$$\underline{I}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$

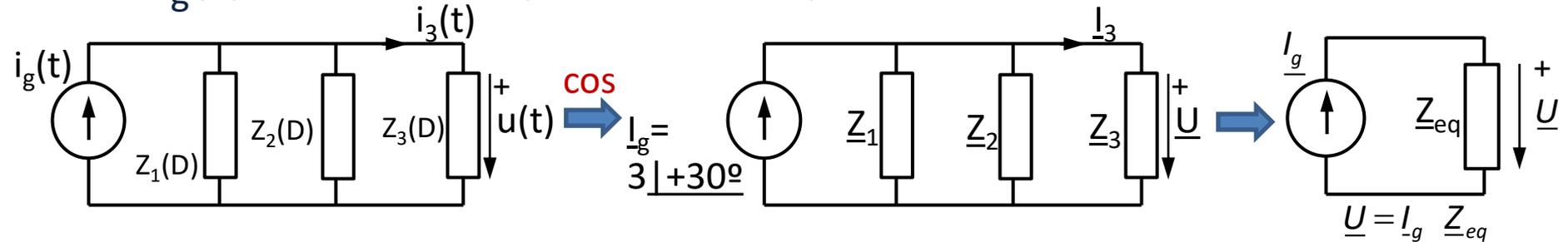
Expresión del divisor de
intensidad

6.5.2 Ejemplo 6 (divisor corriente)

- Calcular la tensión $u(t)$ y la corriente $i_3(t)$.

Datos: $\underline{Z}_1 = 12 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 6 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_3 = 4 \angle -60^\circ \Omega$

$$i_g(t) = 3\sqrt{2} \cos(1000t + \pi/6)$$



$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{12} \angle -60^\circ + \frac{1}{6} \angle -60^\circ + \frac{1}{4} \angle +60^\circ = \frac{1}{4} \angle 0^\circ \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = 4 \angle 0^\circ$$

$$\underline{U} = \underline{I}_g \underline{Z}_{eq} = (3 \angle +30^\circ) (4 \angle 0^\circ) = 12 \angle 30^\circ$$

$30^\circ \xrightarrow{\text{COS}} \pi/6 \text{ rad}$

$$u(t) = 12\sqrt{2} \cos(1000t + \pi/6)$$

$$i_3 = \underline{U} \underline{Y}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{12 \angle 30^\circ}{4 \angle -60^\circ} = 3 \angle 90^\circ$$

$90^\circ \xrightarrow{\text{COS}} \pi/2 \text{ rad}$

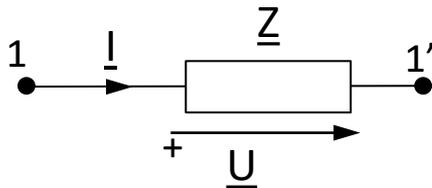
$$i_3(t) = 3\sqrt{2} \cos(1000t + \pi/2)$$

(también es posible aplicar fórmula divisor corriente)

6.7. Elementos pasivos en RES

6.7. Elementos pasivos básicos en régimen estacionario sinusoidal

- A continuación se ven las impedancias complejas de los distintos elementos pasivos básicos que forman parte de los circuitos eléctricos.
- Hay que recordar que para transformar las impedancias operacionales al campo complejo, se sustituye el operador derivada, D , por el número complejo $j\omega$.
- Recordar también que cualquier circuito pasivo puede representarse mediante su impedancia equivalente, de manera que:



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX = Z \angle \varphi_Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

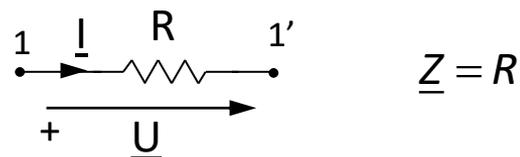
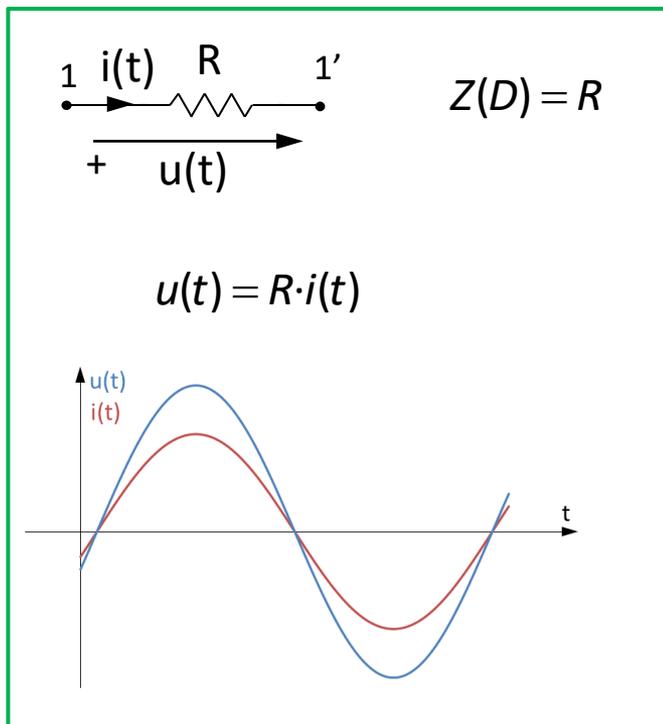
$$\varphi_Z = \arctg \frac{X}{R}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$U = Z \cdot I$$

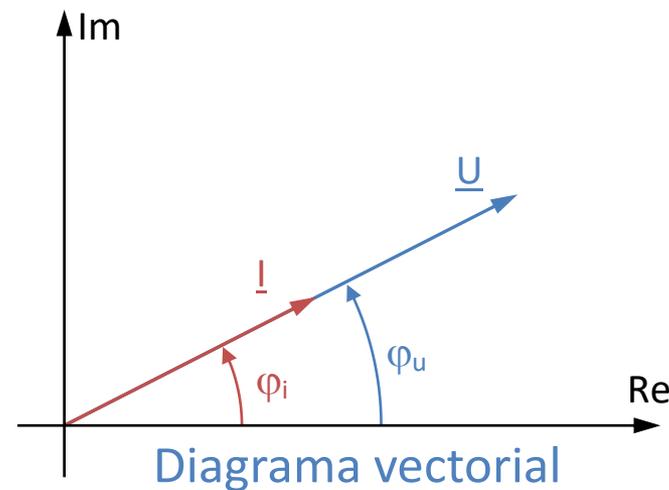
$$\varphi_u = \varphi_Z + \varphi_i$$

6.7.1. Resistencia



$$\underline{Z} = R = R + j0 \begin{cases} R \geq 0 \\ X = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \underline{Z} = R = R \underline{0^\circ} \begin{cases} Z = R \\ \varphi_Z = 0^\circ \end{cases}$$

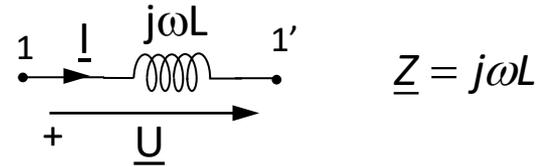
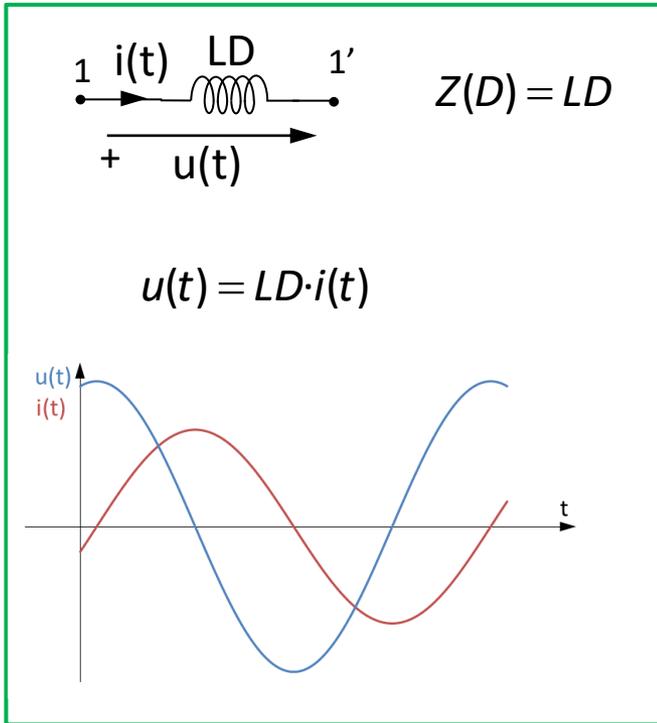
$$\underline{U} = R \underline{0^\circ} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = R \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}$$



Resistencia: $\varphi_u = \varphi_i$

Tensión e intensidad están en fase

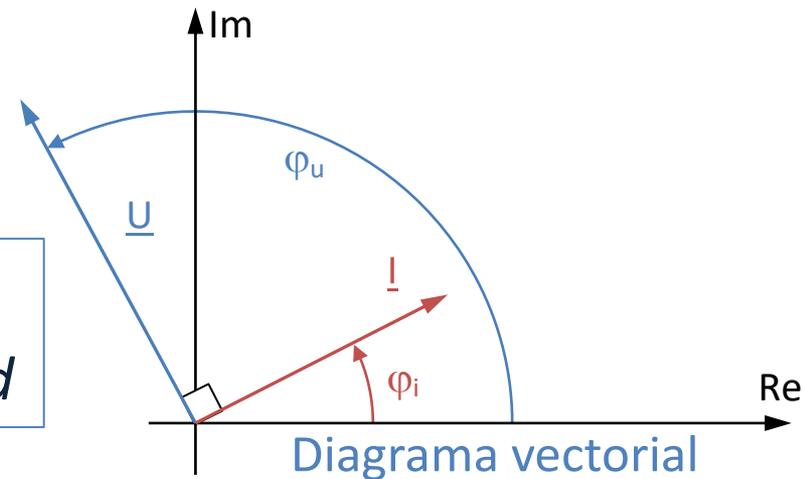
6.7.2. Bobina



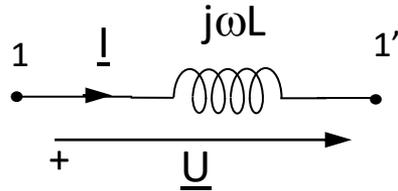
$$\underline{Z} = j\omega L = 0 + j\omega L \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ X = \omega L \geq 0 \end{array} \right. \left| \underline{Z} = j\omega L = \omega L \underline{90^\circ} \right. \left\{ \begin{array}{l} Z = \omega L \\ \varphi_Z = +90^\circ \end{array} \right.$$

$$\underline{U} = \omega L \underline{90^\circ} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \omega L \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \end{cases}$$

Bobina: $\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i$
 La tensión adelanta 90° a la intensidad



6.7.2. Bobina



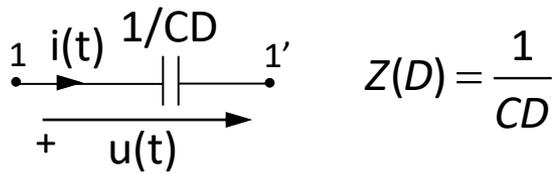
$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L \left| +90^\circ \right. \begin{cases} Z = \omega L \rightarrow \text{El valor depende de la frecuencia} \\ \varphi_Z = +90^\circ \end{cases}$$

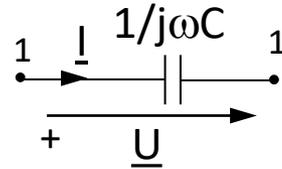
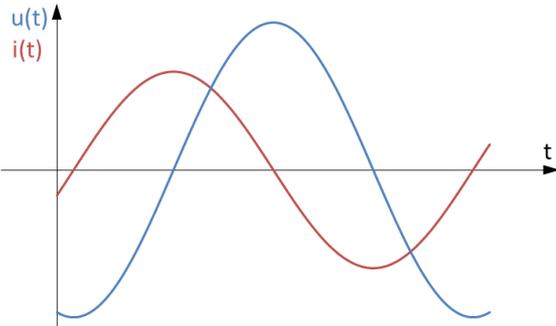
Si $\omega = 0$ (corriente continua) $\Rightarrow Z = \omega L = 0 \rightarrow$ Cortocircuito

Si $\omega \rightarrow \infty$ (alta frecuencia) $\Rightarrow Z = \omega L \rightarrow \infty \rightarrow$ Circuito abierto

6.7.3. Condensador



$$u(t) = \frac{1}{CD} \cdot i(t)$$



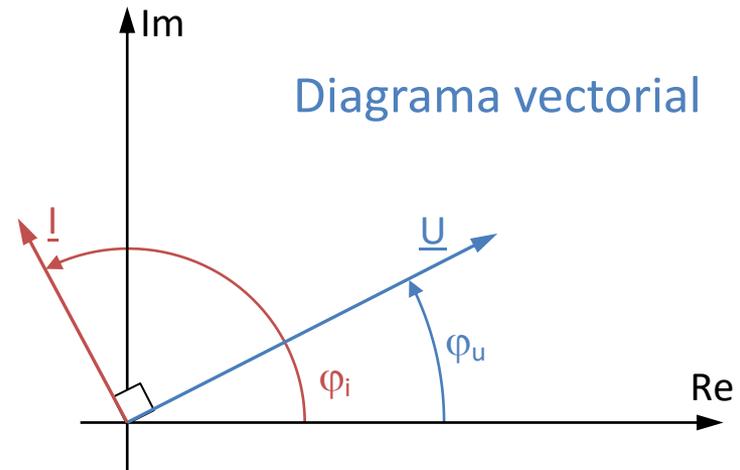
$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j(j\omega C)} = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = 0 - j \frac{1}{\omega C} \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ X = -\frac{1}{\omega C} \leq 0 \end{array} \right. \left| \underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi_Z = -90^\circ \end{array} \right.$$

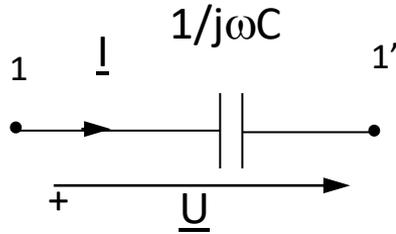
$$\underline{U} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \cdot \underline{I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{\omega C} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \end{array} \right.$$

Condensador: $\varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i$
 La tensión retrasa 90° respecto de la intensidad

Diagrama vectorial



6.7.3. Condensador



$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j(j\omega C)} = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \text{El valor depende de la frecuencia} \\ \varphi_Z = -90^\circ \end{array} \right.$$

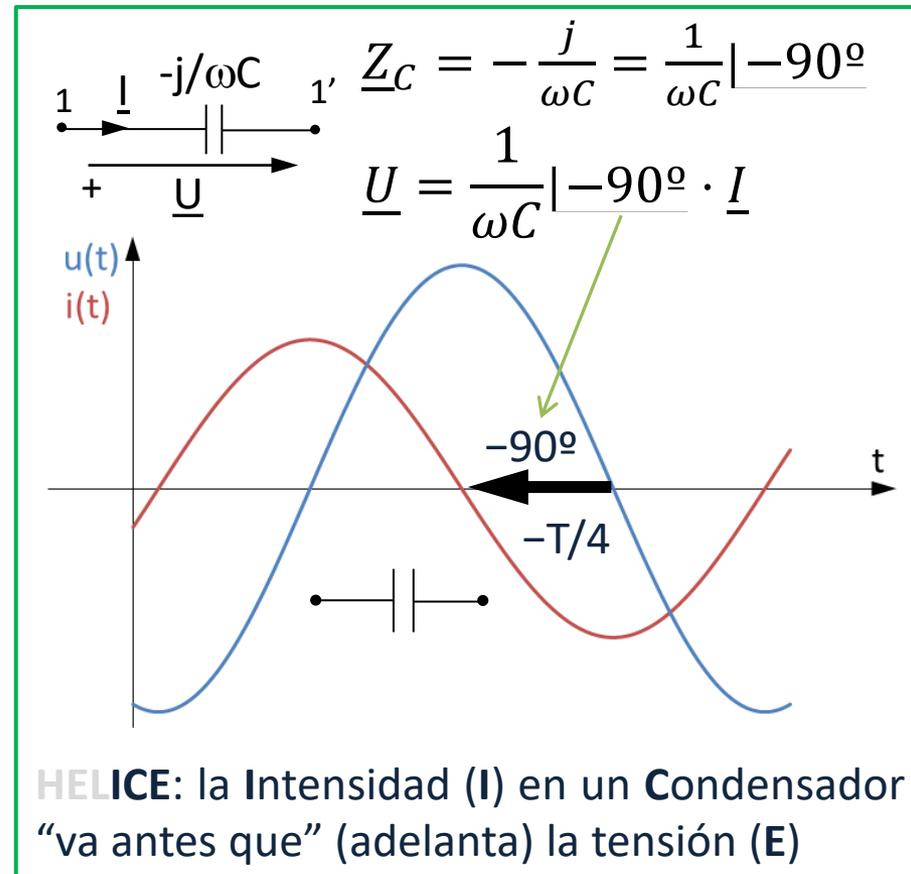
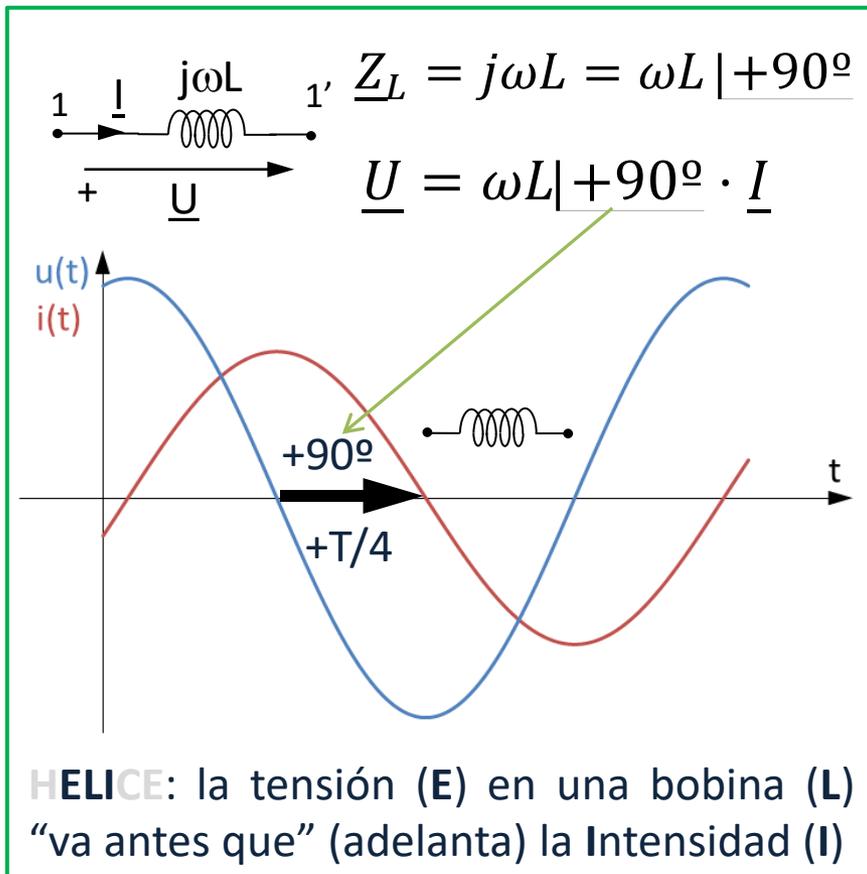
Si $\omega = 0$ (corriente continua) $\Rightarrow Z = 1/\omega C \rightarrow \infty \rightarrow$ **Circuito abierto**

Si $\omega \rightarrow \infty$ (alta frecuencia) $\Rightarrow Z = 1/\omega C = 0 \rightarrow$ **Cortocircuito**

6.7.4 Mnemotécnico HÉLICE



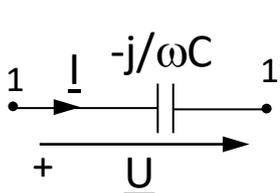
HÉLICE



6.7.5 Mnemotécnico CIVIL



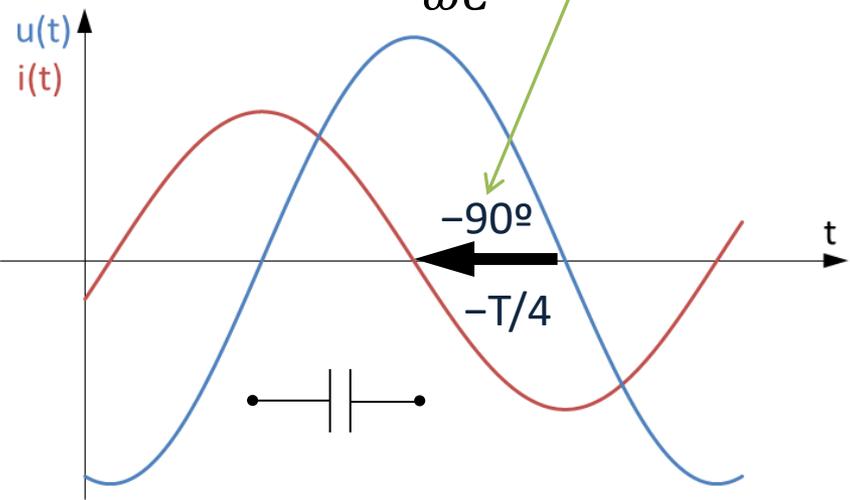
CIVIL



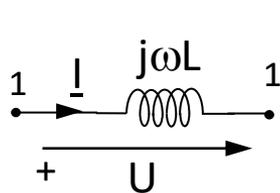
$-j/\omega C$

$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

$$\underline{U} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \cdot \underline{I}$$



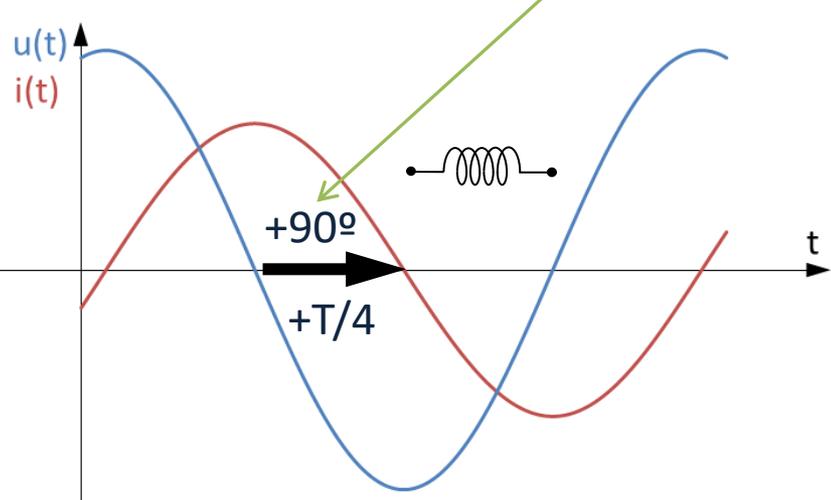
CIVIL: en un Condensador la Intensidad (I) “va antes que” (adelanta) la tensión (V)



$j\omega L$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L \angle +90^\circ$$

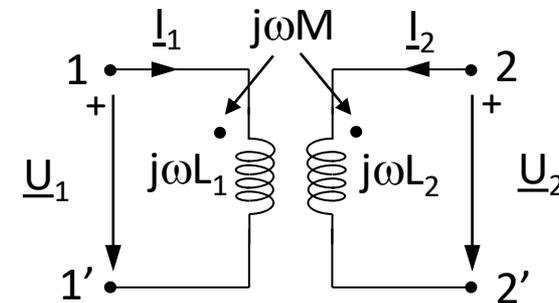
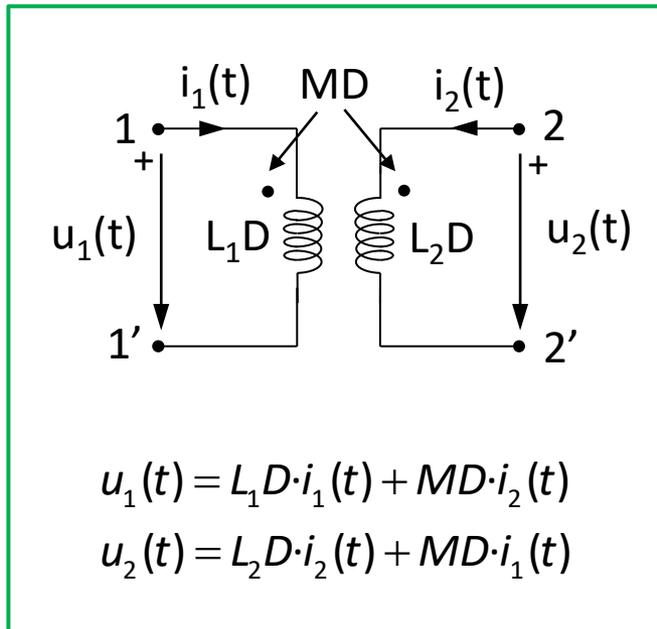
$$\underline{U} = \omega L \angle +90^\circ \cdot \underline{I}$$



CIVIL: la tensión (V) “va antes que” la Intensidad (I) en una bobina (L)

6.7.4. Bobinas acopladas magnéticamente

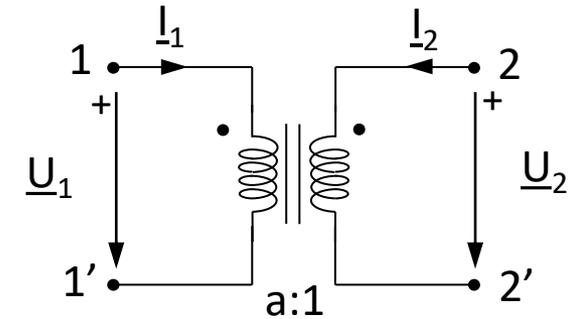
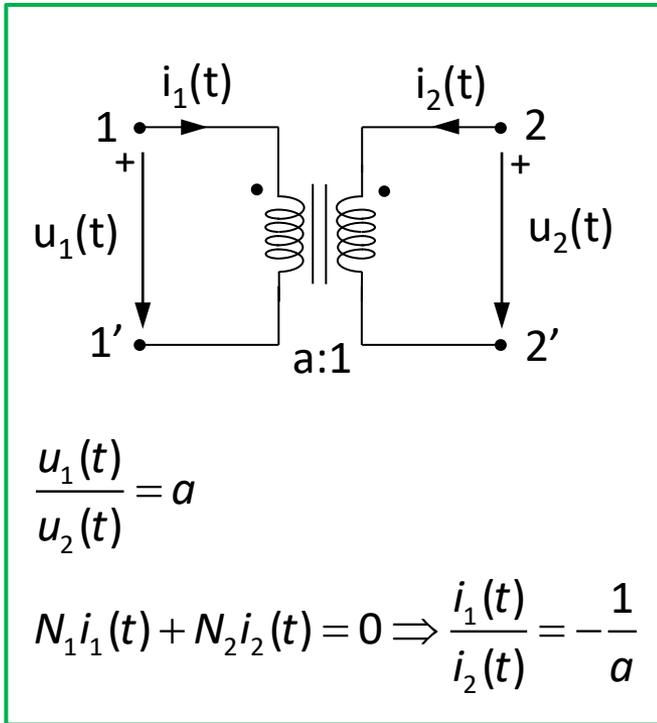
Para las referencias y terminales correspondientes indicados:



$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega M \cdot \underline{I}_1$$

6.7.5. Transformador ideal

Para las referencias y terminales correspondientes indicados:



$$\frac{U_1}{U_2} = a$$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \angle 180^\circ$$

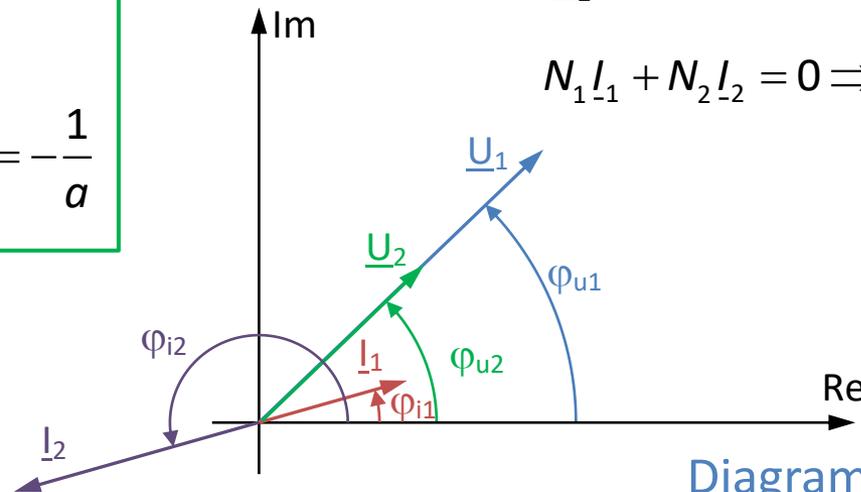
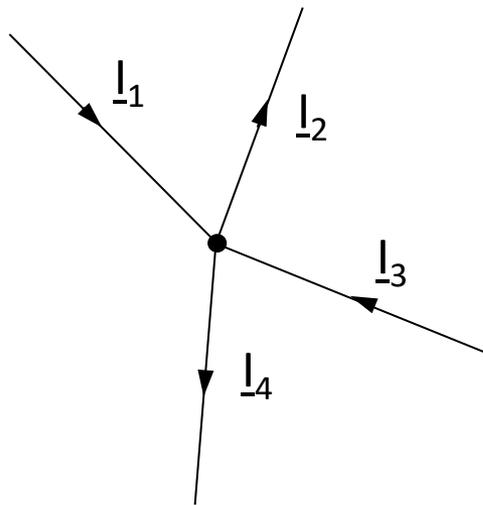


Diagrama vectorial

6.8. Leyes de Kirchhoff en RES

6.8.1. Ley de Kirchhoff de las intensidades en RES

- La suma de todas las intensidades complejas que entran (salen) en (de) un nudo a través del conjunto de conductores que concurren en él, es siempre cero.



$$\sum I_{-entran} = 0 \quad \sum I_{-salen} = 0$$

$$\sum I_{-entran} = \sum I_{-salen}$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0 \\ -I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0 \end{array} \quad \left\| \quad I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Atención: Notar que las sumas son vectoriales, **NO EN MÓDULO**

En general: $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 \neq 0$

6.8.1. Ley de Kirchhoff de las intensidades en RES

Calcular $i_3(t)$ sabiendo que:

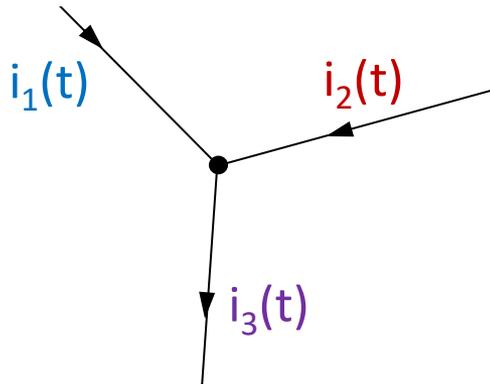
$$i_1(t) = 2\sqrt{2} \text{ sen } (\omega t + \pi/3)$$

$$i_2(t) = 4\sqrt{2} \text{ sen } (\omega t + 0)$$

→
Función trig.
elegida: sen

$$\underline{I}_1 = 2 \angle 60^\circ = 1 + j\sqrt{3}$$

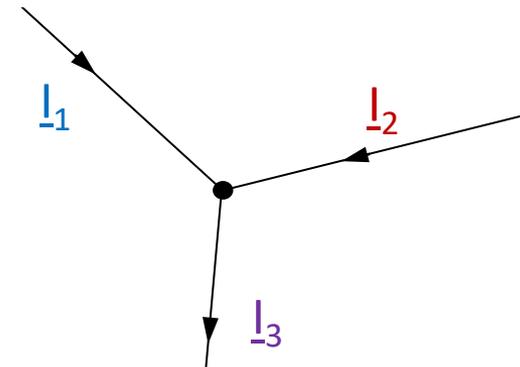
$$\underline{I}_2 = 4 \angle 0^\circ = 4 + j0$$



$$\sum i_{\text{entran}}(t) = \sum i_{\text{salen}}(t)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t)$$

$$i_3(t) = \dots$$



$$\sum I_{\text{-entran}} = \sum I_{\text{-salen}}$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$$

$$(1 + j\sqrt{3}) + (4 + j0) = \underline{I}_3 = 5 + j\sqrt{3} = 5,3 \angle 19,1^\circ$$

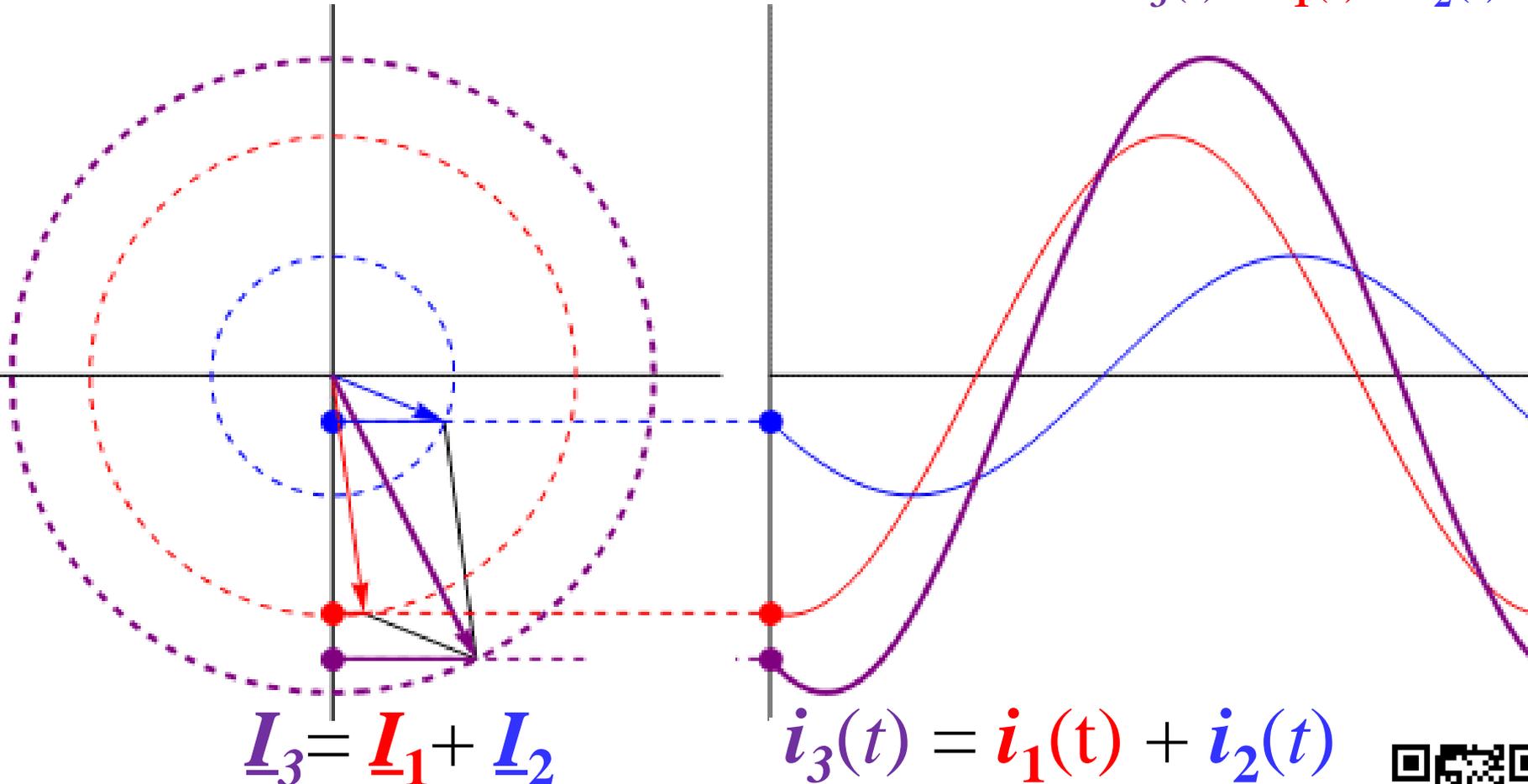
Se suman fasores, no módulos: $I_1 + I_2 \neq I_3$

$$i_3(t) = 5,3 \sqrt{2} \text{ sen } (\omega t + 19,1^\circ \frac{\pi}{180^\circ})$$



Fase-vectores giratorios (fasores)

Al sumar o restar varias ondas sinusoidales de la misma frecuencia se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia: $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$



$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

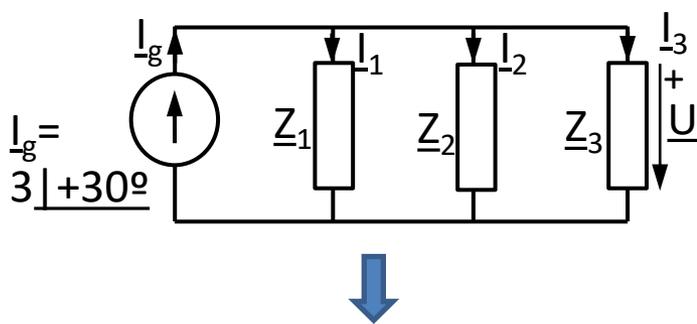
© Antonio González Fernández <https://es.wikipedia.org/wiki/Fasor>



6.8.1 Continuación ejemplo 6

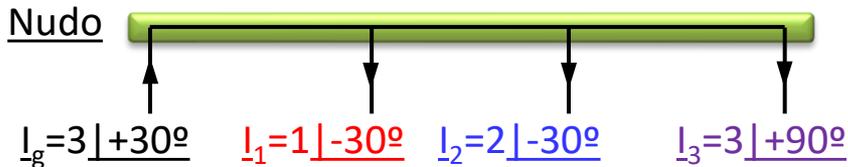
(LKI = suma fasorial corriente)

- Comprobar LKI en el circuito del ejemplo 6

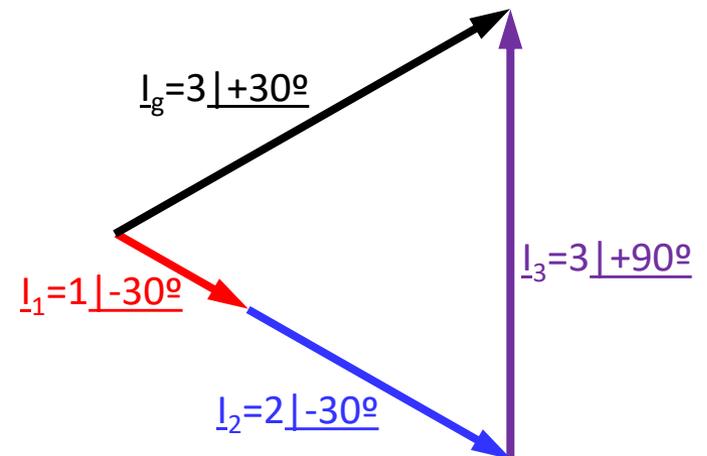


$$\left\{ \begin{array}{l} I_g = 3 \angle 30^\circ \\ I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{12 \angle 30^\circ}{12 \angle +60^\circ} = 1 \angle -30^\circ \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U}{Z_2} = \frac{12 \angle 30^\circ}{6 \angle +60^\circ} = 2 \angle -30^\circ \\ I_3 &= \frac{U}{Z_3} = \frac{12 \angle 30^\circ}{4 \angle -60^\circ} = 3 \angle 90^\circ \end{aligned}$$



Suma vectorial (no en módulo)



Advertencia: no vale sumar solo módulos LKI:

~~$$\begin{aligned} \text{¿ } I_g &= I_1 + I_2 + I_3 ? \\ 3 &\neq 1 + 2 + 3 \\ \text{¡¡ } 3 &\neq 6!! \end{aligned}$$~~

LKI aplicada correctamente:

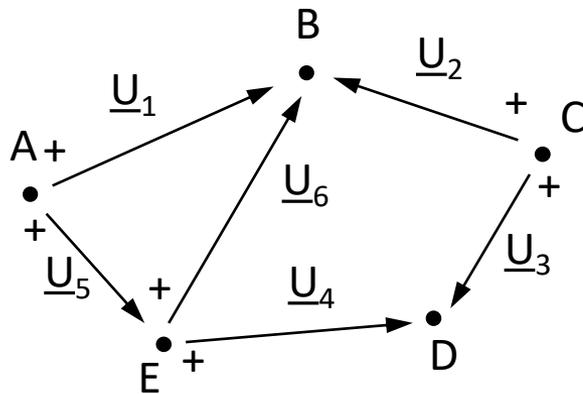
$$I_g = I_1 + I_2 + I_3$$

$$3 \angle +30^\circ = 1 \angle -30^\circ + 2 \angle -30^\circ + 3 \angle +90^\circ$$

6.8.2. Ley de Kirchhoff de las tensiones en RES

- La suma de las tensiones complejas a lo largo de cualquier trayectoria cerrada de un circuito, es siempre cero.

Ejemplos:



$$\text{Trayectoria } ABCDEA \dots\dots\dots \underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 - \underline{U}_5 = 0$$

$$\text{Trayectoria } ABEA \dots\dots\dots \underline{U}_1 - \underline{U}_6 - \underline{U}_5 = 0$$

$$\text{Trayectoria } EBCDE \dots\dots \underline{U}_6 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0 \Rightarrow \underline{U}_6 = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 + \underline{U}_4$$

$$\text{Trayectoria } EB AE \dots\dots\dots \underline{U}_6 - \underline{U}_1 + \underline{U}_5 = 0 \Rightarrow \underline{U}_6 = \underline{U}_1 - \underline{U}_5$$

$$\underline{U}_{EB} = \underline{U}_6 = \underbrace{-\underline{U}_5 + \underline{U}_1}_{\text{Trayectoria EAB}} = \underbrace{\underline{U}_4 - \underline{U}_3 + \underline{U}_2}_{\text{Trayectoria EDCB}}$$

Atención: Notar que las sumas son vectoriales, **NO EN MÓDULO**

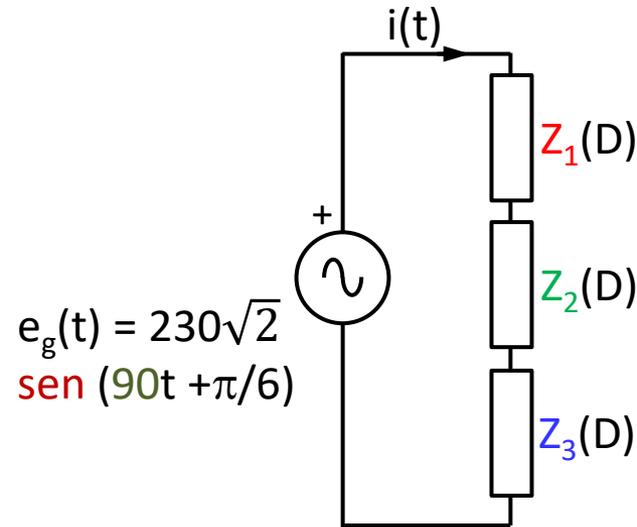
En general: $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 - \underline{U}_5 \neq 0$

6.8.2 Continuación ejemplo 5

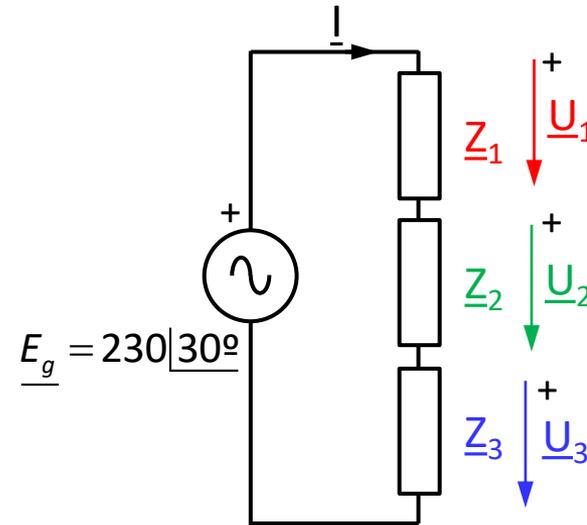
(LKT = suma fasorial tensión)

- Comprobar la LKT en el circuito del ejemplo 5.

Datos: $\underline{Z}_1 = 3 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 7 \angle +60^\circ \Omega$, $\underline{Z}_3 = 10 \angle -60^\circ \Omega$



sen



$\underline{I} = 23 \angle +30^\circ$ (obtenido en transparencias anteriores)

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = 3 \angle +60^\circ \cdot 23 \angle +30^\circ = 69 \angle +90^\circ$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = 7 \angle +60^\circ \cdot 23 \angle +30^\circ = 161 \angle +90^\circ$$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I} = 10 \angle -60^\circ \cdot 23 \angle +30^\circ = 230 \angle -30^\circ$$

Suma
fasorial

$$69 \angle +90^\circ + 161 \angle +90^\circ + 230 \angle -30^\circ = 199,186 + j115 = 230 \angle +30^\circ \checkmark \text{😊👍}$$

ATENCIÓN: es incorrecto sumar solo módulos

$$69 + 161 + 230$$

~~Incorrecto~~

$$= 460 \neq 230 \text{ X 🗨️}$$

6.9. Métodos de análisis de circuitos en RES

6.9. Método de análisis de circuitos en RES

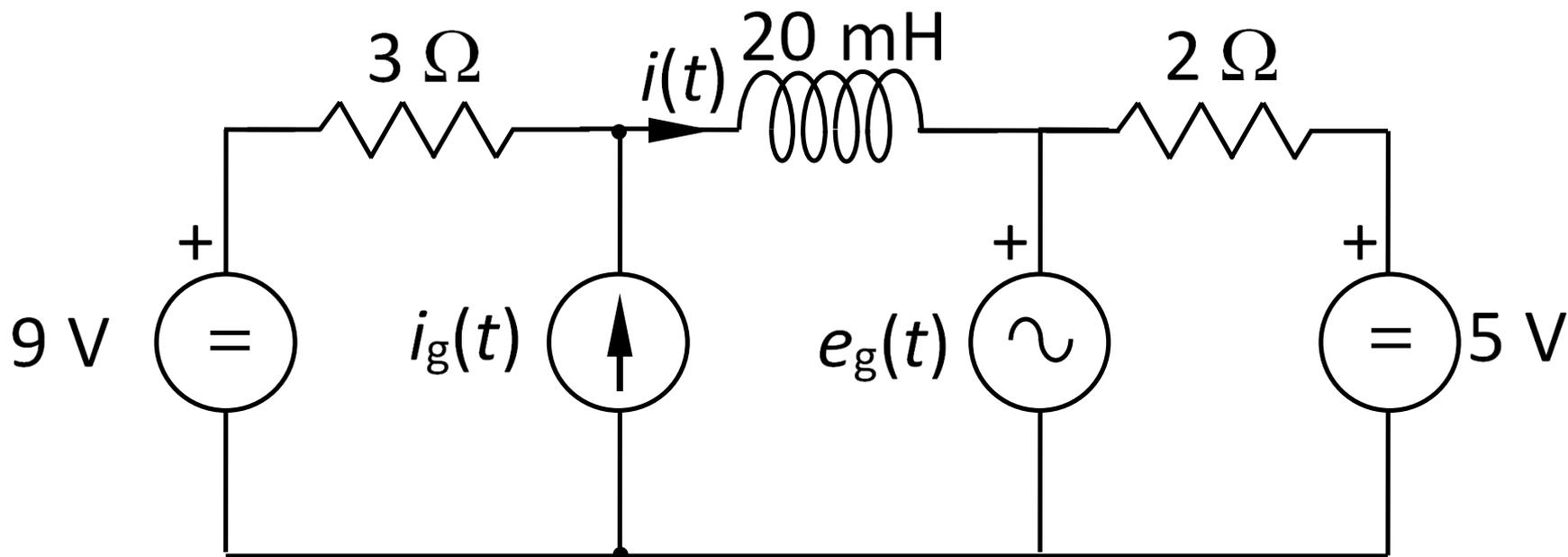
- *Métodos de análisis:*
 - Método de nudos.
 - Método de mallas.
- *Las variables empleadas en los métodos de análisis (tensiones de nudo e intensidades de malla) serán fasores y vendrán representadas por números complejos.*
- *Los sistemas de ecuaciones resultantes de aplicar el método de análisis elegido a un circuito, serán sistemas de ecuaciones en números complejos, en vez de sistemas de ecuaciones diferenciales.*

6.10. Teoremas fundamentales en RES

6.10.1. Teorema de superposición

- *Dado un circuito lineal, la respuesta de dicho circuito cuando actúan en él de manera simultánea varias fuentes de excitación, es igual a la suma de las respuestas del circuito si actúa cada fuente de excitación de manera independiente.*
 - Este teorema es de uso imprescindible para analizar, por el método simbólico, circuitos en los que haya fuentes de distintas formas de onda, o bien en el caso de que, aun siendo todas las fuentes sinusoidales, no tengan todas la misma pulsación.

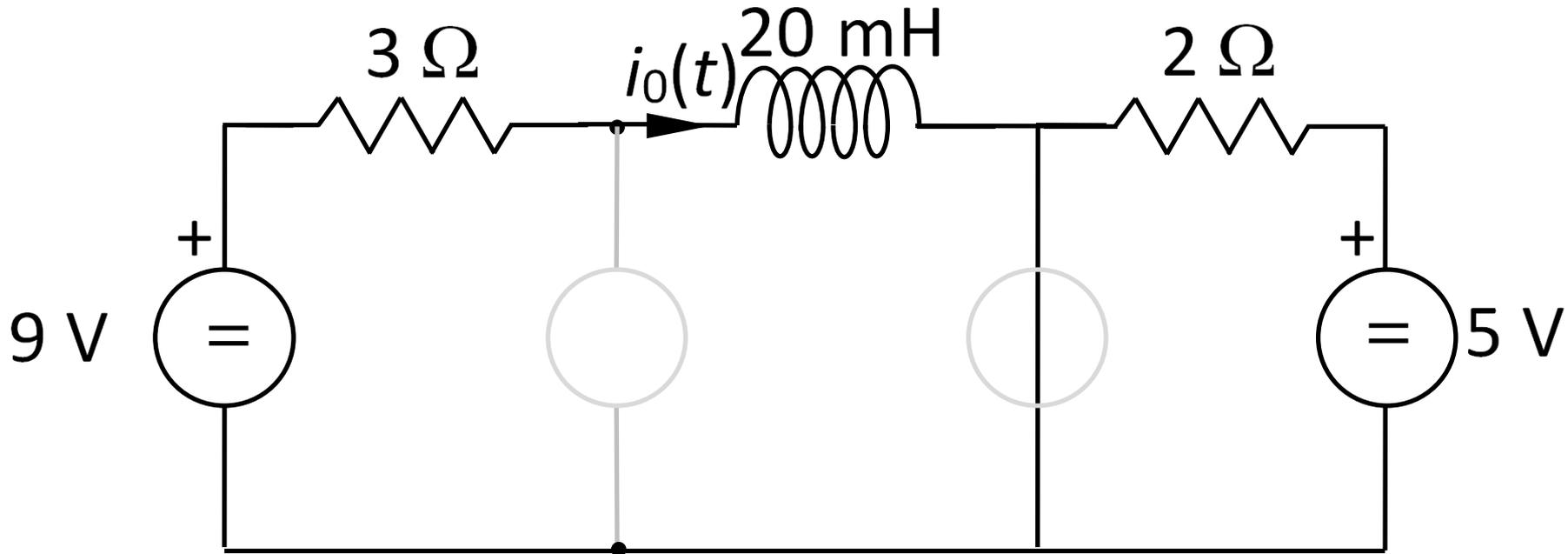
Ejercicio: Determinar la intensidad $i(t)$



$$i_g(t) = 50 \sqrt{2} \cos(50t) \text{ A} \quad e_g(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \sin(10t) \text{ V}$$

☒ Diferente **pulsación**: corriente continua (9 V y 5 V), $\cos(50t)$, $\sin(10t)$ → **SUPERPOSICIÓN**

Fuentes de corriente continua ($\omega_0 \rightarrow 0$)



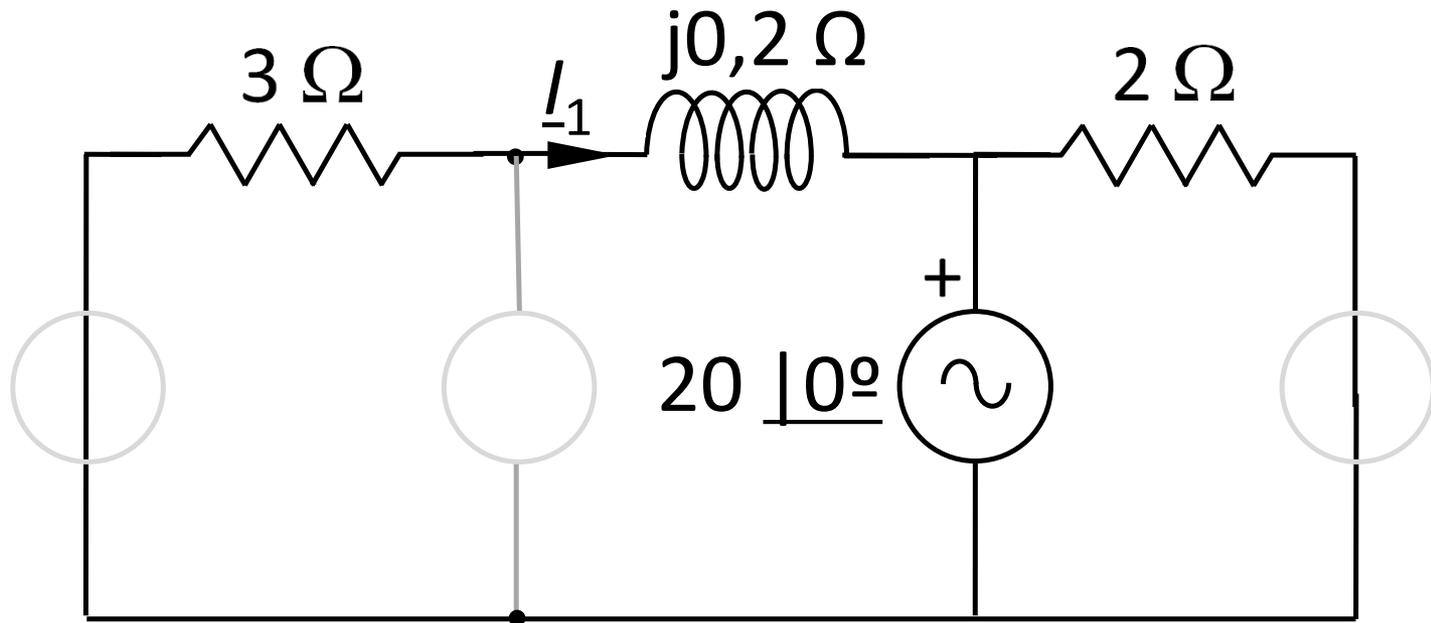
Nula impedancia de la bobina $Z_L(D) = LD = 0$

$$\underline{Z}_L \approx j \omega L = j \cdot 0 \cdot 0,02 = 0 \Omega$$

$$i_0(t) = 9 \text{ V} / 3 \Omega = 3 \text{ A}$$

Fuentes sinusoidales de pulsación

$$\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

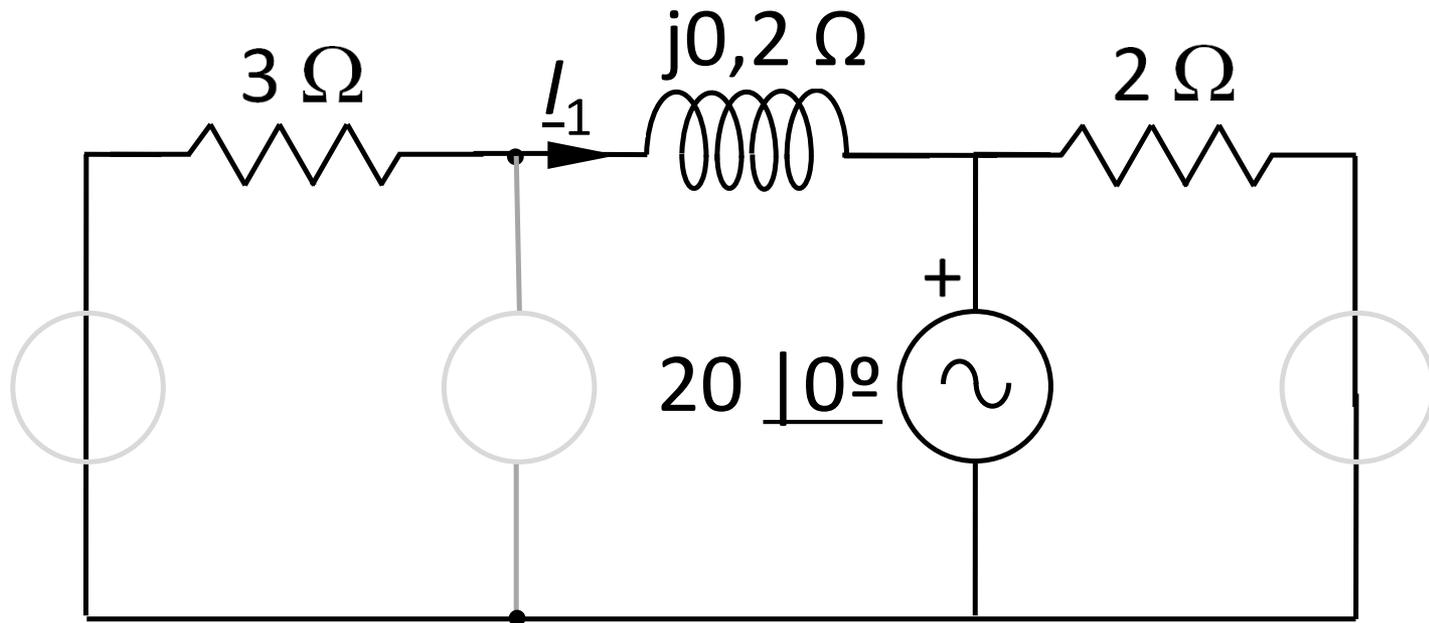


$$e_g(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ sen}(10t) \text{ V}$$

$$(3 + j 0,2) \underline{I}_1 = -20 \underline{\angle 0^\circ} \Rightarrow \underline{I}_1 = -20 \underline{\angle 0^\circ} / (3 + j 0,2)$$

Fuentes sinusoidales de pulsación

$$\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$



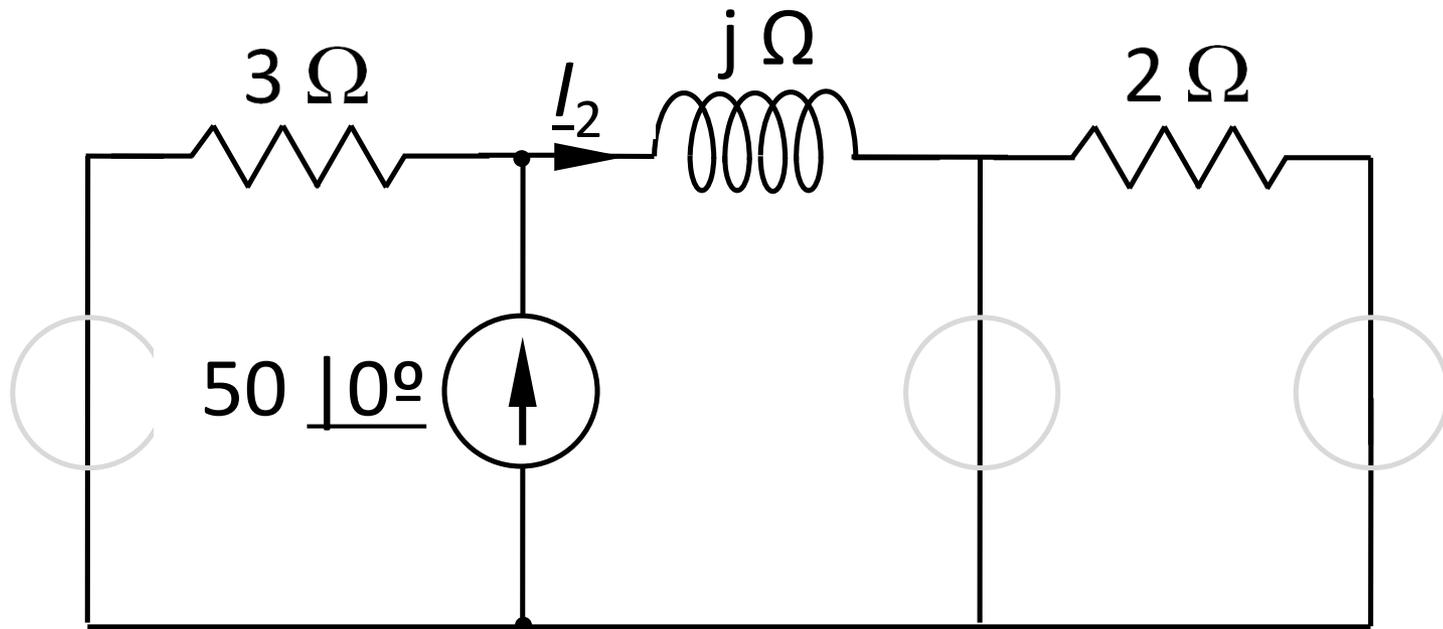
$$(3 + j 0,2) \underline{i}_1 = -20 \angle 0^\circ \rightarrow \underline{i}_1 = -20 \angle 0^\circ / (3 + j 0,2)$$

$$\underline{i}_1 = 6,66 \angle +176,2^\circ$$

$$i_1(t) = 6,66 \cdot \sqrt{2} \text{ sen}(10t + 176,2^\circ \cdot \pi / 180^\circ) \text{ A}$$

Fuentes sinusoidales de pulsación

$$\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$$

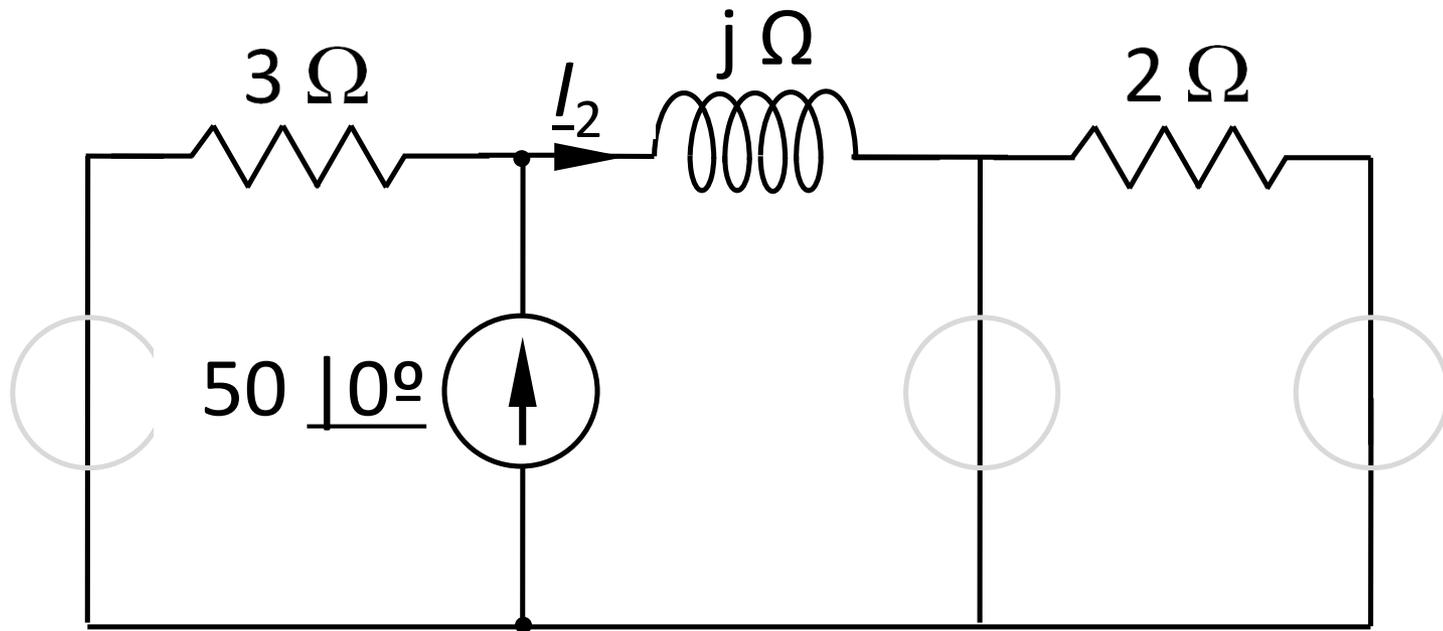


$$i_g(t) = 50 \sqrt{2} \cos(50t) \text{ A}$$

Cálculo de I_2 por nudos, por divisor de corriente...

Fuentes sinusoidales de pulsación

$$\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$$



Divisor intensidad: $I_2 = 50 \angle 0^\circ \frac{\frac{1}{j}}{\frac{1}{j} + \frac{1}{3}} = 47,4 \angle -18,4^\circ$

$$i_2(t) = 47,4 \cdot \sqrt{2} \cos(50t - 18,4^\circ \cdot \pi / 180^\circ) \text{ A}$$

Resultado = suma de expresiones temporales (trigonométricas)

$$\begin{aligned}i(t) &= i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) = \\ &= 3 + 6,66 \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen}(10t + 176,2^\circ \cdot \pi / 180^\circ) \\ &+ 47,4 \cdot \sqrt{2} \operatorname{cos}(50t - 18,4^\circ \cdot \pi / 180^\circ) \text{ A}\end{aligned}$$

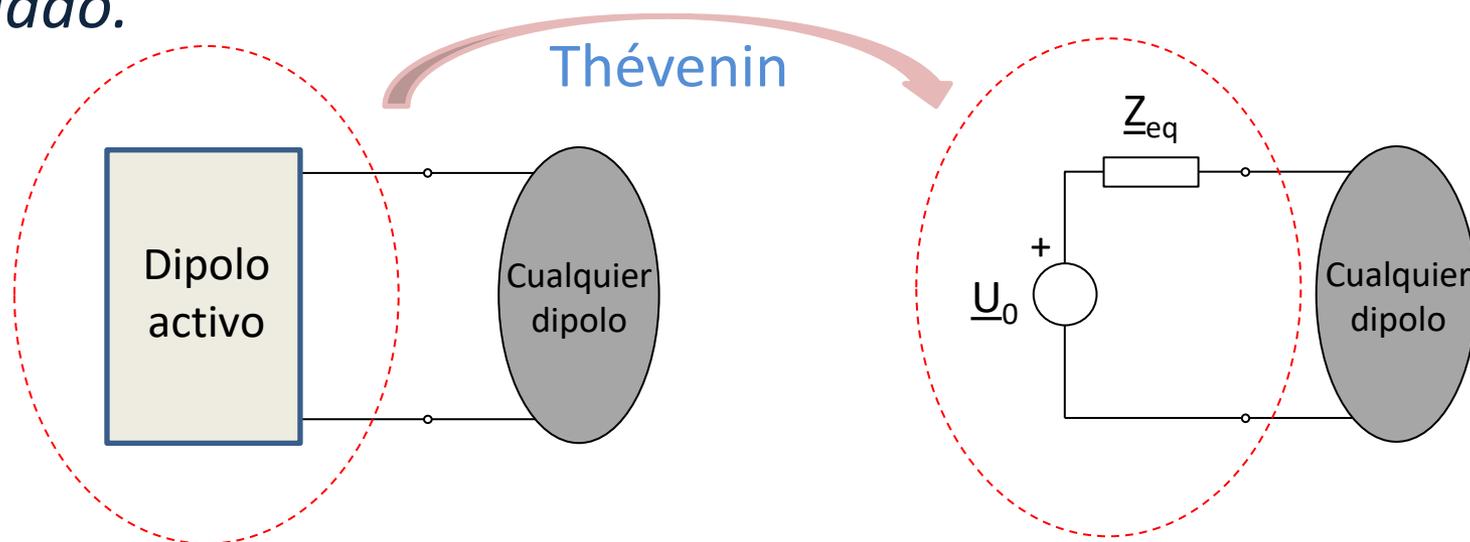


NO SUMAR FASORES DE DISTINTAS ω



6.10.2. Teorema de Thévenin

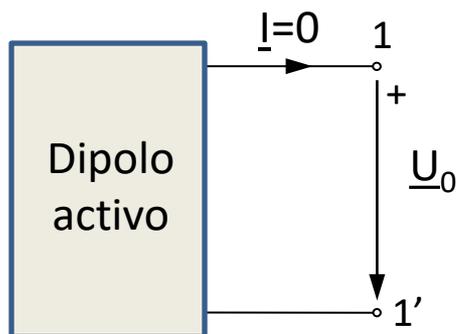
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de tensión**, formada por, una fuente ideal de tensión de valor la tensión que aparece entre los terminales del dipolo activo si éstos se encuentran a circuito abierto, y en serie una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



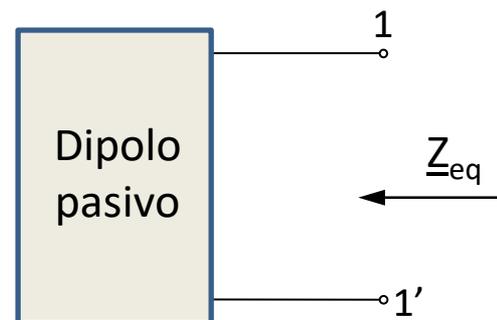
6.10.2. Teorema de Thevenin

- *Determinación de los valores de la fuente:*

Dipolo activo a circuito abierto



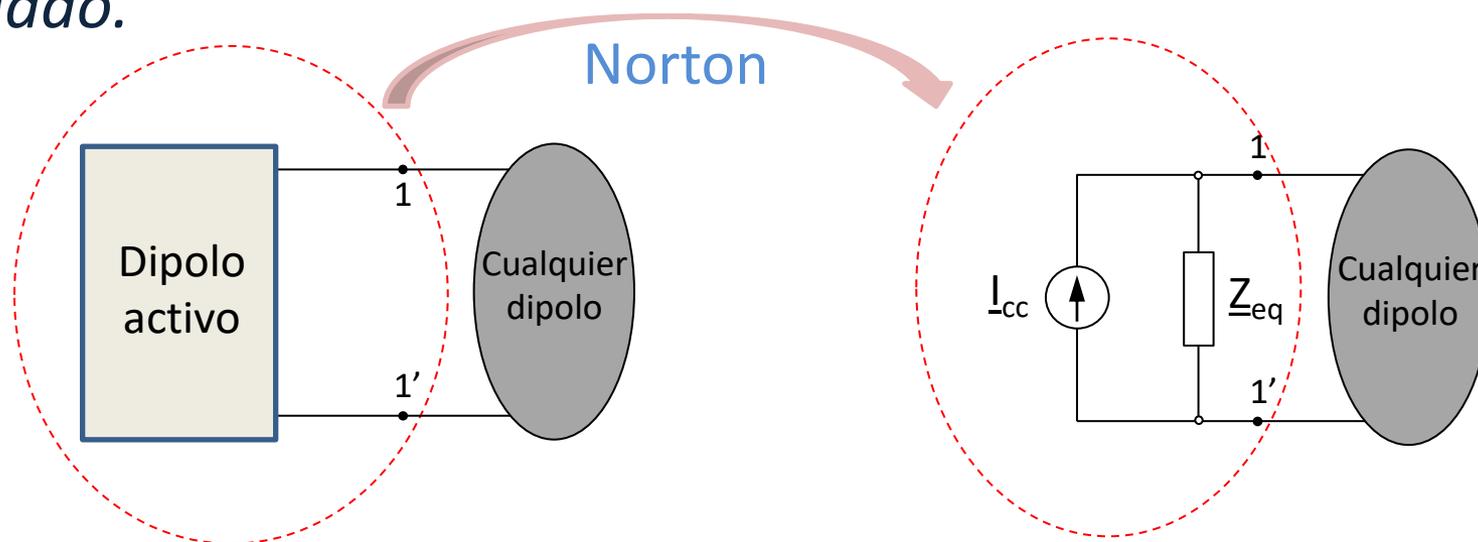
Dipolo pasivo



- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado, se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*

6.10.3. Teorema de Norton

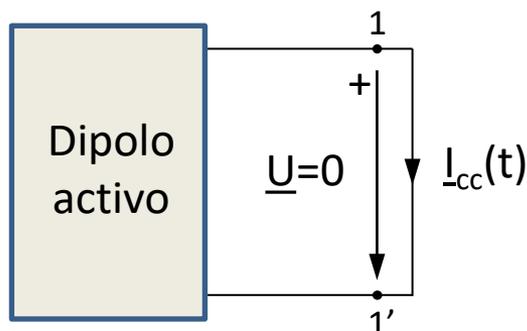
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de intensidad**, formada por, una fuente ideal de intensidad de valor la intensidad que circula entre los terminales del dipolo activo si éstos se cortocircuitan, y en paralelo una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



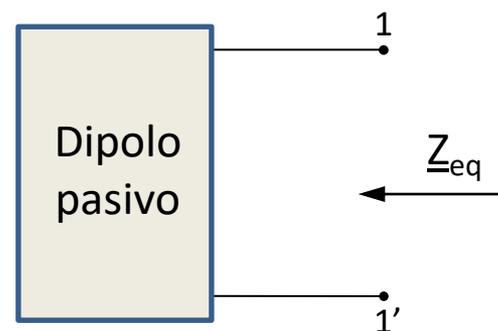
6.10.3. Teorema de Norton

- *Determinación de los valores de la fuente real:*

Dipolo activo en cortocircuito



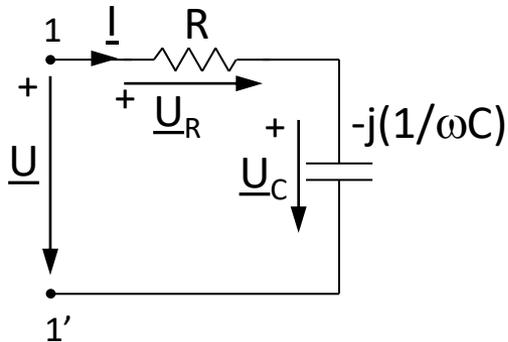
Dipolo pasivo



- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*

6.11. Estudio de circuitos básicos en RES

6.11.1. Circuito RC



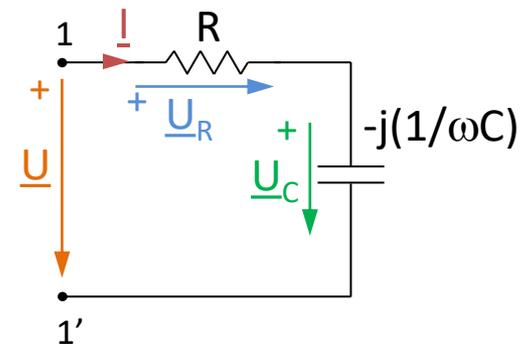
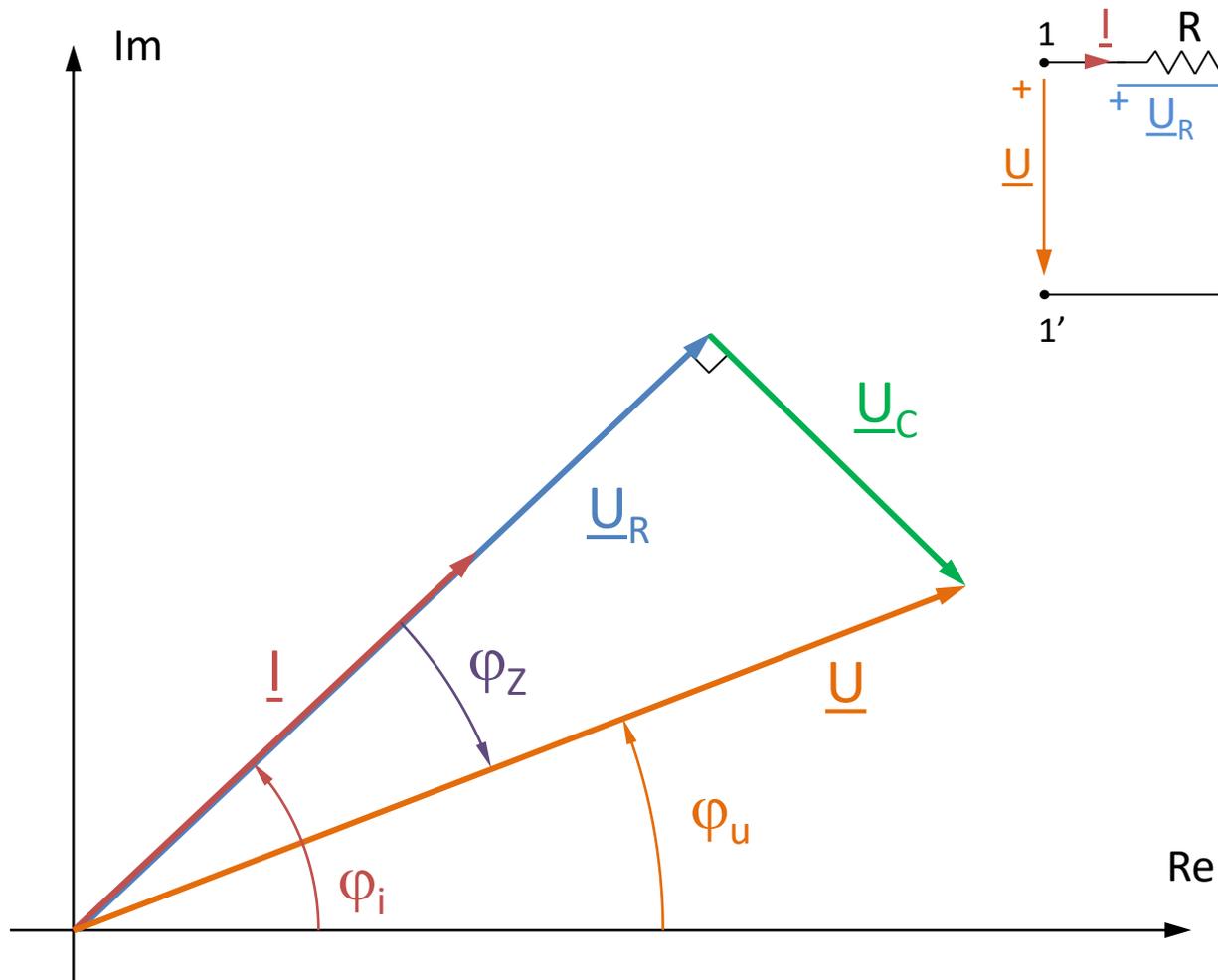
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R\underline{I} + \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}$$

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi_Z = \arctg \frac{1}{\omega C R} < 0 \end{cases}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_Z \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i \end{cases}$$

- La tensión **retrasa** a la intensidad un ángulo igual al argumento de la impedancia φ_Z .

6.11.1. Circuito RC

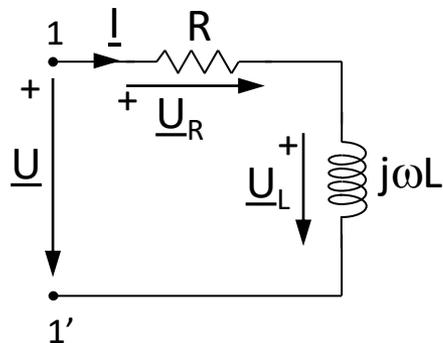


Beyond The Mechanical Universe-Episode 38: Alternating Current (12:58-14:07)



<https://youtu.be/P-uyKrPIH9Q>

6.11.2. Circuito RL



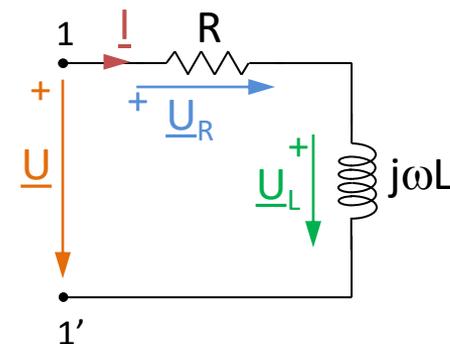
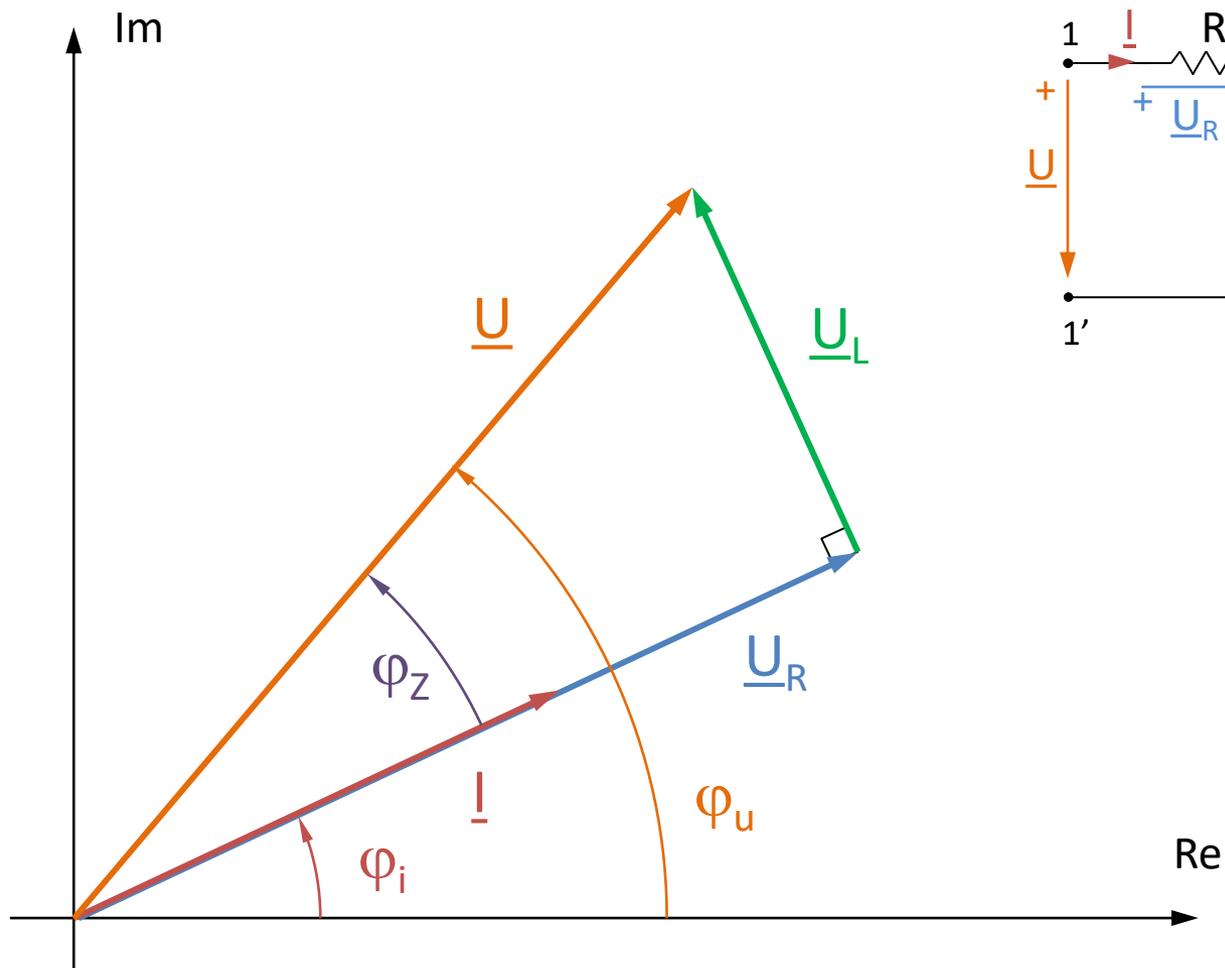
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} = (R + j\omega L)\underline{I}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi_z = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0 \end{cases}$$

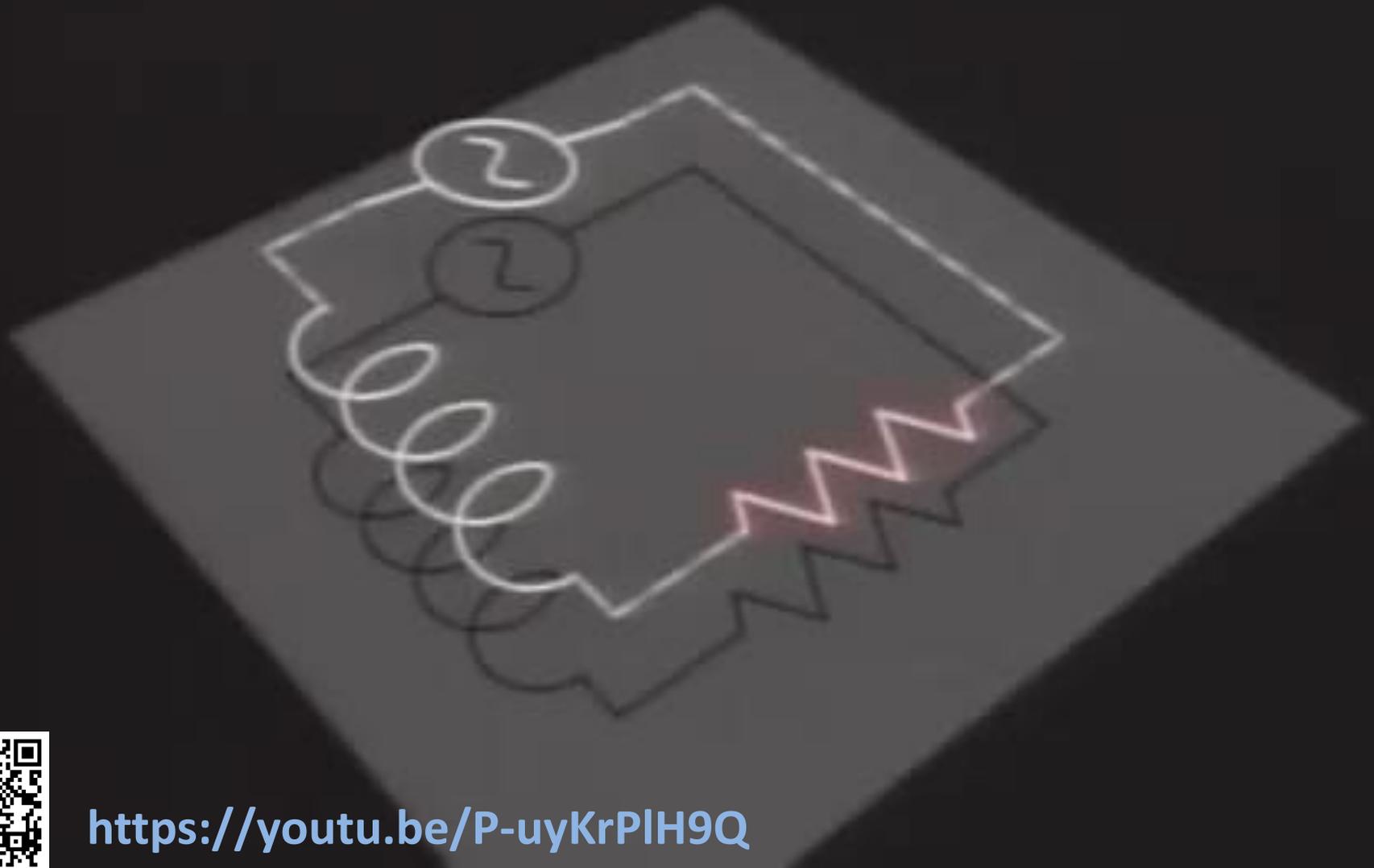
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_z \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i \end{cases}$$

- La tensión adelanta a la intensidad un ángulo igual al argumento de la impedancia φ_z .

6.11.2. Circuito RL

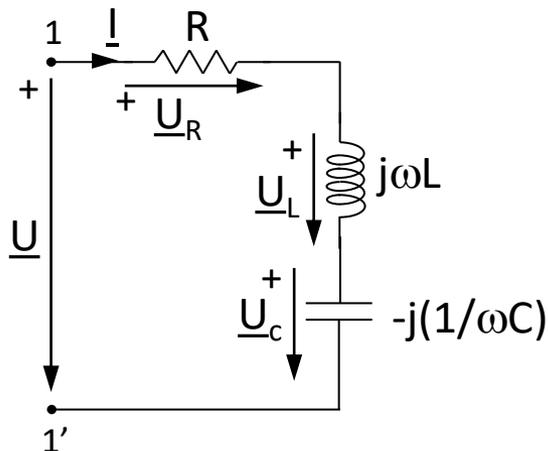


Beyond The Mechanical Universe-Episode 38: Alternating Current (12:58-14:07)



<https://youtu.be/P-uyKrPIH9Q>

6.11.3. Circuito RLC



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} - j\frac{1}{\omega C}\underline{I} =$$

$$= \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I}$$

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \varphi_z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \omega L > \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z > 0 \\ \text{si } \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z = 0 \\ \text{si } \omega L < \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z < 0 \end{array} \right.$$

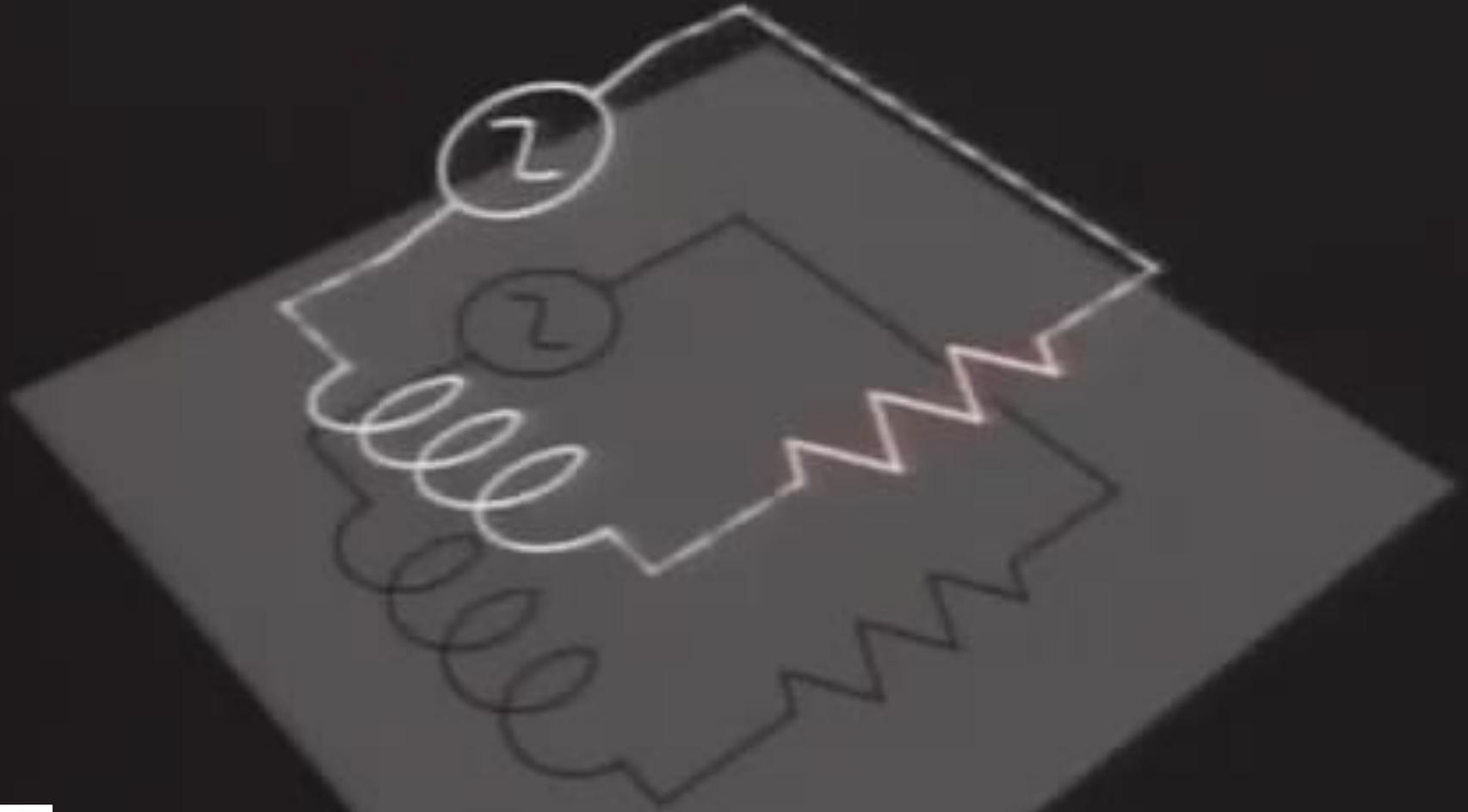
6.11.3. Circuito RLC

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_z \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varphi_z > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i \\ \text{si } \varphi_z = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i \\ \text{si } \varphi_z < 0 \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i \end{cases} \end{cases}$$

- *En función del valor del condensador, de la bobina y de la pulsación ω , el ángulo de la impedancia equivalente puede ser mayor, menor o igual cero, y, por lo tanto, la tensión puede adelantar, retrasar o estar en fase, respectivamente, respecto de la intensidad que recorre el circuito.*

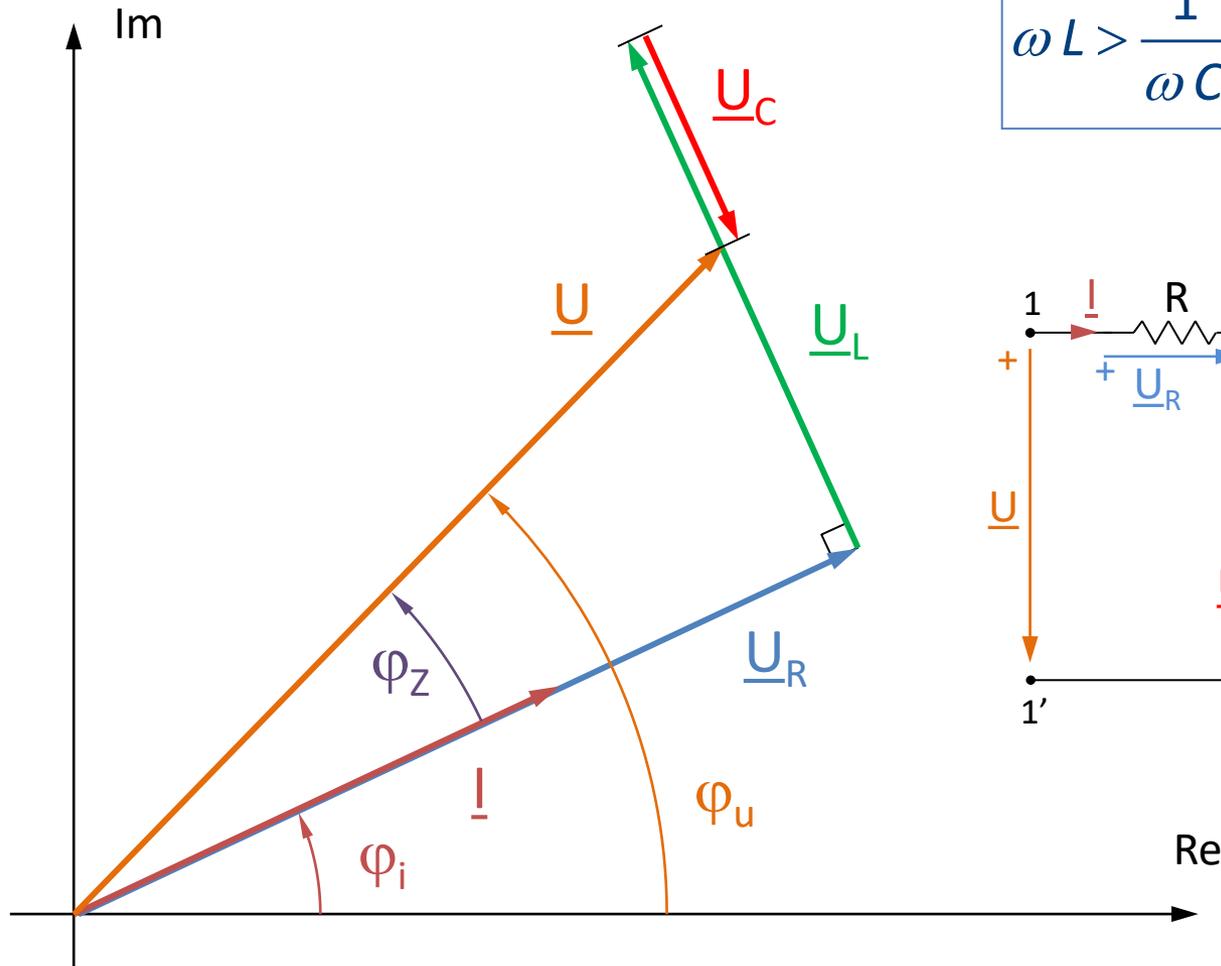
– Caso particular: si $\omega L = (1/\omega C)$ \longrightarrow **RESONANCIA**

Beyond The Mechanical Universe-Episode 38: Alternating Current (14:07-15:08)



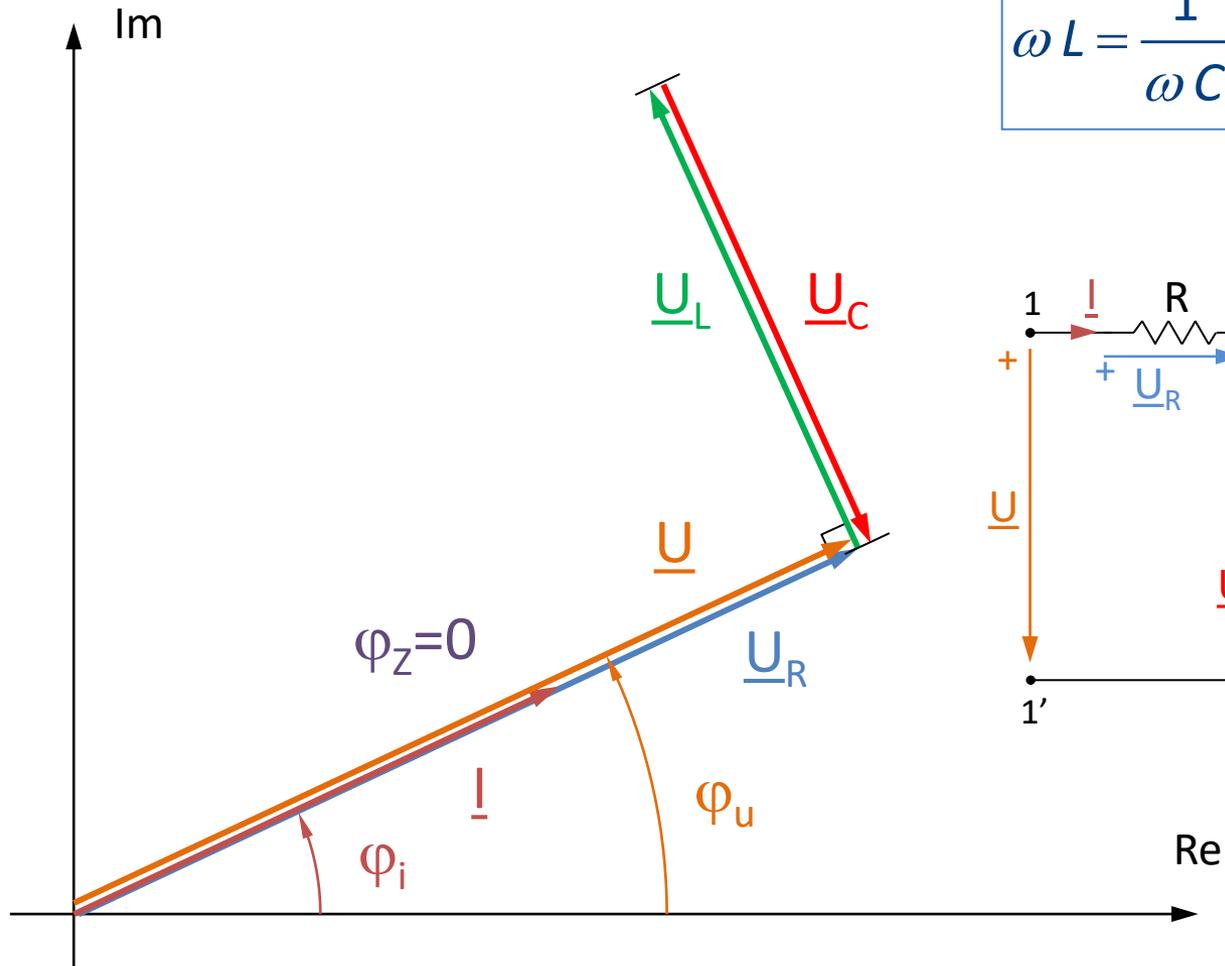
<https://youtu.be/P-uyKrPIH9Q>

6.11.3. Circuito RLC



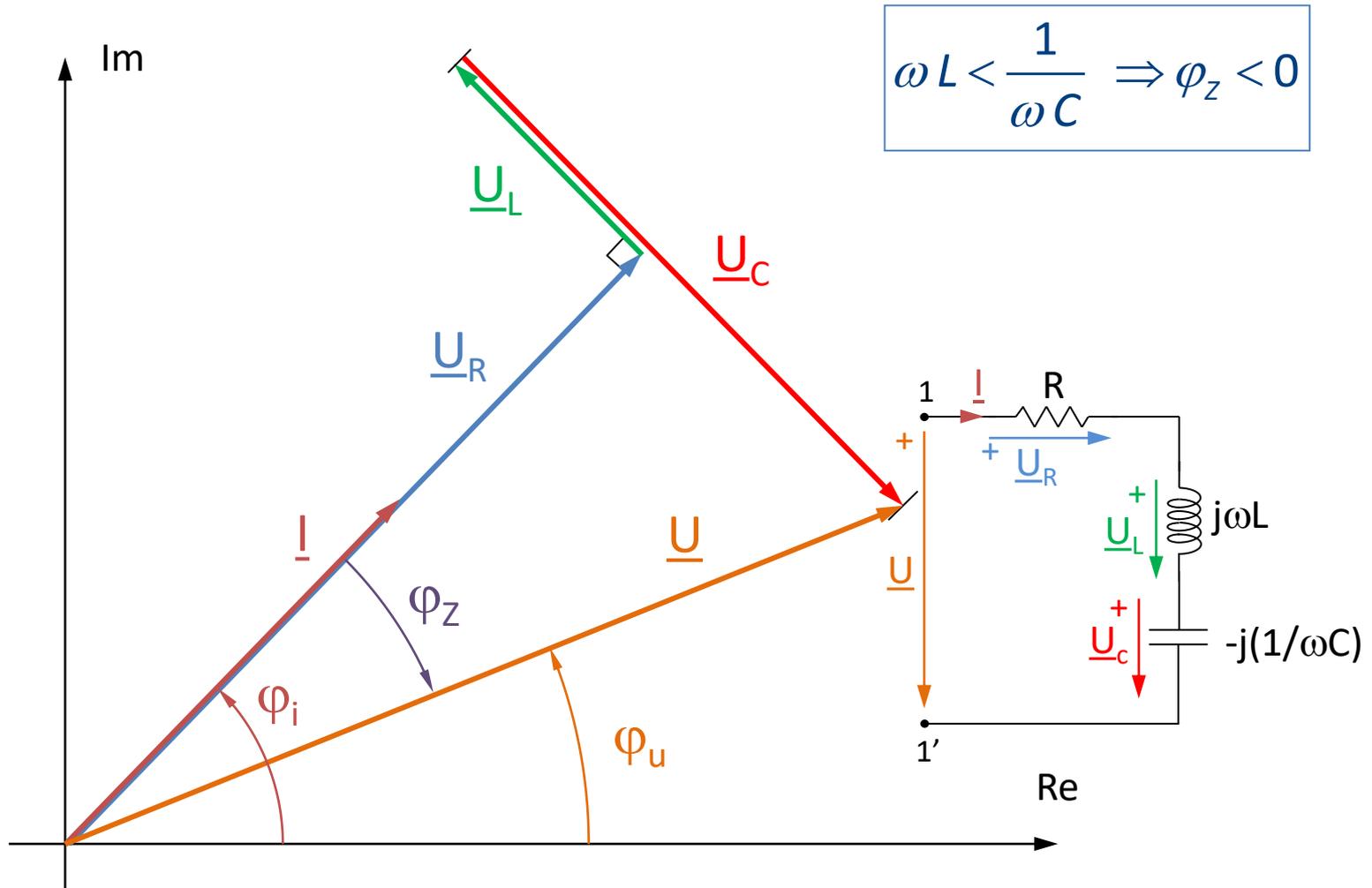
$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z > 0$$

6.11.3. Circuito RLC



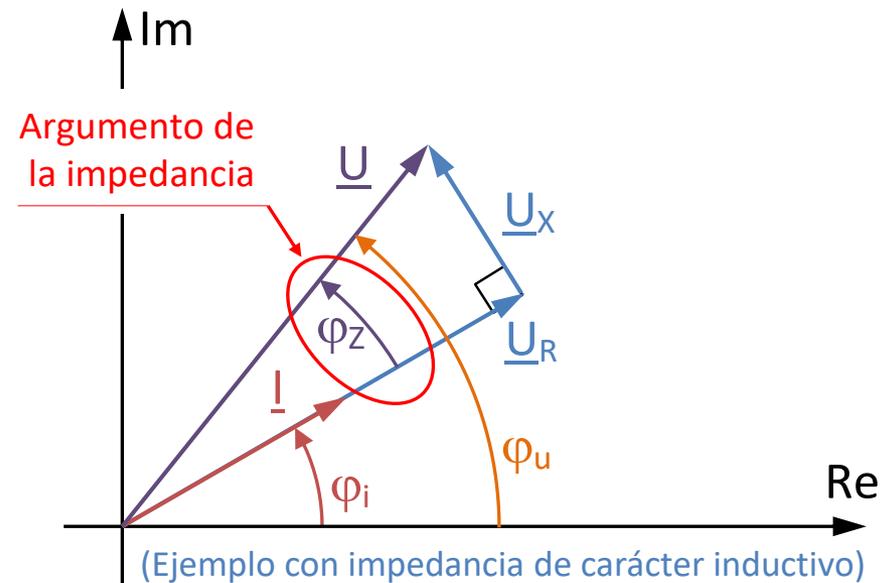
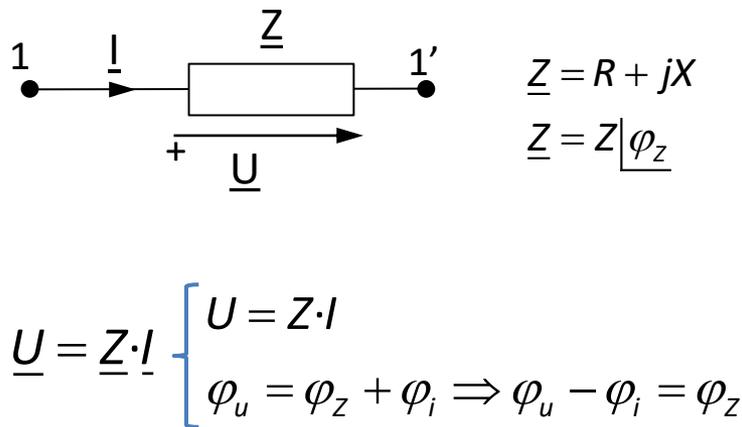
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_Z = 0$$

6.11.3. Circuito RLC



6.11.4. Resumen

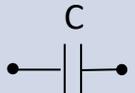
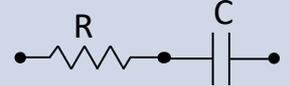
- *El desfase entre la tensión en bornes y la intensidad que circula por un dipolo pasivo (que puede representarse mediante su impedancia equivalente) es siempre igual al argumento de dicha impedancia equivalente.*



6.11.4. Resumen

- *En RES, se pueden clasificar los elementos pasivos (también llamados impedancias o cargas) en los tipos que se muestran en la tabla siguiente:*

6.11.4. Resumen

Tipo de Impedancia (Tipo de carga)	Constitución	Valor de \underline{Z} $\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I}$	\underline{U} respecto de \underline{I}
Puramente Resistiva	 Resistencia	$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R \angle 0^\circ$	\underline{U} está en fase con \underline{I}
Puramente Inductiva	 Bobina	$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L \angle +90^\circ$	\underline{U} adelanta 90° a \underline{I}
Puramente Capacitiva	 Condensador	$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C) \angle -90^\circ$	\underline{U} retrasa 90° respecto de \underline{I}
De carácter Inductivo	 Resistencia+Bobina	$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L > 0)$ $\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z = R + j\omega L$	\underline{U} adelanta un ángulo φ_Z respecto de \underline{I} ($0 < \varphi_Z < 90^\circ$)
De carácter Capacitivo	 Resistencia+Cond.	$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C < 0)$ $\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z = R - \frac{j}{\omega C}$	\underline{U} retrasa un ángulo $ \varphi_Z $ respecto de \underline{I} ($-90^\circ < \varphi_Z < 0$)

6.11.4. Resumen

- *En general, el valor de la impedancia de los elementos pasivos, tanto su módulo como su argumento, depende de la frecuencia.*
- *Si nos fijamos en una impedancia de carácter inductivo, tenemos que:*

$$\underline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi_Z = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0 \end{cases}$$

- *Si aumenta la frecuencia de la fuente de excitación, es decir, aumenta su pulsación, ω , tanto el módulo de la impedancia Z , como su argumento φ_Z , aumentan su valor.*

Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección Textos Docentes, vol. 58. Prensas Universitarias de Zaragoza.
- BAYOD, A.A.: **“Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal”**. Colección Textos Docentes, vol. 107. Prensas Universitarias de Zaragoza.



Fundamentos de Electrotecnia (Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza) by Miguel Angel García García; Joaquín Mur Amada; Iván Cristóbal Monreal; Nabil El Halabi Fares; is licensed under a [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).