Tema 7

Potencia en régimen estacionario sinusoidal

Fundamentos de Electrotecnia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

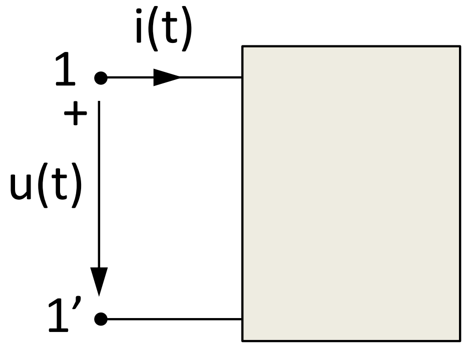
Índice

Tema 7.- Potencia en régimen estacionario sinusoidal.

7.1. Potencia instantánea

7.1. Potencia instantánea

- *Dado un dipolo, con las referencias de la figura:*



– Se define la ***potencia instantánea*** absorbida por el dipolo como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t)$$

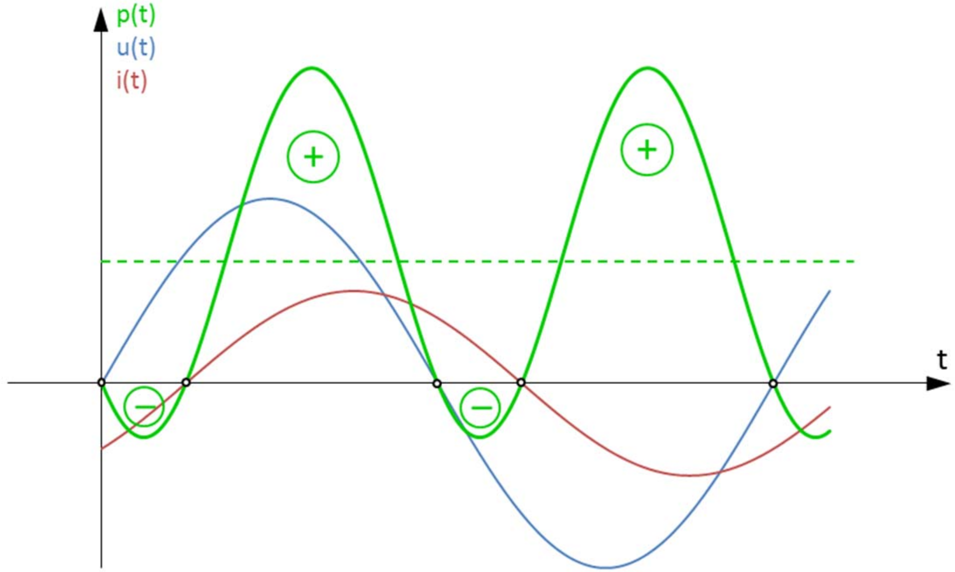
– Teniendo en cuenta que en un circuito en régimen estacionario sinusoidal:

$$u(t) = \sqrt{2}\, U \cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

U e *I* son valores eficaces

7.1. Potencia instantánea

- *Representando gráficamente estas formas de onda se tiene:*



  - La potencia instantánea es una función sinusoidal de frecuencia doble a la de la onda de tensión o intensidad
  - La potencia es cero en los instantes en que i(t)=0 ó u(t)=0
  - En los instantes en los que *p(t)* > 0, el dipolo absorbe energía de la fuente de excitación; mientras que en los instantes en los que *p(t)* < 0, es el dipolo el que devuelve parte de esta energía a la fuente de excitación

7.1. Potencia instantánea

- *Analíticamente:*

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)$$

- *Expresión que puede escribirse como:*

$$p(t) = u(t)i(t) = UI\left[\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)\right]$$

- *O también:*

$$p(t) = UI\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi) + UI\cos\varphi \qquad \textit{siendo } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

  – Notar que:
    – Los términos *U*, *I* y *cos* φ son constantes, no dependen del tiempo y, por lo tanto, el término *UI cos* φ también es una cantidad constante
    – La potencia instantánea se puede expresar como suma de dos términos, uno constante y otro dependiente del tiempo, sinusoidal, y de frecuencia doble de la de la tensión o la intensidad

7.1. Potencia instantánea

- *Integrando la potencia instantánea a lo largo del tiempo:*

$$w(t)-w(0)=\int_0^t p(t)dt=\int_0^t UI\cos\varphi\, dt+\int_0^t UI\cos(2\omega t+2\varphi_u-\varphi)dt$$

- *Integrando a lo largo de un número entero de periodos de la potencia, se ve que:*

$$\int_0^{nT} p(t)dt=\int_0^{nT} UI\cos\varphi\, dt+\int_0^{nT} UI\cos(2\omega t+2\varphi_u-\varphi)dt=nT\left(UI\cos\varphi+0\right)$$

  – El valor medio de la potencia instantánea coincide con el término constante.

  – Este término se denomina ***potencia media*** o ***potencia activa,*** y su producto por el tiempo es el valor de la energía total suministrada por la fuente de excitación al circuito durante el tiempo considerado.

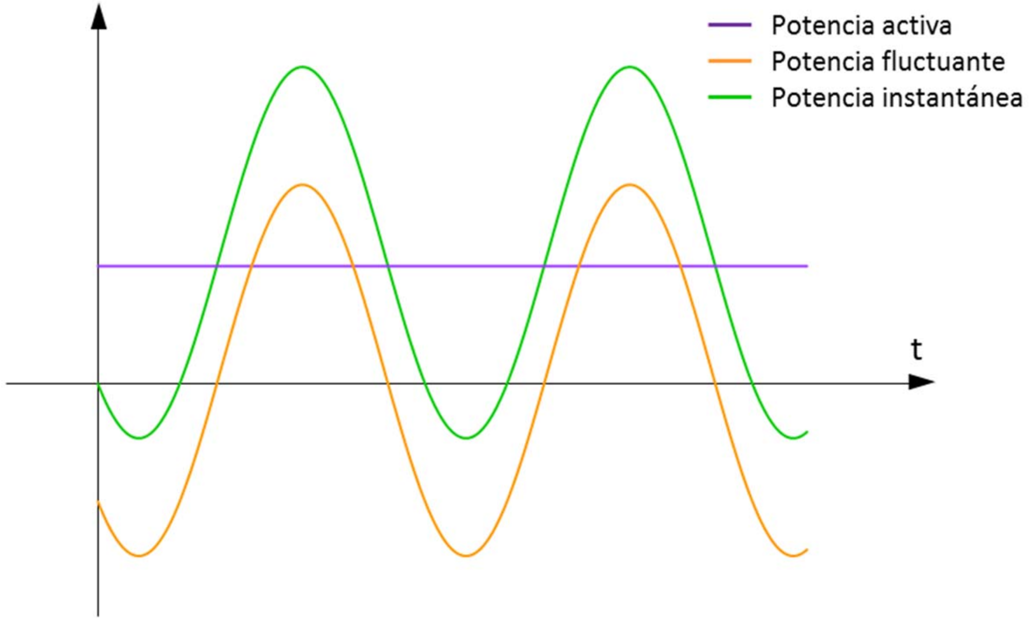
$$P=\frac{\text{Energía transferida}}{\text{intervalo de tiempo}}=\frac{nT\left(UI\cos\varphi\right)}{nT}=UI\cos\varphi$$

7.1. Potencia instantánea

- Al término sinusoidal se le denomina ***potencia fluctuante***, y muestra las fluctuaciones de la potencia instantánea en torno al valor medio.

$$F(t) = UI\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)$$

- Su integral, a lo largo de un número entero de periodos, es cero

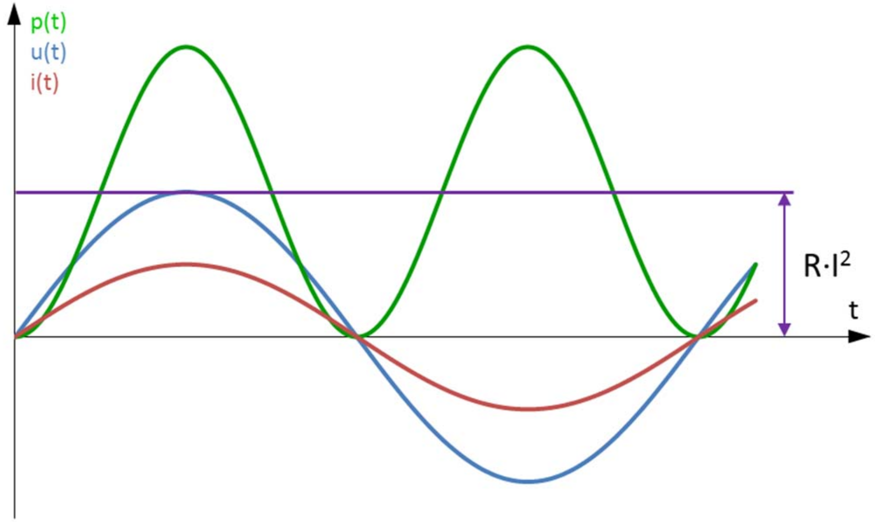


7.2. Potencia instantánea en dipolos pasivos básicos

7.2.1. Resistencia

$$u(t) = R \cdot i(t) \qquad \begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= \sqrt{2}\, RI \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

$$p_{abs}(t) = RI^2 \cos(2\omega t + 2\phi_i) + RI^2$$



Potencia media

$$P = RI^2$$

- En cualquier instante $p_{abs}(t)$ siempre es mayor o igual a cero, esto es, una resistencia siempre absorbe energía del circuito.
- Una resistencia no almacena energía

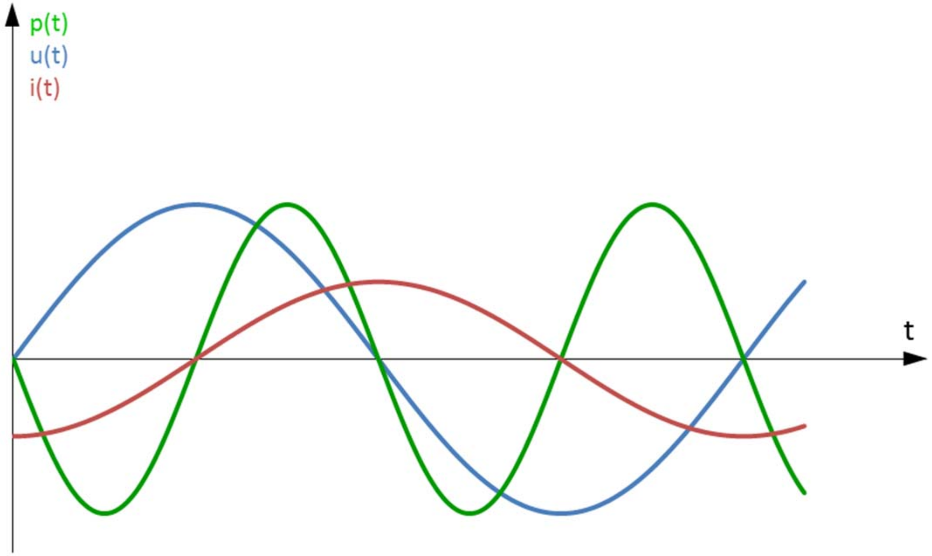
7.2.2. Bobina

$$u(t) = LD \cdot i(t)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \sqrt{2}\, I L\omega \cos(\omega t + \varphi_i + \pi / 2)$$

$$p_{abs}(t) = \omega L I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \pi / 2) + 0$$



Potencia media

P = 0

- Se efectúa constantemente una transferencia energética entre la fuente de excitación y el campo magnético asociado a la bobina.

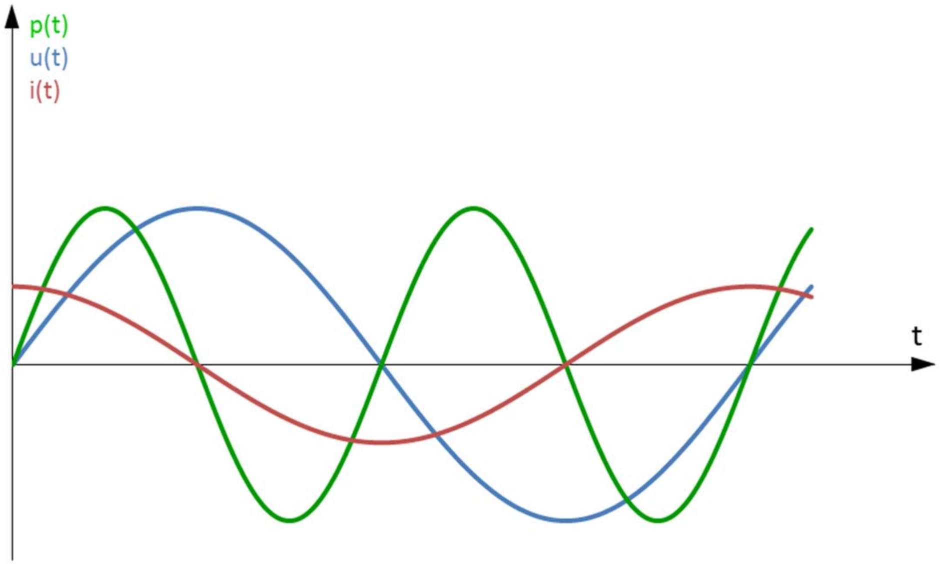
7.2.3. Condensador

$$i(t) = CD \cdot u(t)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \sqrt{2}\, I (1/\omega C) \cos(\omega t + \varphi_i - \pi/2)$$

$$p_{abs}(t) = (1/\omega C) I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i - \pi/2) + 0$$



Potencia media

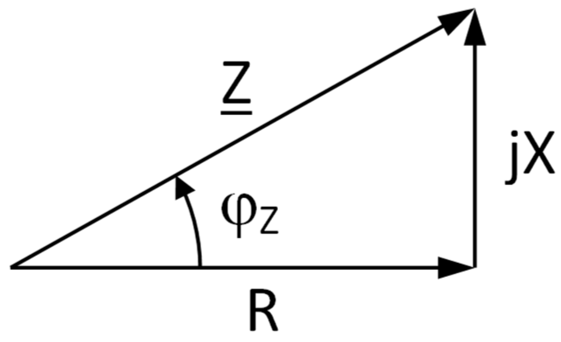
$P = 0$

- Se efectúa constantemente una transferencia energética entre la fuente de excitación y el campo eléctrico asociado al condensador

7.3. Expresión de la potencia en el campo complejo. Triángulo de potencias.

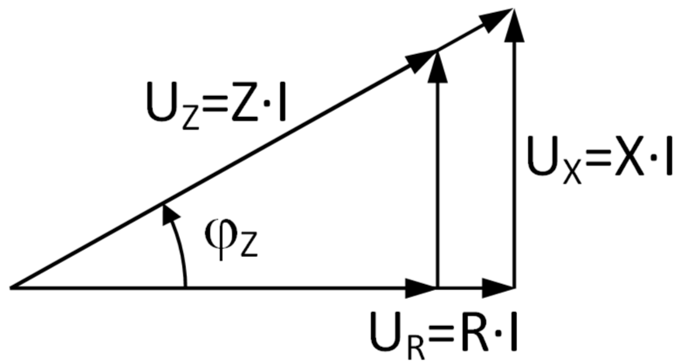
7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Un dipolo pasivo se puede representar mediante su impedancia compleja equivalente, de parte real R y parte imaginaria X.*



Triángulo de impedancias

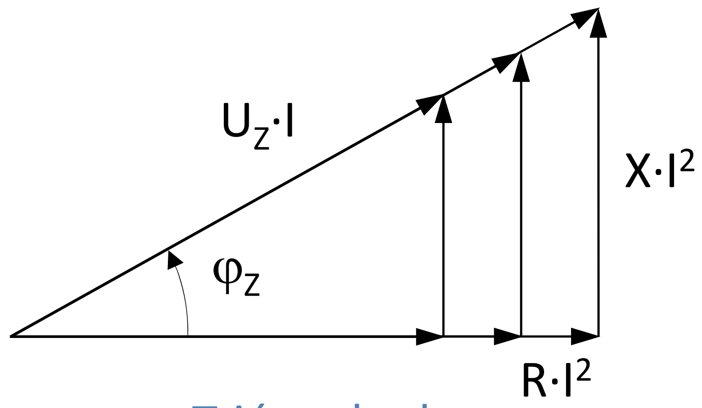
- *Multiplicando todos los lados del triángulo por la intensidad que entra en el dipolo*



Triángulo de tensiones

7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Multiplicando nuevamente los lados del triángulo de tensiones por la intensidad que entra en el dipolo*



Triángulo de potencias

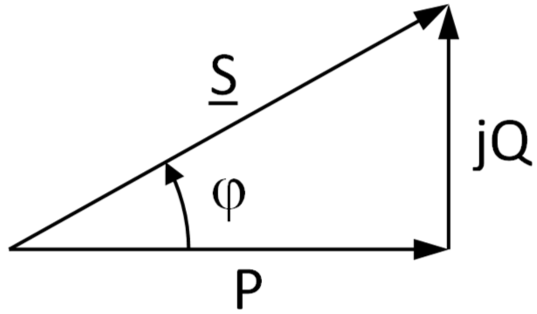
  - *Cateto horizontal*: Potencia media absorbida por la parte resistiva. ***Potencia Activa.***
  - *Cateto vertical*: Es el valor de la amplitud de las oscilaciones de la potencia absorbida en la componente reactiva del dipolo. ***Potencia Reactiva.***

$$Potencia\ activa: \quad P = RI^2 = UI\cos\varphi$$

$$Potencia\ reactiva: Q = XI^2 = UIsen\varphi$$

7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Dado el triángulo de potencias*



- *La hipotenusa de dicho triángulo, de longitud U·I, tiene dimensiones de potencia y se denomina* ***Potencia Compleja (*** $\underline{S}$ ***).***

$$\underline{S} = P + jQ = UI\cos\varphi + jUIsen\varphi$$

- *El módulo de dicho vector, S, recibe el nombre de* ***Potencia Aparente.***

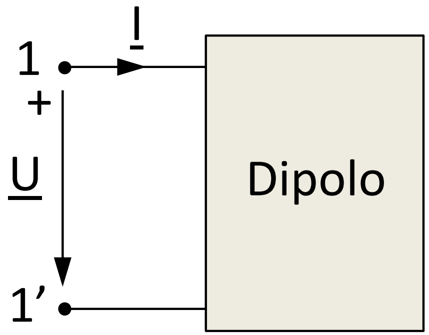
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

PRAUZ 449 (2021/22)

- ***Expresión general** de la potencia compleja*
  - Sean un dipolo y las referencias mostradas en la figura:



  - La potencia compleja absorbida por el dipolo se calcula:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}\,^*$$

donde $\underline{I}^*$ denota al conjugado de la intensidad compleja $\underline{I}$

  - Unidades: $\begin{cases} P: potencia\ activa: W \quad (Vatios) \\ Q: potencia\ reactiva: var \quad (Voltamperios\ reactivos) \\ S: potencia\ aparente: VA \quad (Voltamperios) \end{cases}$

7.3.1. *Expresión de la potencia en el campo complejo*

- *La potencia activa es la potencia consumida por un elemento y que se invierte en realizar un trabajo.*
- *Tanto la potencia aparente como la potencia reactiva* ***no tienen*** *significado físico. Se definen porque son útiles para los cálculos electrotécnicos y porque se pueden medir.*
  - La potencia reactiva es un indicador de la energía intercambiada en cada semiciclo entre los elementos que almacenan energía y la fuente de excitación.
  - La potencia aparente es un indicador de la disponibilidad o limitación de una instalación.

7.3.2. Triángulo de potencias

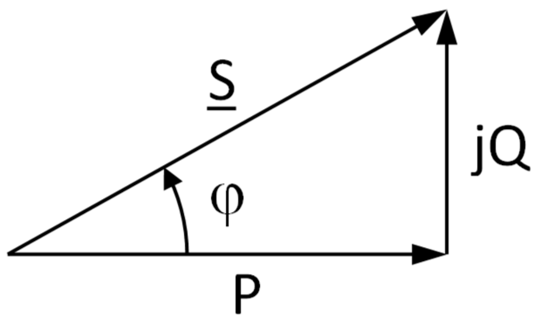
- *A partir del triángulo de potencias, se puede escribir:*

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

$$Q = P \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$$



$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

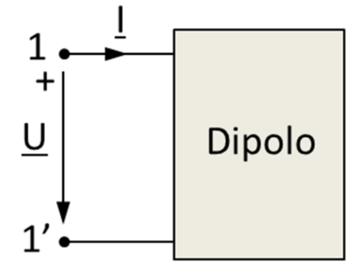
Dado que: $S = U \cdot I$

$$P = UI\cos\varphi$$

$$Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

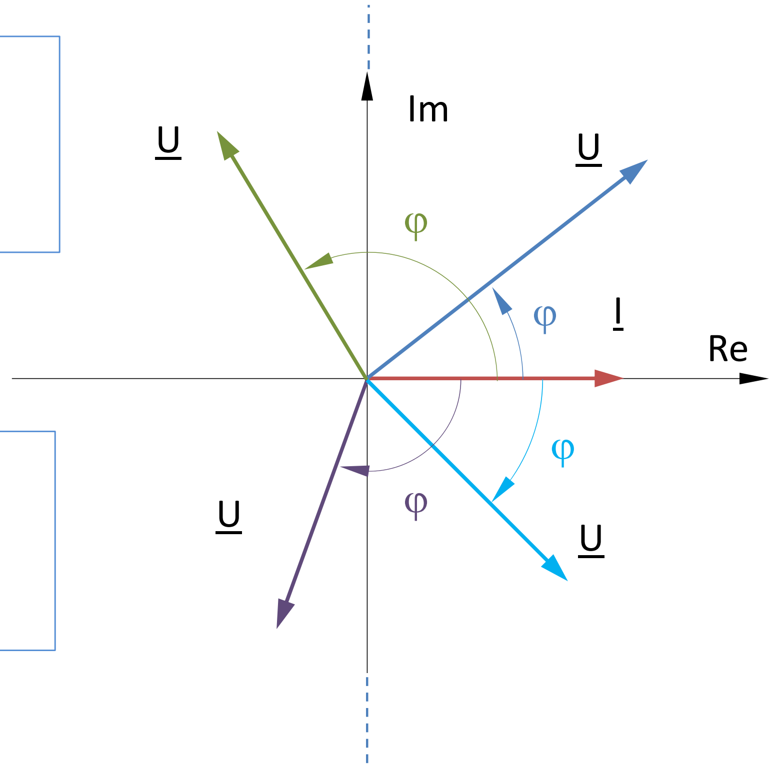
7.3.2. Triángulo de potencias

- *El signo de las potencias activa y reactiva absorbidas por un dipolo, depende del ángulo entre la tensión en bornes del dipolo y la intensidad que lo atraviesa. De esta manera y para las referencias indicadas, se tiene:*



$\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$
Pabs < 0 Generador
Qabs > 0 Absorbe Q

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$
Pabs > 0 Receptor
Qabs > 0 Inductivo



$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$
Pabs < 0 Generador
Qabs < 0 Cede Q

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$
Pabs > 0 Receptor
Qabs < 0 Capacitivo

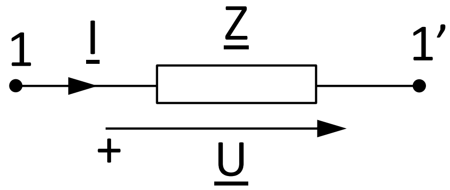
7.3.2. Triángulo de potencias

- *La especificación de la potencia en máquinas y equipos de corriente alterna es diversa y tiene origen práctico:*
  - En máquinas generadoras de corriente alterna y transformadores, se expresa su potencia en forma de potencia aparente (en VA, kVA, MVA). El conocimiento de esta potencia y de la tensión nominal, permite calcular la corriente máxima de diseño de la máquina
  - En motores de corriente alterna se especifica la tensión de alimentación y la potencia mecánica en el eje (en kW o en CV, 1CV = 736 W), de forma que, conociendo el rendimiento, permite saber la potencia activa que absorbe
  - En el caso de las reactancias, la potencia se expresa en forma de potencia reactiva (en var o kvar)

7.4. Potencia compleja en dipolos pasivos

7.4.1. Dipolo pasivo genérico

En términos de su impedancia equivalente:



$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \qquad \underline{Z} = R + jX \qquad \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) I^2 = RI^2 + jXI^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

$$\text{entonces: } \left[\begin{array}{l} P_{abs} = RI^2 \\ Q_{abs} = XI^2 \end{array} \right.$$

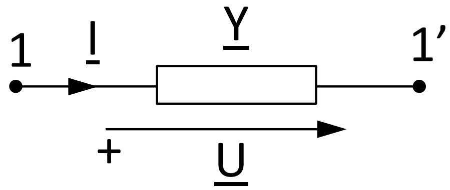
- *En un dipolo pasivo, **siempre R ≥ 0**, por lo que: $P_{abs} \geq 0$*
- *Sin embargo, puede ocurrir que:*

$$X > 0 \rightarrow Carácter\ \ inductivo \Rightarrow Q_{abs} > 0$$

$$X < 0 \rightarrow Carácter\ \ capacitivo \Rightarrow Q_{abs} < 0$$

7.4.1. Dipolo pasivo genérico

En términos de su admitancia equivalente:



$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \qquad \underline{Y} = G + jB \qquad \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U}(\underline{Y} \cdot \underline{U})^* = \underline{Y}^* \underline{U} \cdot \underline{U}^* = (G - jB)U^2 = GU^2 - jBU^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

$$\text{entonces:} \begin{cases} P_{abs} = GU^2 \\ Q_{abs} = -BU^2 \end{cases}$$

- *En un dipolo pasivo, **siempre G ≥ 0**, por lo que: $P_{abs} \geq 0$*
- *Sin embargo, puede ocurrir que:*

$$B < 0 \rightarrow Carácter\ \ inductivo \Rightarrow Q_{abs} > 0$$

$$B > 0 \rightarrow Carácter\ \ capacitivo \Rightarrow Q_{abs} < 0$$

7.4.2. Resistencia

$$\underline{Z} = R + jX = R$$

$$\underline{Y} = G + jB = G$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = RI^2 + 0 = \frac{U^2}{R} + 0$$

$$\boxed{P_{abs} = RI^2} \qquad \boxed{Q_{abs} = 0}$$

7.4.3. Bobina

$$\underline{Z} = R + jX = j\omega L$$

$$\underline{Y} = G + jB = -j\frac{1}{\omega L}$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 0 + j\omega L I^2 = 0 + j\frac{U^2}{\omega L}$$

$$\boxed{P_{abs} = 0} \qquad \boxed{Q_{abs} = \omega L I^2 = \frac{U^2}{\omega L} \geq 0}$$

7.4.4 . Condensador

$$\underline{Z} = R + jX = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Y} = G + jB = j\omega C$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 0 - j\frac{I^2}{\omega C} = 0 - jU^2\omega C$$

$$\boxed{P_{abs} = 0}$$

$$\boxed{Q_{abs} = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega C U^2 \leq 0}$$

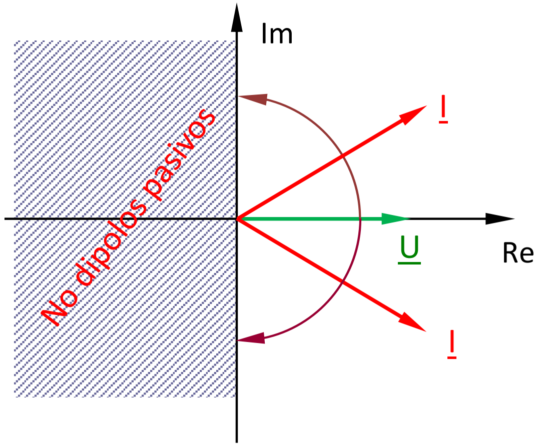
Dipolo pasivo genérico:

Dipolos pasivos (cargas) ➡ $\underline{Z} = Z\lfloor\varphi_Z$

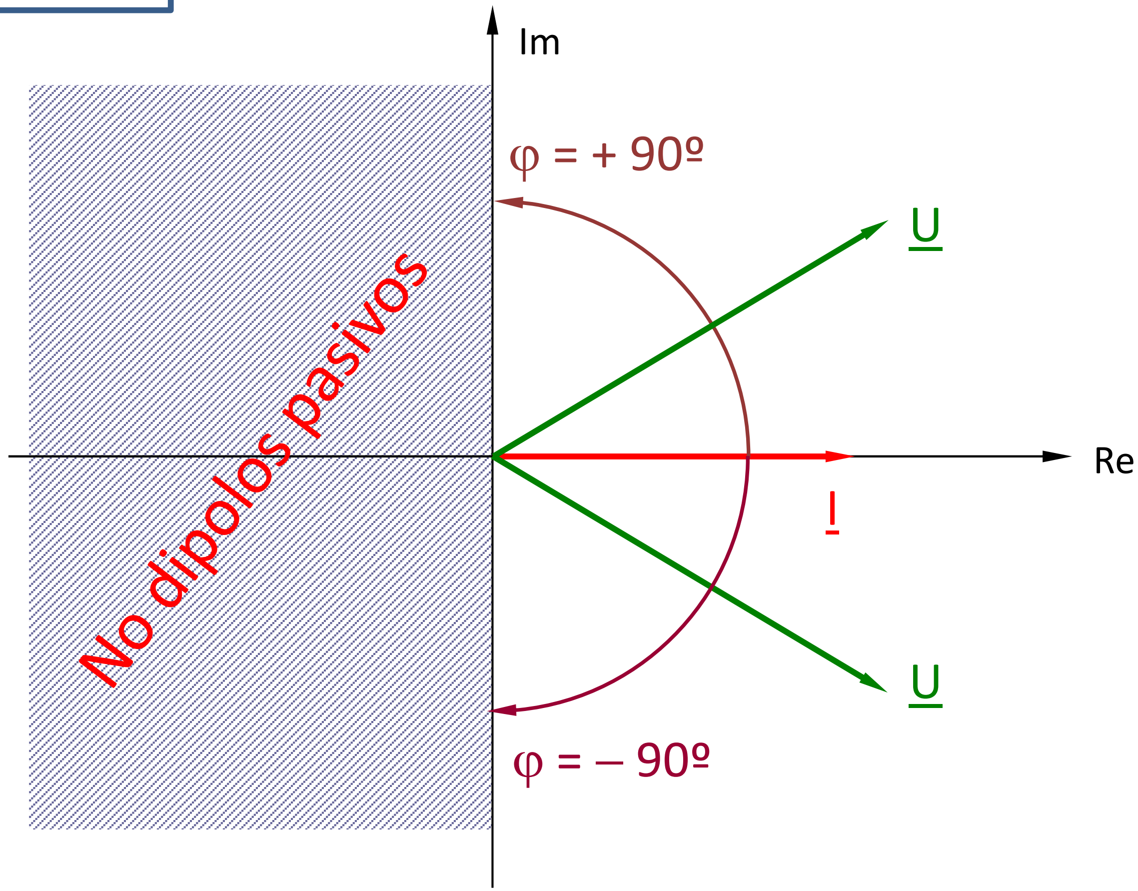
Como:

$\boxed{\text{SIEMPRE} \quad -90º \leq \varphi_Z \leq +90º}$

y $\varphi_u = \varphi_Z + \varphi_i$

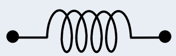
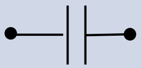
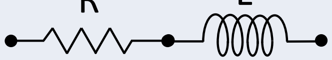
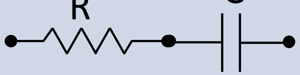


Tensión como origen de fases



Intensidad como origen de fases

Resumen potencias en dipolos pasivos

Tipo de Impedancia (Tipo de carga)	Constitución	Valor de $\underline{Z}$	*Potencia activa y reactiva*
Puramente Resistiva	 R Resistencia	$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R \angle 0º$	$P_{abs} = R \cdot I^2 = U^2/R > 0$ $Q_{abs} = 0$
Puramente Inductiva	 L Bobina	$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L \angle 90º$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I^2 = U^2/\omega L > 0$
Puramente Capacitiva	 C Condensador	$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C) \angle -90º$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I^2 =$ $= U^2/-(1/\omega C) < 0$
De carácter Inductivo	 R L Resistencia+Bobina	$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L>0)$ $\underline{Z} = R + j\omega L$	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I_L^2 = U_L^2/\omega L > 0$
De carácter Capacitivo	 R C Resistencia+Cond.	$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C<0)$ $\underline{Z} = R - j(1/\omega C)$	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I_C^2 =$ $= U_C^2/-(1/\omega C) < 0$

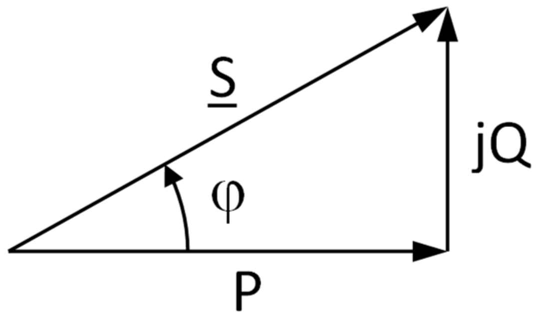
7.5. Factor de potencia

7.5.1 Definición del factor de potencia

- *En general, en un dipolo, la potencia activa es menor que la potencia aparente*
- *Se define el* ***Factor de potencia*** *como la relación:*

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

- *En régimen estacionario sinusoidal:*



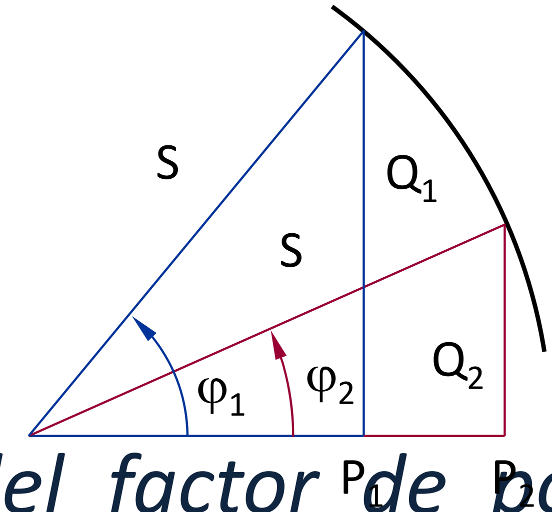
$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$$

7.5.1 Definición del factor de potencia

- *El ángulo φ es el ángulo entre la tensión compleja en bornes de un dipolo y la intensidad compleja que lo atraviesa. Si el dipolo es pasivo, este ángulo es el argumento de su impedancia equivalente.*
- *La tensión de trabajo de un generador es una magnitud esencialmente constante, y viene dada por el diseño de su aislamiento y por el campo magnético admisible en su interior, mientras que su corriente máxima viene dada por la sección de sus conductores.*

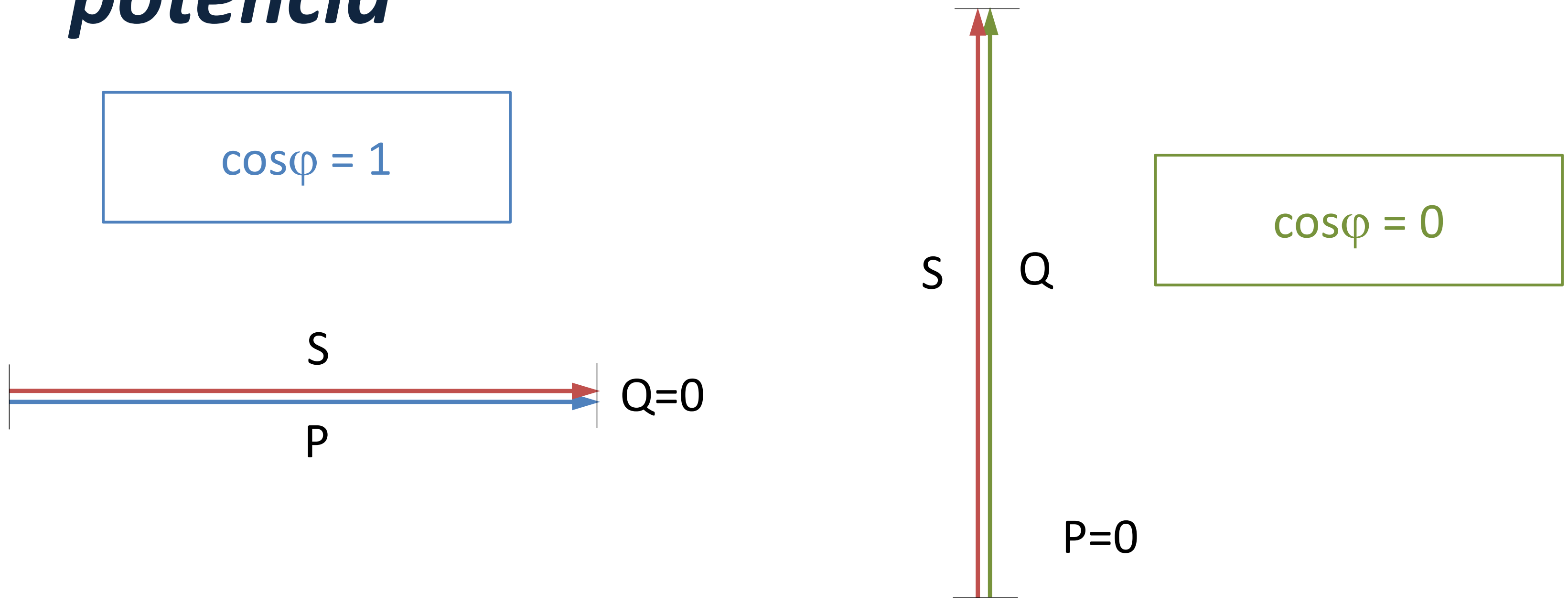
7.5.1 Definición del factor de potencia

- *Así pues, la medida de la capacidad de un generador, que viene dada por su potencia aparente, es esencialmente constante.*



- *Dependiendo del factor de potencia con el que trabaje una instalación, ésta estará mejor o peor aprovechada.*

7.5.1 Definición del factor de potencia



- *Observando los dos casos límite: (aprovechamiento)*
  - En el caso de factor de potencia unidad, la potencia activa y la potencia aparente coinciden, con lo cual, la potencia reactiva consumida es cero.
  - En el caso de factor de potencia igual a cero, la potencia reactiva y la potencia aparente coinciden, con lo que la potencia activa es nula

7.5.2. *Efectos de un factor de potencia bajo*

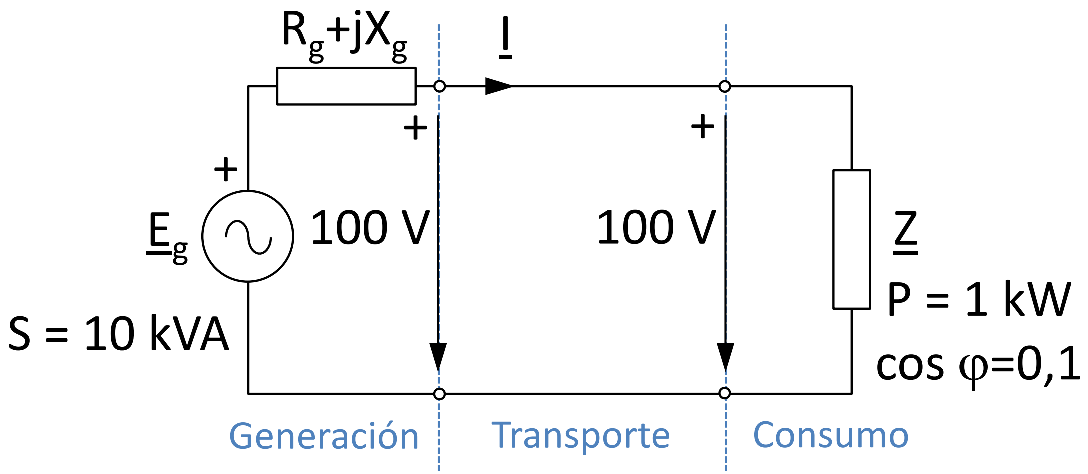
- *Para una misma potencia activa, a menor factor de potencia, mayor es la intensidad que circula por las líneas.*

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} \quad \text{si P, U=ctes y cos } \varphi\downarrow \;\Rightarrow\; \text{I}\uparrow$$

- *Este incremento de la intensidad, como consecuencia de un factor de potencia bajo, lleva, entre otros efectos, a un aumento de pérdidas por efecto Joule en los conductores del generador y en las líneas de transporte de energía. Además, aumentan las caídas de tensión en dichas líneas de transporte.*

7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

- *Otro efecto que se produce, a causa de un factor de potencia bajo, es la saturación de la capacidad de un sistema.*
- *Supongamos el sistema:*



Generador:

$$S = UI_{max} = 10000\,VA$$

$$I_{max} = \frac{S}{U} = \frac{10000}{100} = \underline{100\,A}$$

Carga:

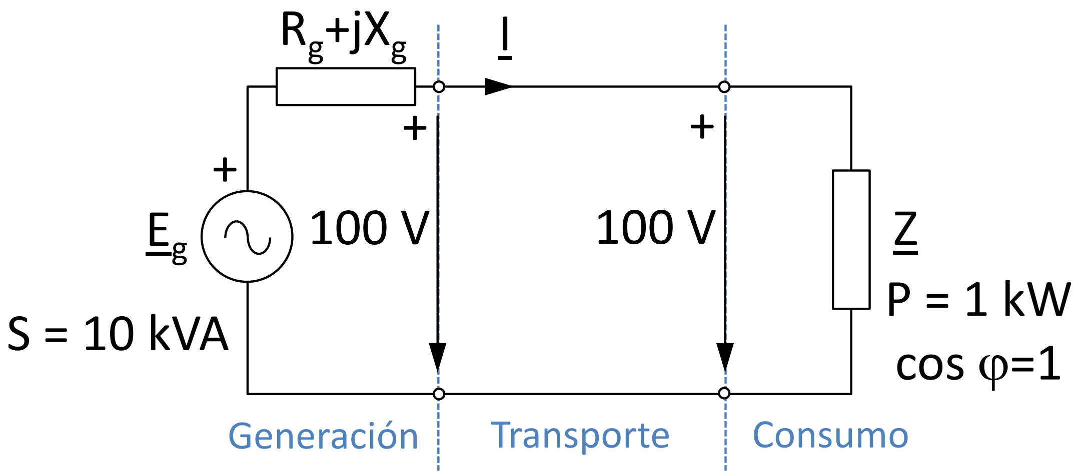
$$P = UI\cos\varphi = 1000\,W$$

$$I = \frac{P}{U\cos\phi} = \frac{1000}{100{\cdot}0{,}1} = \underline{100\,A}$$

Sistema saturado

7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

- *El mismo sistema operando con mejor factor de potencia:*



«Sobran» 90 A

Generador:

$$S = UI_{max} = 10000\,VA$$

$$I_{max} = \frac{S}{U} = \frac{10000}{100} = \underline{100\,A}$$

Carga:

$$P = UI\cos\varphi = 1000\,W$$

$$I = \frac{P}{U\cos\phi} = \frac{1000}{100 \cdot 1} = \underline{10\,A}$$

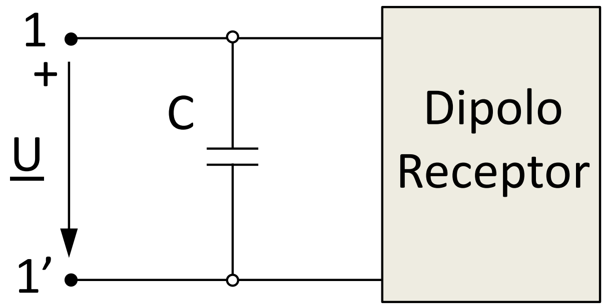
– En la primera situación, con un consumidor se alcanza la capacidad máxima del sistema. En el segundo caso es posible alimentar a más usuarios con el mismo sistema.

7.5.2. *Efectos de un factor de potencia bajo*

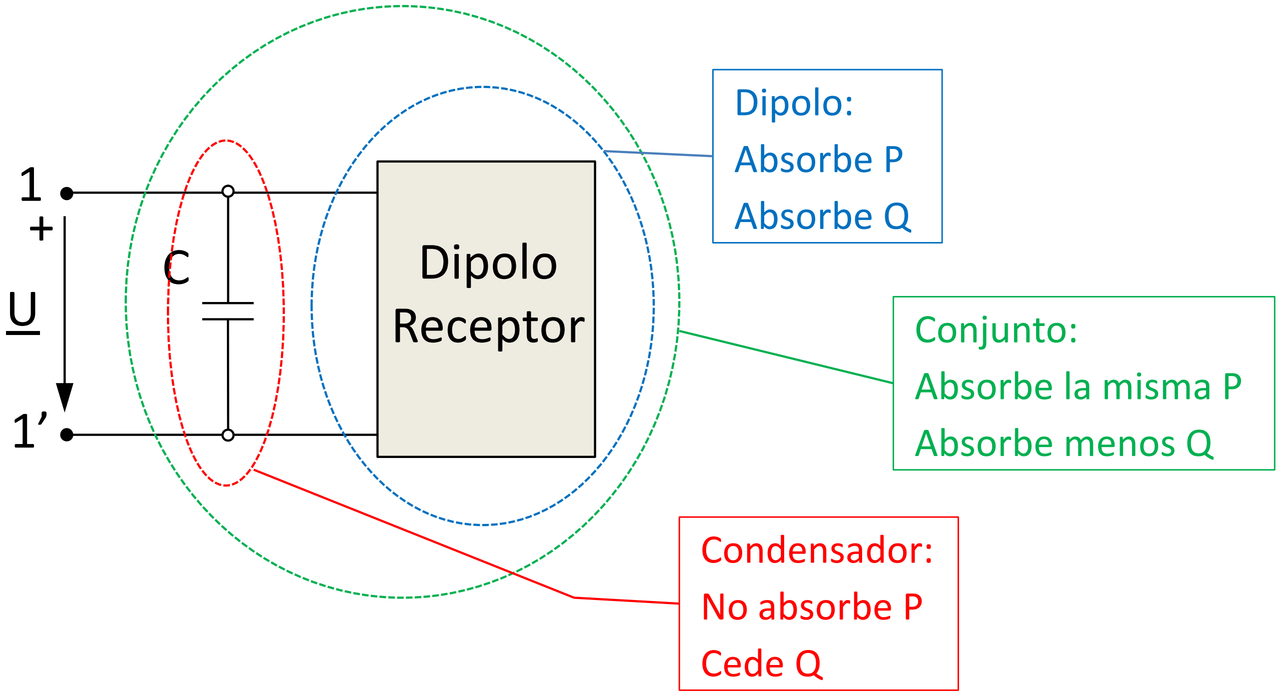
- *Como se ha visto:*
  - Las pérdidas en los sistemas eléctricos (tanto en la generación como en el transporte) aumentan cuando se dan factores de potencia bajos.
  - El aprovechamiento de las instalaciones generadoras y de transporte de energía eléctrica es mucho peor si se dan factores de potencia bajos.
- *El RETB (Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión) obliga a que los receptores trabajen con un factor de potencia mayor de 0,9.*
- *Si el f.d.p. es menor, será necesario"compensar el factor de potencia" de una instalación.*

7.5.3. Compensación del factor de potencia

- *Dado que las líneas de transporte y la mayoría de receptores presentan carácter inductivo, es decir, absorben potencia reactiva, la compensación del factor de potencia se hace mediante la conexión, en paralelo con el receptor, de baterías de condensadores (elementos que ceden potencia reactiva sin consumir potencia activa).*
- *Esta conexión hace que la potencia reactiva total consumida por el sistema compensado sea menor que la potencia reactiva absorbida por el receptor trabajando aislado y, por lo tanto, que aumente el factor de potencia del conjunto.*



7.5.3. Compensación del factor de potencia



- *La potencia reactiva que cede un condensador sometido a una tensión U vale:*

$$Q_{ced} = XI^2 = \frac{U^2}{X} = \omega C U^2$$

7.5.3. Compensación del factor de potencia

- *Al conectar una batería de condensadores en paralelo con un receptor que consume potencia reactiva, la nueva potencia reactiva que absorbe el conjunto será:*

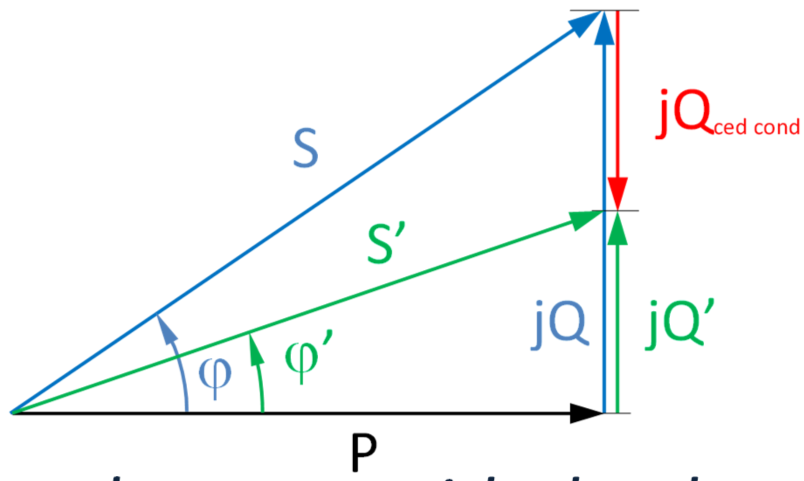
$$Q_{abs\ total} = Q_{abs\ receptor} - Q_{ced\ condensador}$$

- *Mientras que la potencia activa del conjunto permanecerá constante, ya que el condensador no absorbe potencia activa.*
- *Entonces:*

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{abs\ receptor} - Q_{abs\ total}$$

7.5.3. Compensación del factor de potencia

- *Representando esto en el triángulo de potencias:*



- *El valor de la capacidad de la batería de condensadores requerida para pasar de factor de potencia cosφ a un factor de potencia cosφ' se calcula:*

$$Q_{ced\ condensador} = Q - Q' = Ptg\varphi - Ptg\varphi' = P(tg\varphi - tg\varphi')$$

7.5.3. Compensación del factor de potencia

- Dado que la potencia reactiva que cede un condensador vale:

$$Q_{ced\ condensador} = \omega C U^2$$

- Entonces:

$$\omega C U^2 = P(tg\varphi - tg\varphi')$$

- Con lo que:

$$\boxed{C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega U^2}}$$

7.6. Teoremas relacionados con la potencia en RES

7.6.1. Teorema de Boucherot

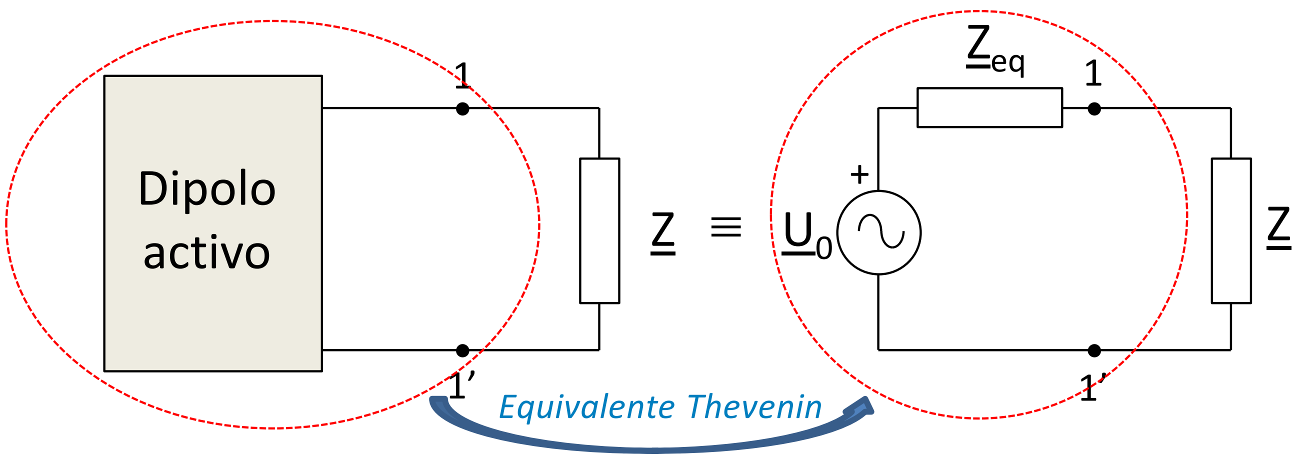
- *En todo circuito alimentado por fuentes sinusoidales de la misma pulsación, se conservan, de manera independiente, la potencia activa y la potencia reactiva.*

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{\text{algebraica}} P_{abs} = 0 \\ \sum\limits_{\text{algebraica}} Q_{abs} = 0\end{array}\right\} \rightarrow \sum \underline{S}_{abs} = \underbrace{\sum P_{abs}}_{=0} + j\underbrace{\sum Q_{abs}}_{=0} = 0$$

Atención: $$\sum \underline{S}_{abs} = 0 \not\Rightarrow \sum S_{abs} = 0$$

7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- ***Enunciado 1:*** *De entre las infinitas **impedancias** que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la **impedancia** para la que se cumpla que su valor sea igual al conjugado de la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta.*



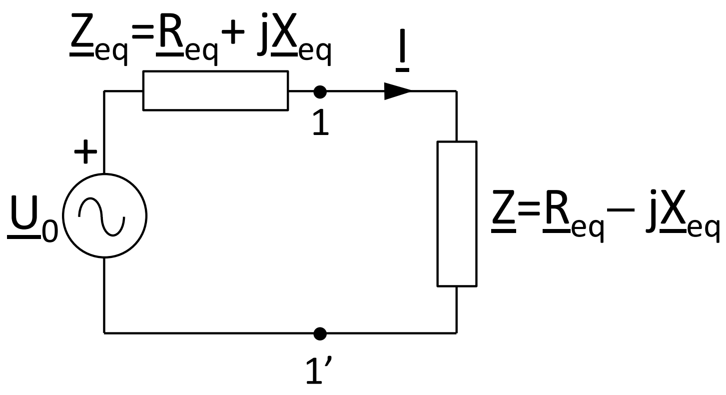
$\underline{Z}$ absorbe la máx P si:

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_{eq}^{*}}$$

donde: $\underline{Z}_{eq}^{*} = R_{eq} - jX_{eq}$

7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- *En muchas aplicaciones es importante lograr la máxima transferencia de potencia entre el circuito y la carga que alimenta.*
- *En otras no se busca esta transferencia máxima, ya que, cuando se da, el rendimiento del circuito es del 50%. (Ejemplo: Transporte de energía eléctrica)*



$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{eq} + \underline{Z} = R_{eq} + jX_{eq} + R_{eq} - jX_{eq} = 2R_{eq}$$

$$I = \frac{U_0}{Z_T} = \frac{U_0}{2R_{eq}} \Rightarrow P_{absZ} = I^2 \cdot R_{eq} = \frac{U_0^2}{4R_{eq}^2} R_{eq} = \frac{U_0^2}{4R_{eq}}$$

$$P_{ced\ fuente} = I^2 \cdot \left(R_{eq} + R_{eq}\right) = \frac{U_0^2}{4R_{eq}^2} 2R_{eq} = \frac{U_0^2}{2R_{eq}}$$

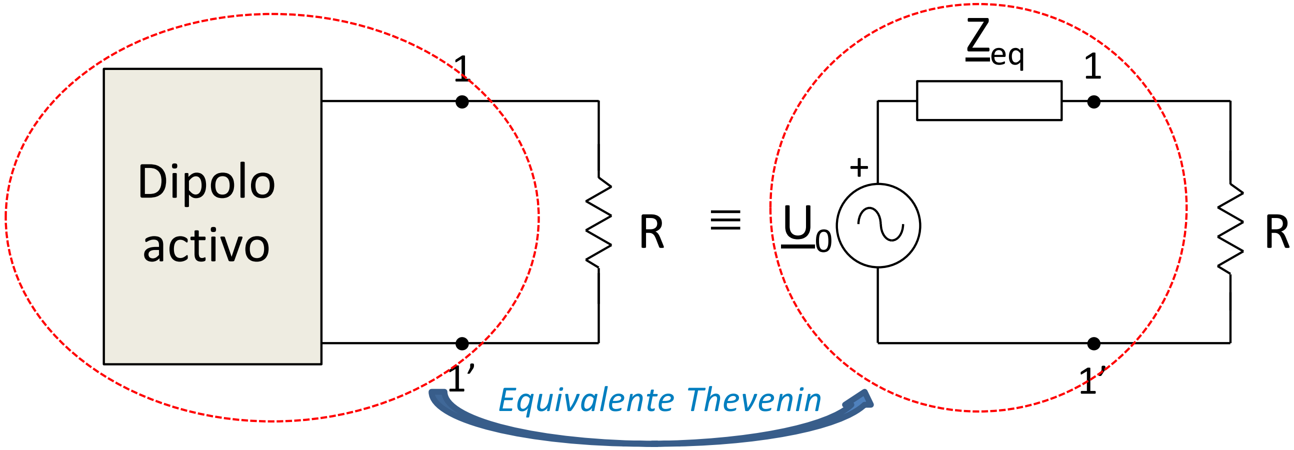
$$\boxed{\eta = \frac{P_{absZ}}{P_{ced\ fuente}} = \frac{\dfrac{U_0^2}{4R_{eq}}}{\dfrac{U_0^2}{2R_{eq}}} = 0{,}5}$$

7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

PRAUZ 449 (2021/22)

- <u>**Enunciado 2:** </u>*De entre las infinitas* ***<u>resistencias</u>*** *que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la* ***<u>resistencia</u>*** *para la que se cumpla que su valor sea igual al <u>módulo</u> de la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta.*



R absorbe la máx P si:

$$\boxed{R = Z_{eq}}$$

donde: $Z_{eq} = \sqrt{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$

7.7. Medida de la potencia

7.7. Medida de la potencia

- ***Potencia aparente:***
  - Si se conoce el valor eficaz de la tensión en bornes de un elemento, y el valor eficaz de la intensidad que circula por él, se puede conocer la potencia aparente, ya que:

$$S = U \cdot I$$

- ***Potencia activa:***
  - El instrumento utilizado para la medida de la potencia activa se denomina ***Vatímetro***.
  - Dado que:

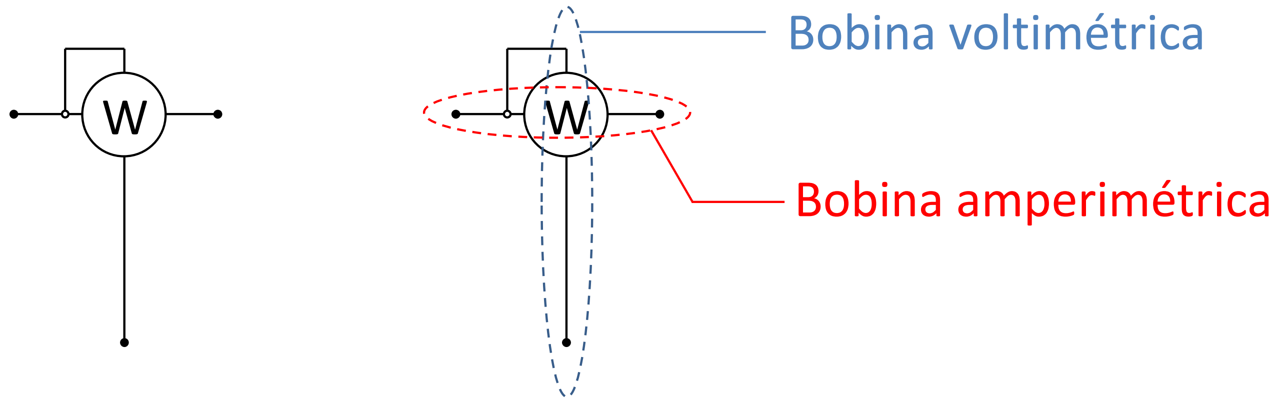
$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

7.7. Medida de la potencia

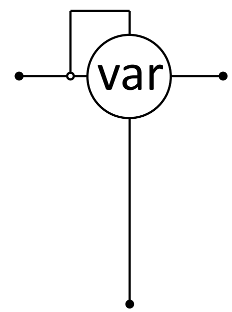
- Un vatímetro ha de medir la tensión eficaz, la intensidad eficaz y el coseno del ángulo de desfase entre estas dos magnitudes.
- Para ello, este equipo consta de un elemento que mide la tensión, llamado ***bobina voltimétrica*** y que se conecta en paralelo con la tensión que se desea medir; y un elemento encargado de medir la intensidad, denominado ***bobina amperímetrica*** y que se coloca en serie con la intensidad a medir.
- El producto de estas tres magnitudes da como resultado la medida de la potencia activa que absorbe la parte del circuito que se encuentra «aguas abajo» del punto de conexión del vatímetro.

7.7. Medida de la potencia

– El símbolo empleado para el vatímetro es:



- ***Potencia reactiva:***
  - El instrumento utilizado para la medida de la potencia reactiva se denomina ***Varímetro***.
  - Su principio de funcionamiento es el mismo que el del vatímetro, pero utilizando el seno del ángulo de desfase entre tensión e intensidad

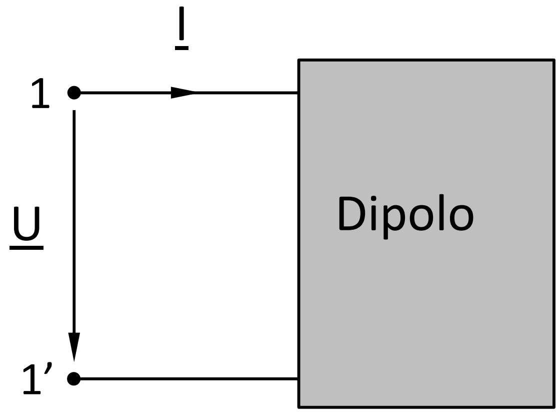


Resumen Tema 7

Potencia en régimen estacionario sinusoidal

R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Dado un dipolo en RES, y para las referencias de la figura:*



- *Se define la* ***Potencia Compleja*** *absorbida* ***(*** $\underline{S}_{abs}$ ***)*** *como:*

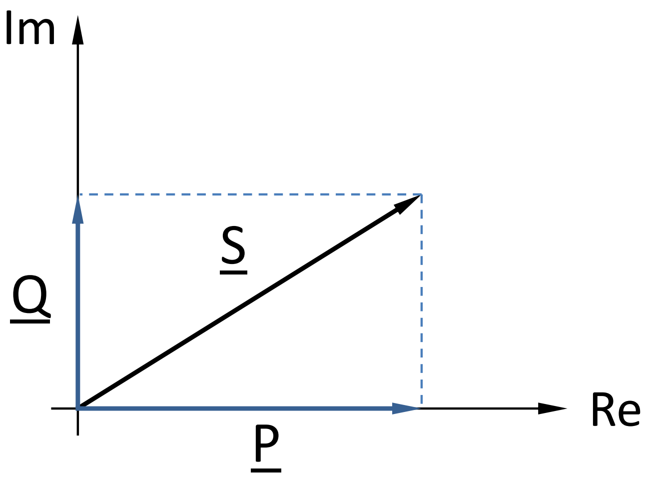
$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$ (I* es el conjugado de I)

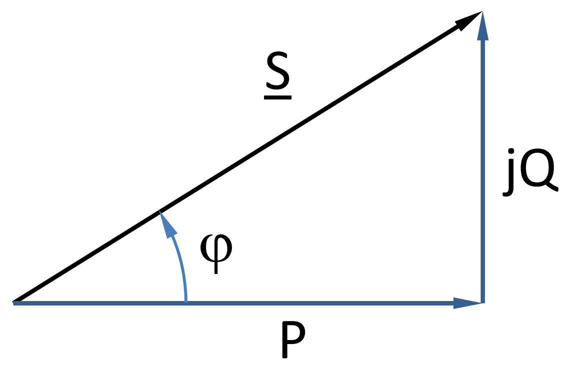
- *La* ***Potencia Compleja*** *es un número complejo, es decir, tiene parte real y parte imaginaria.*

$$\underline{S}_{abs} = P_{abs} + jQ_{abs}$$

R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Representación de **S** en el plano complejo:*

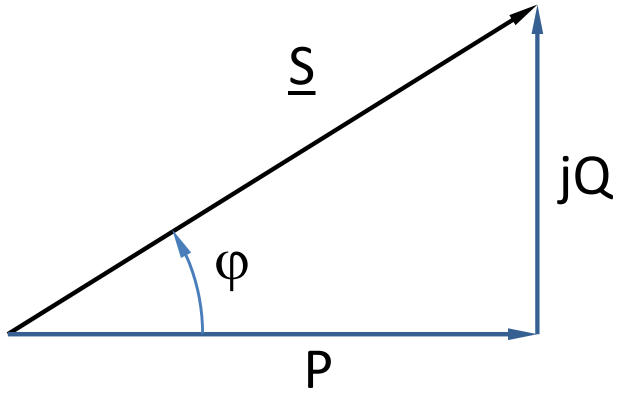




Triángulo de potencias

- Al modulo de la potencia compleja, **S**, se le denomina ***Potencia Aparente.***
- A la parte real de la potencia compleja, **P**, se le denomina **Potencia Activa.**
- A la parte imaginaria de la potencia compleja, **Q**, se le denomina **Potencia Reactiva.**

R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo



Unidades:

- **S**: Potencia aparente: Voltamperios (**VA**)
- **P**: Potencia activa: Vatios (**W**)
- **Q**: Potencia reactiva: Voltamperios reactivos (**var**)

Si: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$

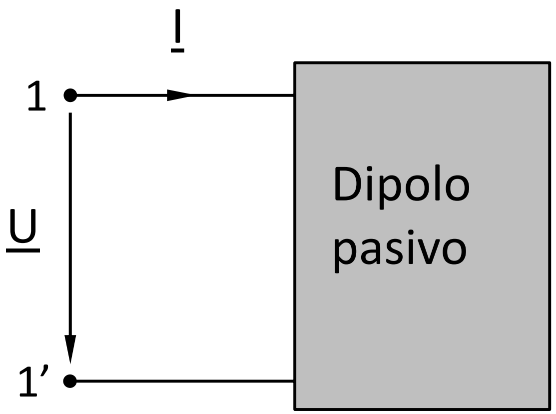
$$\xrightarrow[\underline{I}^* = I\lfloor -\varphi_i]{\underline{U} = U\lfloor \varphi_u} \quad \begin{cases} S = U \cdot I \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi = \widehat{(\underline{U},\underline{I})} \end{cases}$$

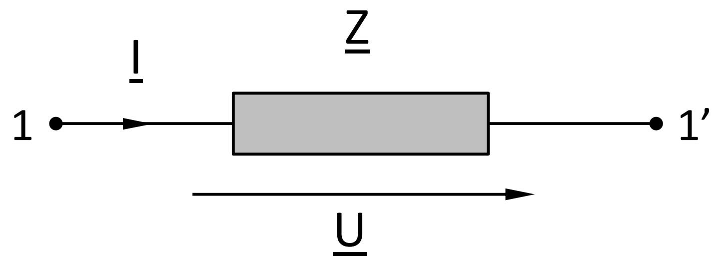
A partir del ***triángulo de potencias*** se deduce:

- $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- $P = S\cos\varphi = U \cdot I\cos\varphi$
- $Q = S\,\text{sen}\varphi = U \cdot I\,\text{sen}\varphi$
- $\text{tg}\varphi = \dfrac{Q}{P}$
- $Q = P\,\text{tg}\varphi$
- $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$

R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

Si el dipolo es ***pasivo***:





$$\underline{Z} = R + jX$$

Dado que : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = (R + jX) \cdot \underline{I}$

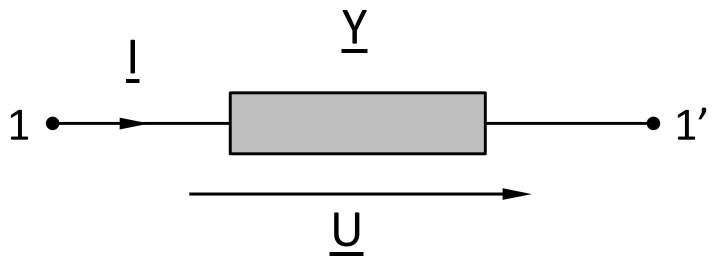
$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + jX \cdot I^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

Identificando partes reales y partes imaginarias:

$P_{abs} = R \cdot I^2$ ⟶ ***<u>Potencia activa</u>***: es ***absorbida por la parte real*** de la impedancia

$Q_{abs} = X \cdot I^2$ ⟶ ***<u>Potencia reactiva</u>***: es ***absorbida por la parte imaginaria*** de la impedancia

R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo



$$\underline{Y} = G + jB$$

Dado que : $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = (G + jB) \cdot \underline{U}$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot \left[(G + jB) \cdot \underline{U} \right]^* = (G - jB) \cdot \underline{U} \cdot \underline{U}^* = (G - jB) \cdot U^2 =$$

$$= G \cdot U^2 - jB \cdot U^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

Identificando partes reales y partes imaginarias:

$P_{abs} = G \cdot U^2$ ⟶ ***<u>Potencia activa</u>***: es ***absorbida por la parte real*** de la admitancia

$Q_{abs} = -B \cdot U^2$ ⟶ ***<u>Potencia reactiva</u>***: es ***absorbida por la parte imaginaria*** de la admitancia

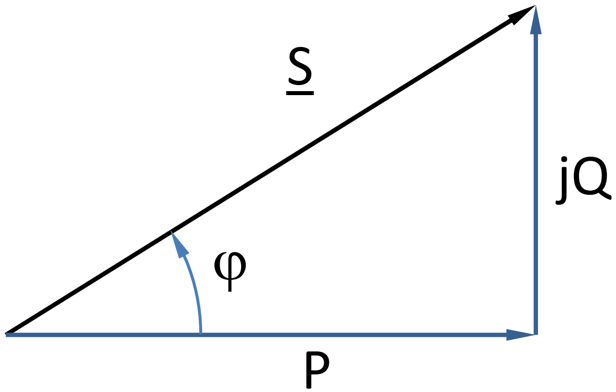
R-7.2. Potencia compleja en dipolos pasivos básicos

- **Resistencia:** $\underline{Z} = R \ (R+j0)$; $\underline{Y} = G \ (G+j0)$
  - Potencia activa: $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \rightarrow \geq 0$
  - Potencia reactiva: $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = 0$
- **Bobina:** $\underline{Z} = j\omega L \ (0+j\,\omega L)$; $\underline{Y} = -j(1/\omega L) \ (0+j(-1/\omega L))$
  - Potencia activa: $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 = 0$
  - Potencia reactiva: $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = \omega L I^2 = \frac{1}{\omega L} U^2 \rightarrow \geq 0$
- **Condensador:** $\underline{Z} = -j(1/\omega C) \ (0+j(-1/\omega C))$; $\underline{Y} = j\omega C$
  - Potencia activa: $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 = 0$
  - Potencia reactiva: $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega C U^2 \rightarrow \leq 0$

R-7.3. Definición del factor de potencia

- *En general, en un dipolo, la potencia activa es menor que la potencia aparente.*
- *Se define el **Factor de potencia** como la relación:*

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$



$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$$

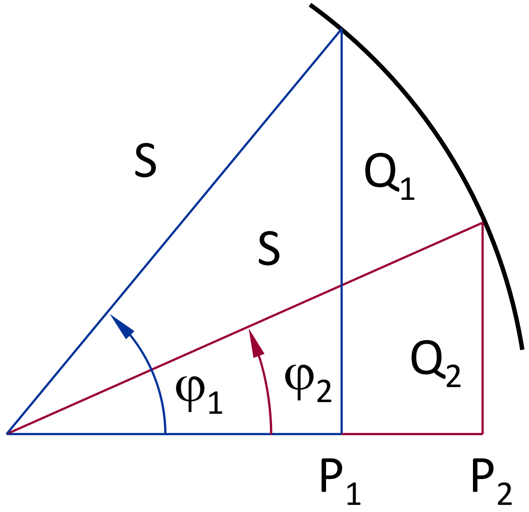
$$\varphi = \left(\widehat{\underline{U},\underline{I}}\right) \xrightarrow{\textbf{Dipolo Pasivo}} \varphi = \left(\widehat{\underline{U},\underline{I}}\right) = \varphi_Z$$ ***(argumento de su impedancia)***

R-7.3. Definición del factor de potencia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

PRAUZ 449 (2021/22)

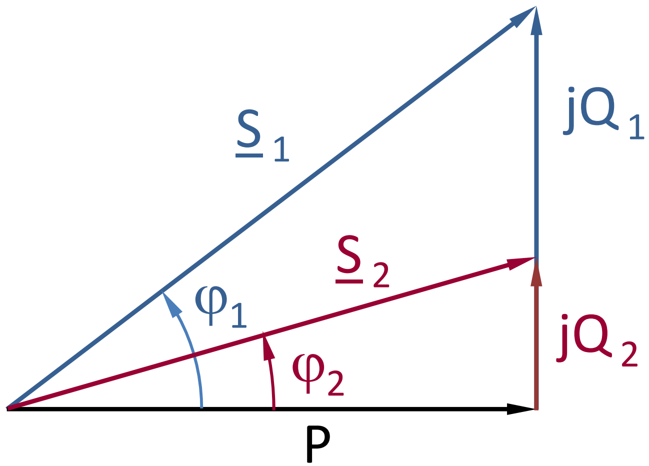
- *Para una misma potencia aparente: (S = U·I)*



Si $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1 < \cos\varphi_2$

- **$P_1 < P_2$ y $Q_1 > Q_2$**
- La instalación estará peor aprovechada cuanto mayor sea el ángulo de desfase entre U e I, es decir, cuanto menor sea el f.d.p.

- *Para la misma tensión y la misma potencia activa: (P = U·I·cos φ)*

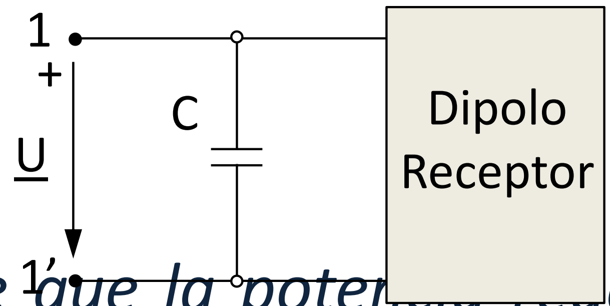


$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{P}{U\cdot\cos\varphi_1} \\ I_2 &= \frac{P}{U\cdot\cos\varphi_2} \end{aligned}\right\} \text{Si } \varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1 < \cos\varphi_2 \Rightarrow \mathbf{I_1 > I_2}$$

(A peor factor de potencia, más intensidad circula por la instalación)

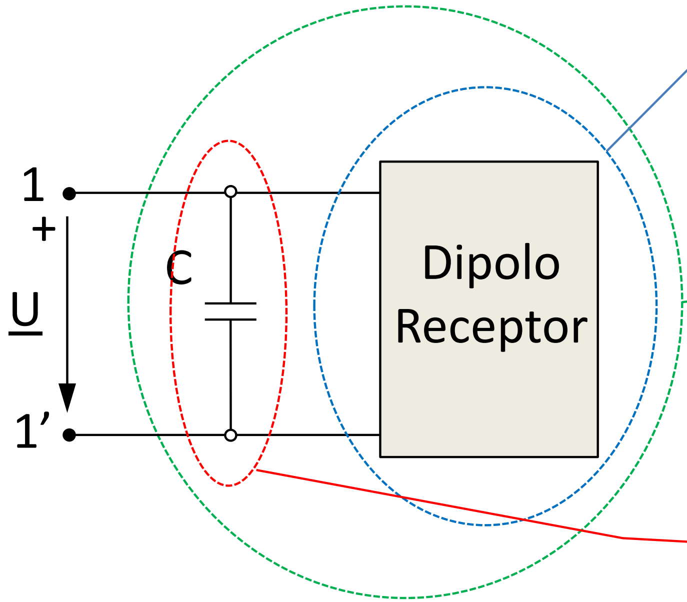
R-7.4. Compensación del factor de potencia

- *Dado que las líneas de transporte y la mayoría de receptores presentan carácter inductivo, es decir, absorben potencia reactiva, la compensación del factor de potencia se hace, habitualmente, mediante la conexión, en paralelo con el receptor, de baterías de condensadores (elementos que ceden potencia reactiva sin consumir potencia activa).*



- *Esta conexión hace que la potencia reactiva total consumida por el sistema compensado sea menor que la potencia reactiva absorbida por el receptor trabajando aislado y, por lo tanto, que aumente el factor de potencia del conjunto.*

R-7.4. Compensación del factor de potencia



Dipolo:
- Absorbe P
- Absorbe Q

Resultado:

El conjunto:
- Absorbe la misma P
- Absorbe menos Q

  ⇒Disminuye φ

  ⇒ ***Aumenta cos φ (f.d.p.)***

Condensador:
- No absorbe P
- Cede Q

R-7.4. Compensación del factor de potencia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

PRAUZ 449 (2021/22)

- *Al conectar una batería de condensadores en paralelo con un receptor que consume potencia reactiva, la potencia reactiva que absorbe el conjunto disminuye:*

$$Q_{abs\ CC} = Q_{abs\ SC} - Q_{ced\ condensador}$$

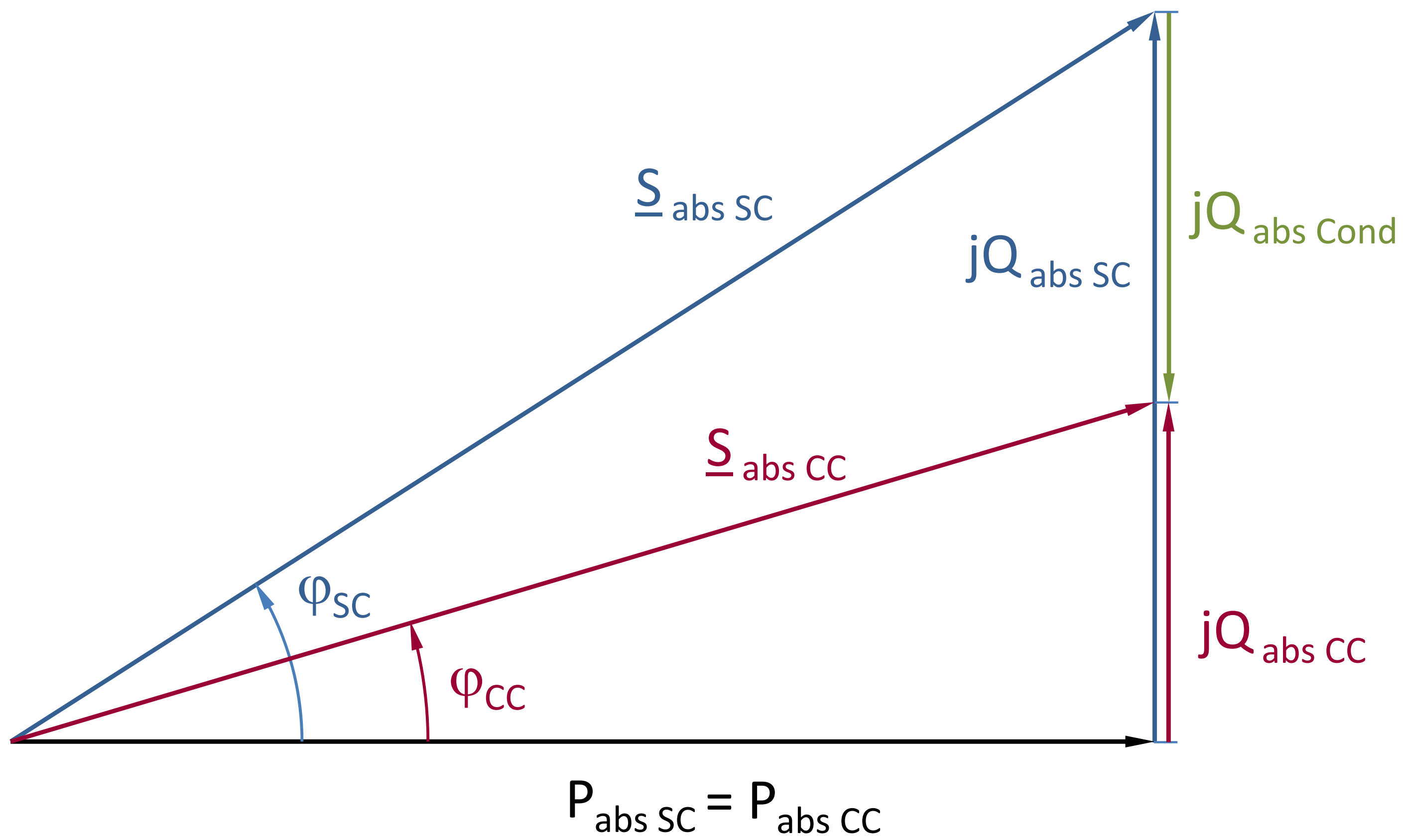
SC: Sin condensador

CC: Con condensador

- *Por el contrario, la potencia activa absorbida por el conjunto permanecerá constante, ya que el condensador no absorbe ni cede potencia activa.*

R-7.4. Compensación del factor de potencia

- *Representando esto en el triángulo de potencias:*



SC: Sin condensador

CC: Con condensador

R-7.4. Compensación del factor de potencia

- El valor de la capacidad de la batería de condensadores requerida para pasar del factor de potencia $\cos\varphi_{inicial}$ a un factor de potencia $\cos\varphi_{final}$ se calcula:

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{abs\ SC} - Q_{abs\ CC}$$

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{absSC} - Q_{absCC} = P_{abs} tg\varphi_{SC} - P_{abs} tg\varphi_{CC} = P_{abs}\left(tg\varphi_{SC} - tg\varphi_{CC}\right)$$

- Dado que la potencia reactiva que cede un condensador vale:

$$Q_{ced\ condensador} = \omega C U^2$$

R-7.4. Compensación del factor de potencia

- Entonces:

$$\omega C U^2 = Q_{abs\ SC} - Q_{abs\ CC} = P(tg\varphi_{SC} - tg\varphi_{CC})$$

- Con lo que:

$$\boxed{C = \frac{P_{abs}(tg\varphi_{inicial} - tg\varphi_{final})}{\omega U^2}}$$

- **Condensador óptimo**: El que consigue que **cosφ_{final} = 1**

$$\boxed{C_{óptimo} = \frac{P_{abs} tg\varphi_{inicial}}{\omega U^2}}$$

R-7.5. Teorema de Boucherot

- *En todo circuito alimentado por fuentes sinusoidales de la misma pulsación, se conservan, de manera independiente, la potencia activa y la potencia reactiva.*

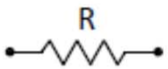
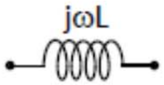
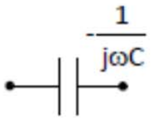
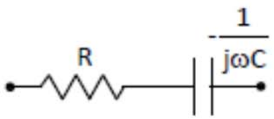
$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\text{algebraica}} P_{abs} = 0 \\ \sum\limits_{\text{algebraica}} Q_{abs} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \sum \underline{S}_{abs} = \underbrace{\sum P_{abs}}_{=0} + j \underbrace{\sum Q_{abs}}_{=0} = 0$$

Atención: $\sum \underline{S}_{abs} = 0 \not\Rightarrow \sum S_{abs} = 0$

R-7.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- **<u>Enunciado 1:</u>** *De entre las infinitas impedancias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la impedancia cuyo valor sea:* $\underline{Z}=(\underline{Z}_{eq})^*$.
- **<u>Enunciado 2:</u>** *De entre las infinitas resistencias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la resistencia cuyo valor sea:* $R=Z_{eq}$.
- *En ambos enunciados,* $\underline{Z}eq$ *es la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta bien la impedancia o bien la resistencia.*

Impedancias en régimen estacionario sinusoidal

Tipo de impedancia (tipo de carga)	*Símbolo*	*$\underline{Z}$*	*$\underline{U}$ respecto de $\underline{I}$*	*Potencia activa y reactiva*
Resistiva pura		$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R\,\underline{\rfloor 0º}$	$\underline{U}$ está en fase con $\underline{I}$	$P_{abs} = R \cdot I^2 = U^2/R > 0$ $Q_{abs} = 0$
Inductiva pura		$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L\,\underline{\rfloor 90º}$	$\underline{U}$ adelanta 90º a $\underline{I}$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I^2 = U^2/\omega L > 0$
Capacitiva pura		$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C)\,\underline{\rfloor -90º}$	$\underline{U}$ retrasa 90º respecto de $\underline{I}$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I^2 =$ $= U^2/-(1/\omega C) < 0$
De carácter inductivo		$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L>0)$ $\underline{Z} = R + j\omega L$ $\underline{Z} = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,\underline{\rfloor \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}}$	$\underline{U}$ adelanta a $\underline{I}$ un ángulo φ_Z	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I_L^2 = U_L^2/\omega L > 0$
De carácter capacitivo		$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C<0)$ $\underline{Z} = R - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = \sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\,\underline{\rfloor \mathrm{arctg}\frac{-1/\omega C}{R}}$	$\underline{U}$ retrasa respecto de $\underline{I}$ un ángulo φ_Z	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I_C^2 =$ $= U_C^2/-(1/\omega C) < 0$

Recordar que:

- En una impedancia, el DESFASE entre tensión e intensidad es igual al argumento de la impedancia.
- En una impedancia, absorbe POTENCIA ACTIVA la parte real de la impedancia.
- En una impedancia, absorbe POTENCIA REACTIVA la parte imaginaria de la impedancia.

Referencias

- *PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.:* ***"Teoría de Circuitos (Tomo I)"****. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).*
- *BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.:* ***"Análisis de circuitos eléctricos I".*** *Colección Textos Docentes, vol. 58. Prensas Universitarias de Zaragoza.*
- *BAYOD, A.A.:* ***"Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal".*** *Colección Textos Docentes, vol. 107. Prensas Universitarias de Zaragoza.*