Máxima transferencia de potencia de un dipolo

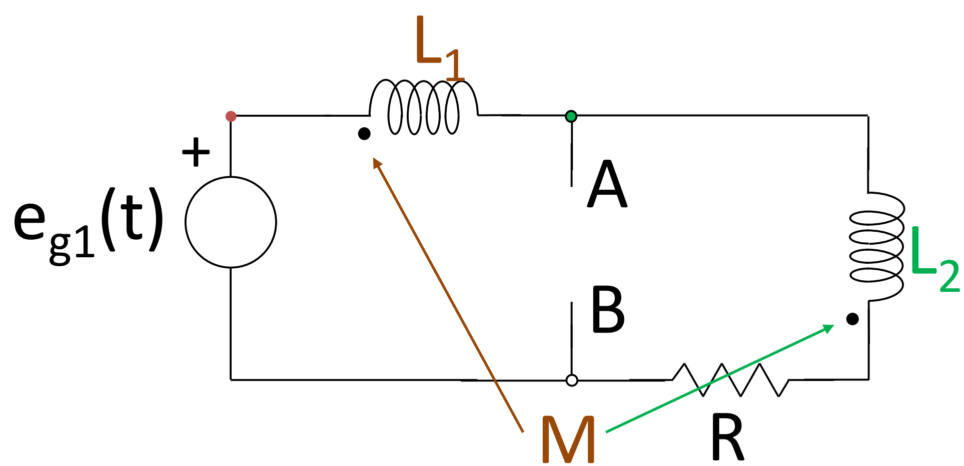
Ejemplo de repaso de equivalente Thévenin con bobinas acopladas magnéticamente + problema 7.12/ 7.16 (1ª/2ª Ed.)

Máxima transferencia de potencia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Problema:

- *Calcular el equivalente Norton y Thevenin visto desde los teminales A y B del dipolo. Comprobar los resultados.*
- *Calcular la impedancia que, conectada entre A y B absorba la máxima potencia.*



Datos:

$L1$ = 40 mH

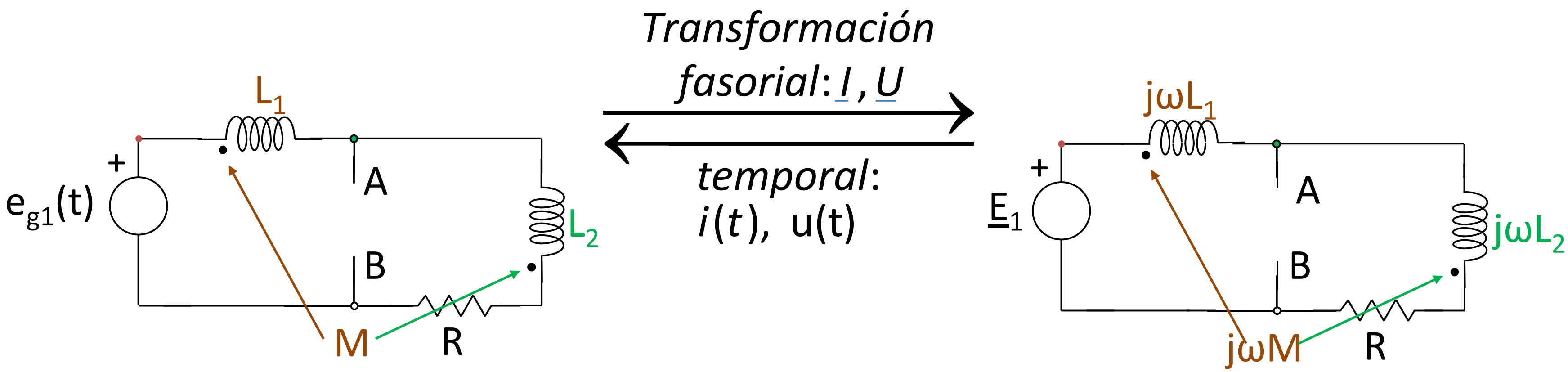
$L2$ = 10 mH

M = 20 mH

R = 1 Ω

$e_g(t) = 20\sqrt{2}\cos(100\,t)$

Máxima transferencia de potencia



Para ayudarnos a escribir las ecuaciones de malla, dibujamos las referencias → de:

1º) El fasor de la corriente por cada bobina acoplada.

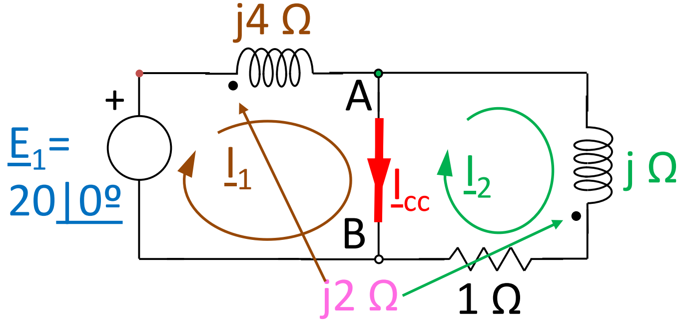
2º) El fasor de la tensión inducida por su acoplamiento magnético en la otra bobina.

- El sentido de la referencia de tensión → es el mismo que la intensidad que lo genera *respecto a los terminales marcados* •.
- Para pasar de corriente de una bobina a la tensión que induce en la otra bobina, hay que multiplicar dicha intensidad por la impedancia mutua (jωM).

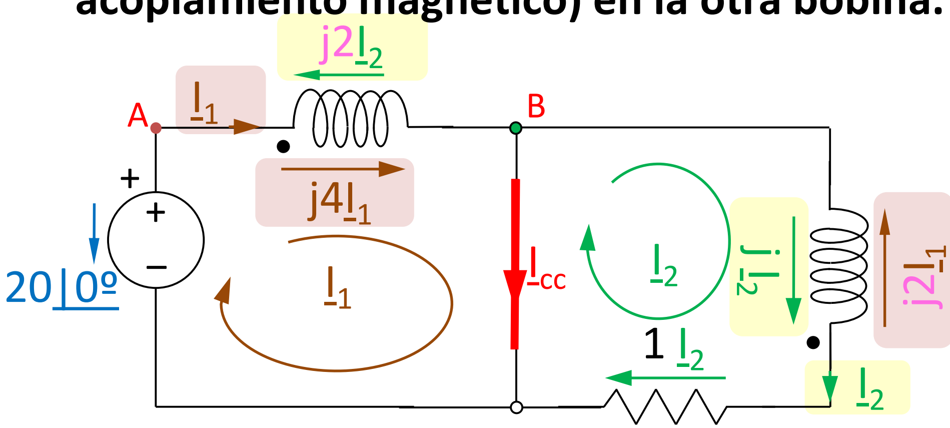
Corriente de cortocircuito

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

1) Cortocircuitar A→B y establecer las corrientes de circulación de malla.



2) Razonar con los terminales • marcados para obtener el sentido de la tensión que las corrientes de malla inducen (debido al acoplamiento magnético) en la otra bobina.



3) Aplicar LKT a las trayectorias cerradas definidas por las mallas, considerando las referencias de tensión en las bobinas.

↻ Malla circulación de la corriente $\underline{I}_1$:

$$(Ec.1) \qquad j4\underline{I}_1 - \boxed{j2\underline{I}_2} - 20\underline{|0º} = 0$$

↻ Malla circulación de la corriente $\underline{I}_2$:

$$(Ec.2) \qquad -\boxed{j2\,\underline{I}_1} + j\,\underline{I}_2 + 1\underline{I}_2 = 0$$

Reducción Gausiana: (Ec.3) = (Ec.1) + 2 (Ec.2)

$$(Ec.3) \qquad 2\underline{I}_2 = 20\underline{|0º} \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = 10\underline{|0º}$$

Despejo $\underline{I}_1$ de (Ec.2)

$$\underline{I}_1 = \frac{(1+j)}{j2}\underline{I}_2 = (0.5 - 0,5j)\,10\underline{|0º}$$

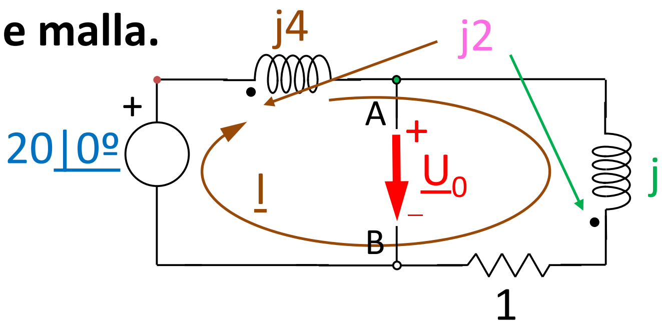
$$\underline{I}_1 = 5 - j5 = 5\sqrt{2}\underline{|-45º}$$

- Corriente de cortocircuito:

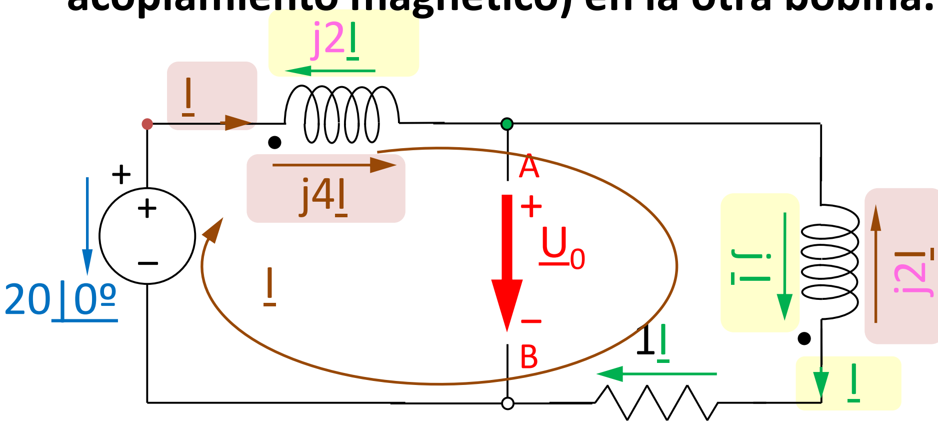
$$\underline{I}_{cc} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = -5 - j5 = 5\sqrt{2}\underline{|-135º}$$

Tensión de circuito abierto

1) Referencia de tensión entre terminales A y B. Establecer las corrientes de circulación de malla.



2) Razonar con los terminales • marcados para obtener el sentido de la tensión que las corrientes de malla inducen (debido al acoplamiento magnético) en la otra bobina.



3) Aplicar LKT a las trayectorias cerradas definidas por las mallas, considerando las referencias de tensión en las bobinas.

- Malla:

$$j4\underline{I} - \boxed{j2\underline{I}} + j\,\underline{I} - \boxed{j2\,\underline{I}} + 1\,\underline{I} - 20\underline{|0º} = 0$$

- Despejo $\underline{I}$:

$$(1+j)\underline{I} = 20 \;\Rightarrow\; \underline{I} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}\underline{|-45º}$$

- Tensión de vacío $\underline{U}_0$ (calculada yendo de + a – de la referencia por la derecha):

$$\underline{U}_0 = +j\,\underline{I} - \boxed{j2\,\underline{I}} + 1\,\underline{I} = (1-j)\,\underline{I}$$

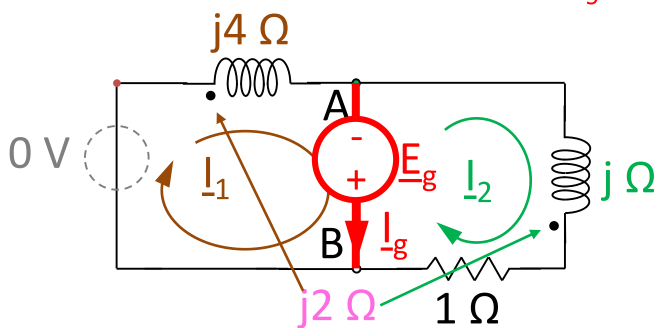
$$\underline{U}_0 = -j20 = 20\underline{|-90º}$$

Impedancia equivalente

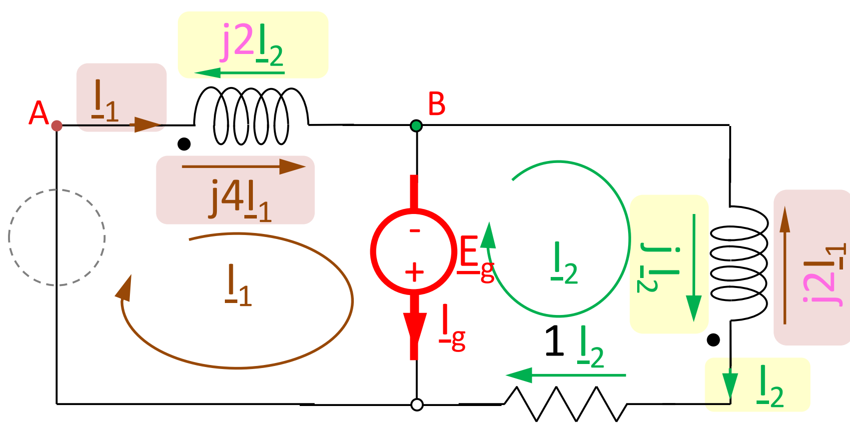
Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

1) Dipolo pasivo: anular fuentes indeptes ◯ (dejar fuentes dependientes ◇) y añadimos fuente auxiliar $\underline{E}_g$ donde la corriente $\underline{I}_g$ salga del terminal positivo de la tensión.

Se puede dar un valor numérico a $\underline{E}_g$



2) Razonar con los terminales • marcados.



3) Aplicar LKT a las trayectorias cerradas definidas por las mallas, considerando las referencias de tensión en las bobinas.

↻ Malla circulación de la corriente $\underline{I}_1$:

$$(Ec.1) \qquad j4\underline{I}_1 - \boxed{j2\underline{I}_2} - \underline{E}_g = 0$$

↻ Malla circulación de la corriente $\underline{I}_2$:

$$(Ec.2) \qquad -\boxed{j2\,\underline{I}_1} + j\,\underline{I}_2 + 1\underline{I}_2 + \underline{E}_g = 0$$

Reducción Gausiana: (Ec.3) = (Ec.1) + 2 (Ec.2)

$$(Ec.3) \qquad 2\underline{I}_2 = -\underline{E}_g \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -0{,}5\,\underline{E}_g$$

Despejo $\underline{I}_1$ de (Ec.1):

$$\underline{I}_1 = \frac{2j\underline{I}_2 + \underline{E}_g}{j4} = (-0{,}25 - 0{,}25j)\,\underline{E}_g$$

Corriente de la fuente:

$$\underline{I}_g = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (0{,}25 - j0{,}25)\,\underline{E}_g = \frac{\underline{E}_g}{\sqrt{8}}\underline{|-45º}$$

Impedancia equivalente $\underline{Z}_{eq}$:

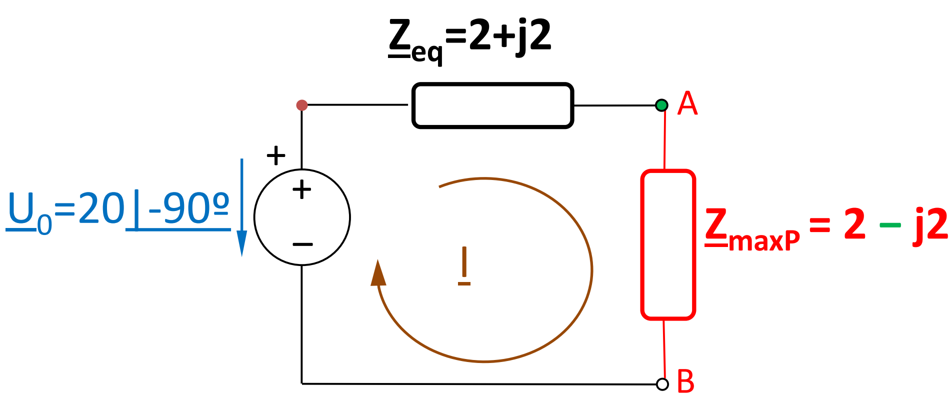
$$\underline{Z}_{eq} = +\frac{\underline{E}_g}{\underline{I}_g} = \frac{\cancel{\underline{E}_g}}{\frac{\cancel{\underline{E}_g}}{\sqrt{8}}\underline{|-45º}} = \sqrt{8}\underline{|45º} = 2 + j2$$

Máxima transferencia de potencia P

1) La impedancia $\underline{Z}_{maxP}$ que abosorbe la máxima potencia es el conjugado de la impedancia equivalente $\underline{Z}_{eq}$:

$$\underline{Z}_{\max P} = \underline{Z}_{eq}^{*} = (2 + j2)^{*} = 2 - j2$$

2) Calcular la potencia transferida con el equivalente Thévenin.



↻ Malla circulación de la corriente $\underline{I}$:

$$(2 + j2)\,\underline{I} + (2 - j2)\,\underline{I} = 20\lfloor -90º$$

Despejo $\underline{I}$:

$$4\underline{I} = 20\lfloor -90º \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = 5\lfloor -90º$$

Potencia compleja absorbida por $\underline{Z}_{maxP}$:

$$\underline{S}_{abs} = I^2\,\underline{Z}_{\max P} = 5^2\,(2 - j2)$$

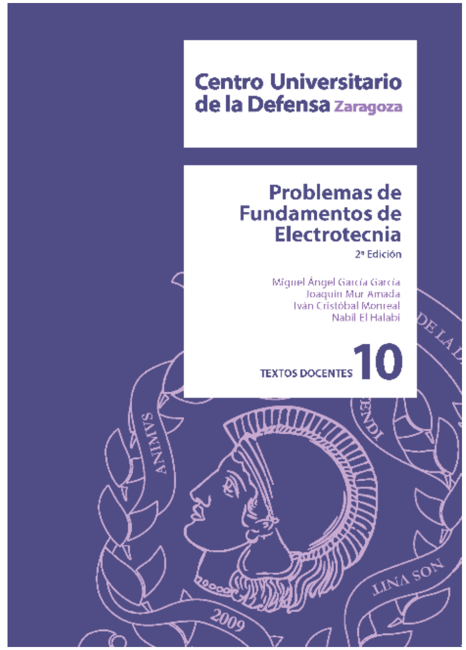
$$I = \textit{módulo de } \underline{I} = \textit{módulo de } 5\lfloor -90º = 5\,\text{A}$$

$$\underline{S}_{abs} = 50\,\text{W} - j50\,\text{var} = 50\sqrt{2}\,\text{VA}\lfloor -45º$$

$$S = \textit{módulo de } \underline{S}_{abs} \textit{ o de } \underline{S}_{ced} = 50\sqrt{2}\,\text{VA}$$

$$P_{abs} = \textit{Parte Real de } \underline{S}_{abs} = 50\,\text{W}$$

$$Q_{abs} = \textit{Parte Imaginaria de } \underline{S}_{abs} = -50\,\text{var}$$



Problema 7.12(1ª Ed.) / 7.16 (2ª Ed.)

Problemas de Fundamentos de Electrotecnia.

M.A. García, J. Mur, I. Cristóbal, N. El Halabi.

1ª edición, enero 2013. C.U.D.

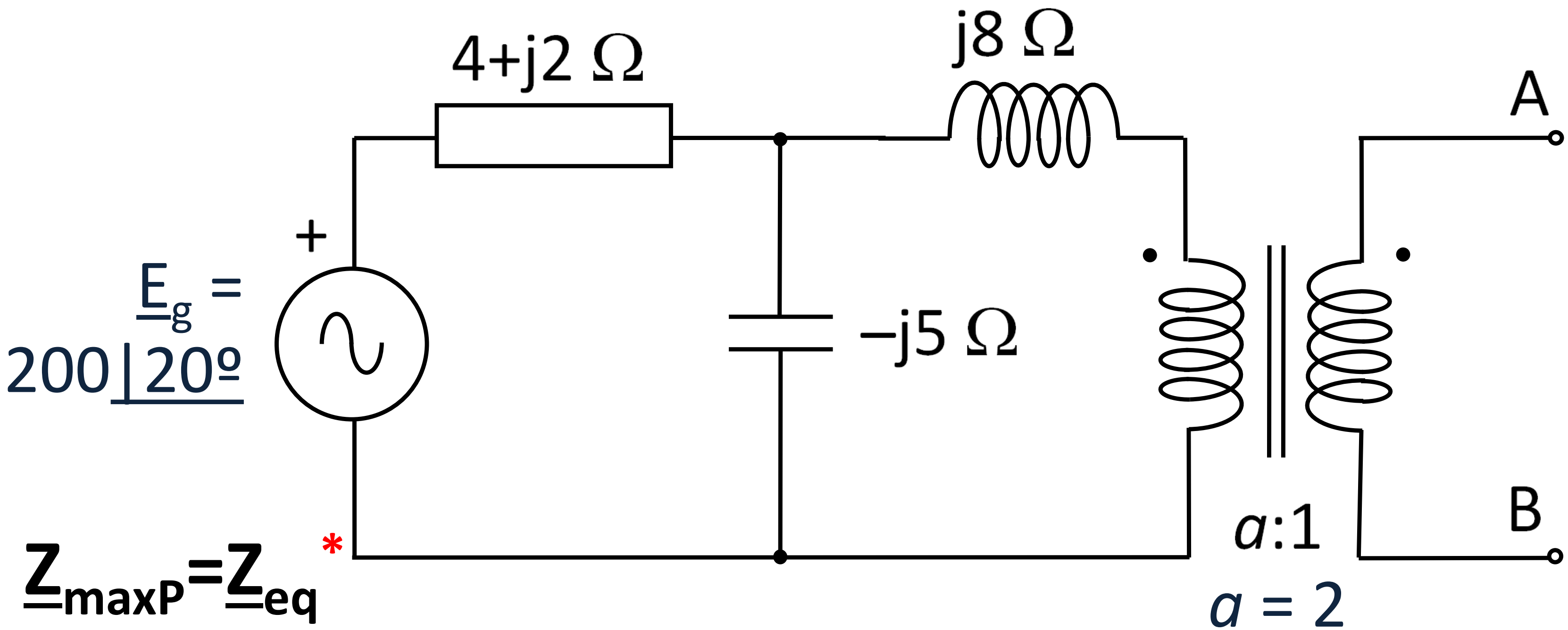
2ª edición, enero 2019. C.U.D.

Máxima transferencia de potencia

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Problema 7.12 (♦♦♦). *Dado el circuito de la figura, calcular:*

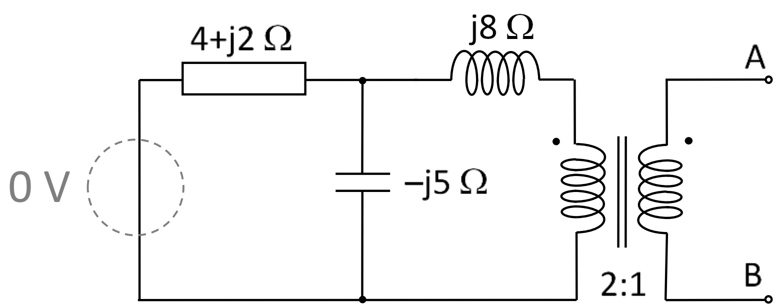
- *La impedancia que, conectada entre los terminales A y B, absorbe la máxima potencia activa.* $\underline{Z}_{maxP}=\underline{Z}_{eq}^{*}$
- *La potencia compleja que absorbe dicha impedancia.*

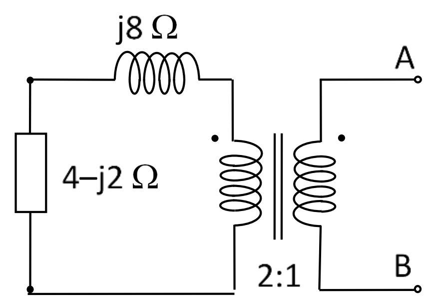


$\underline{Z}_{maxP}=\underline{Z}_{eq}^{*}$

Impedancia equivalente ($\underline{Z}_{maxP}=\underline{Z}_{eq}^{*}$)

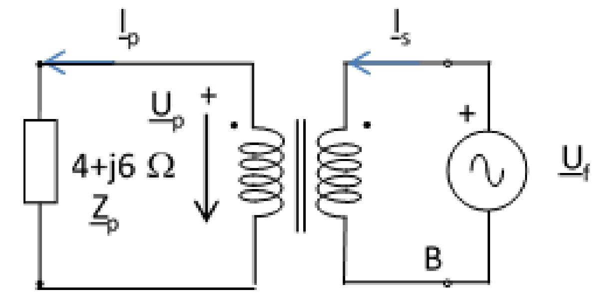
1) Dipolo pasivo: anular fuentes indeptes ◯ (dejar fuentes dependientes ◇)





2) Añadimos fuente auxiliar $\underline{U}_f$ donde la corriente $\underline{I}_s$ salga del terminal positivo de la tensión. *Se puede dar un valor numérico a* $\underline{U}_f$

Impedancia equivalente: $\underline{Z}_{eq} = +\dfrac{\underline{U}_f}{\underline{I}_s}$



Impedancia izquierda: $\dfrac{\underline{U}_p}{\underline{I}_p} = \underline{Z}_p = 4 + j6\,\Omega$

Ecuaciones del transformador (a =2):

$$\frac{\underline{U}_p}{\underline{U}_f} = +\frac{a}{1} \Rightarrow \underline{U}_f = \frac{\underline{U}_p}{a}$$

$$a\,\underline{I}_p - 1\underline{I}_s = 0 \Rightarrow \underline{I}_s = a\,\underline{I}_p$$

Impedancia equivalente vista desde A y B:

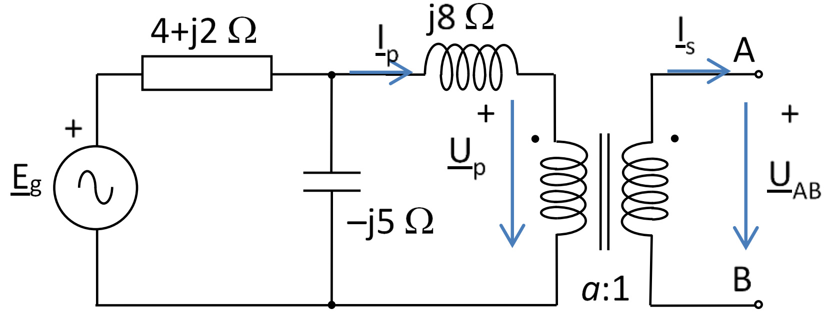
$$\underline{Z}_{eq} = +\frac{\underline{U}_f}{\underline{I}_f} = \frac{\underline{U}_p/a}{a\ \underline{I}_p} = \frac{1}{a^2}\underline{Z}_p = \frac{1}{4}(4+j6) = 1 + j\,1{,}5\,\Omega$$

$$\boxed{\underline{Z}_{máx} = \underline{Z}_{eq}^{*} = 1 - j\,1{,}5\,\Omega}$$

Tensión de vacío U_{AB} y cálculo de Potencia en Eq. Thévenin

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

1) Tensión en vacío del dipolo activo (original)



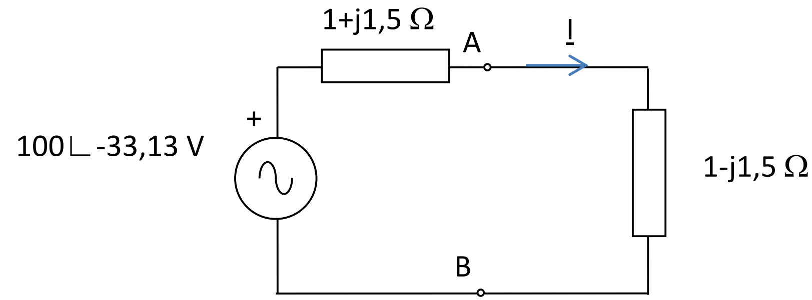
En el transformador no circula corriente → no cae tensión en j8 Ω → $\underline{U}_p$ coincide con la tensión en el condensador –j5 Ω, que se puede calcular por divisor de tensión entre –j5 Ω y 4+j2 Ω:

$$\underline{U}_p = \underline{E}_g \frac{-j5}{-j5+4+j2} = 200\angle 20º \cdot (0{,}6 - j0{,}8)$$

$$\underline{U}_p = 200\angle 20º \cdot (1\angle -53{,}13º) = 200\angle -33{,}13º \text{ V}$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{1}{a}\underline{U}_p = 100\angle -33{,}13º \text{ V}$$

2) Construimos el equivalente Thévenin y conectamos en sus bornes $\underline{Z}_{máx} = \underline{Z}_{eq}^*$



Impedancia total vista desde los bornes de la fuente:

$\underline{Z}_{total} = \underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{máx} = (1 + j1{,}5\ \Omega) + (1 - j1{,}5\ \Omega)$

$\underline{Z}_{total} = 2\ \Omega$

Corriente por el circuito:

$$\underline{I} = \frac{100\angle -33{,}13º \text{ V}}{2\ \Omega} = 50\angle -33{,}13º \text{ A}$$

Potencia absorbida por la impedancia $\underline{Z}_{máx}$:

$$\underline{S}_{abs} = I^2 \cdot \underline{Z}_{máx} = 50^2 \cdot \left(1 - j\frac{3}{2}\right) = 2{,}5 - j3{,}75 \text{ kVA}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{S}_{abs} &= 2{,}5 - j3{,}75 \text{ kVA} \\ P_{abs} &= 2{,}5 \text{ kW} \\ Q_{abs} &= -3{,}75 \text{ kvar} \end{aligned}}$$