Tema 1: NÚMEROS REALES Y NÚMEROS COMPLEJOS. ECUACIONES E INECUACIONES

1.1. NÚMEROS REALES

El **conjunto de los números reales**, $\mathbb{R}$, es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Recordar que el conjunto de **números racionales** es $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ y el conjunto de **números irracionales** $\mathbb{I}$ está formado por todos los números que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros, es decir, por todos los números decimales cuya parte decimal tiene infinitas cifras no periódicas.

Ejemplo 1:

Son números racionales: 0, -4, $\frac{4}{5}$, $4'\widehat{3}$, $-3'0\widehat{21}$

Son números irracionales: $\sqrt{3}$ = 1'7320508... , 1 - $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, π = 3'14159265... (proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro), $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2'71828182845905...

Todos los números anteriores son números reales.

Operaciones en el conjunto de números reales

La **suma** es una operación interna en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

Dados a, b, $c \in \mathbb{R}$ se verifica

1. *Asociativa*: $(a+b) + c = a + (b+c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 0, ya que $a + 0 = 0 + a = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado a, su elemento simétrico, llamado *opuesto*, es $-a$, ya que se cumple $a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. *Conmutativa*: $a+b = b+a$

El **producto** es una operación interna en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

Dados a, b, $c \in \mathbb{R}$ se verifica

1. *Asociativa*: $(a.b).c = a.(b.c)$
2. *Elemento neutro*: es el número 1, ya que $1.a = a.1 = a$
3. *Elemento simétrico*: Dado $a \neq 0$, su elemento simétrico, llamado *inverso*, es $a^{-1} = \frac{1}{a}$, ya que se cumple $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$.
4. *Conmutativa*: $a.b = b.a$
5. *Distributiva respecto de la suma*: $a.(b+c) = a.b + a.c$

Jerarquía de las operaciones: Si en una expresión aparecen varias operaciones hay que tener en cuenta su prioridad. Los productos y divisiones tienen prioridad sobre las sumas y restas, para romper esta prioridad se utilizan los paréntesis, ya que las operaciones incluidas en estos se calculan en primer lugar. En el caso en que se sucedan multiplicaciones y divisiones sin paréntesis, se efectúan comenzando por la izquierda.

Ejemplo 2:

a) -8+5.3 = -8+15 = 7. Esta operación no da el mismo resultado que (-8+5).3 = -3.3 = -9

b) La operación 6:3.2 se realiza como sigue: 6:3.2 = 2.2 = 4 y no es correcto hallar en primer lugar el producto 3.2

1.2. ECUACIONES EN $\mathbb{R}$

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas.

Cuando la igualdad entre las dos expresiones se verifica para cualquier valor numérico de las incógnitas se llama *identidad* y no se considera una ecuación.

Ejemplo 3:

$-2x = 8$, $\sqrt{x} + 3 - \ln x = 3$ son ecuaciones con una incógnita.

$3x + 6 = 3(x+2)$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $(3-2x)(3+2x) = 9 - x^2$ son identidades.

Una **solución** de una ecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la igualdad.

Ejemplo 4:

a) $x = 9$ es solución de la ecuación $\sqrt{x} = x - 6$, ya que $\sqrt{9} = 9 - 6$

b) $x = -2$ y $x = 5$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$, ya que $(-2)^2 - 3(-2) - 10 = 0$ y $5^2 - 3.5 - 10 = 0$

c) La ecuación $e^x + 7 = 3$ no tiene ninguna solución, ya que e^x es un número positivo para cualquier valor de x

d) $(x, y) = (-1, 3)$ es solución de la ecuación $4x + y = -1$, ya que $4(-1) + 3 = -1$

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Algunas operaciones que permiten transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla de resolver son:

- Sumar o restar una misma expresión a los dos miembros de la ecuación.
- Multiplicar o dividir por una misma expresión no nula los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo 5:

Son ecuaciones equivalentes a la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ las siguientes:

sumando 13 a los dos miembros	$6x = 3x + 15$
restando $3x$ a los dos miembros	$3x = 15$
multiplicando por $\frac{1}{3}$ los dos miembros	$x = 5$

Por tanto, la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ tiene una única solución que es $x = 5$

1.2.1. Ecuaciones polinómicas con una incógnita

Una **ecuación polinómica** de grado n es aquella equivalente a una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde a_n, a_{n-1}, ... y a_0 son números reales (llamados coeficientes de la ecuación) y $a_n \neq 0$

Ejemplo 6:

a) $\frac{x-1}{8} = \frac{x^2-1}{4}$ es una ecuación polinómica de grado 2

b) Las siguientes ecuaciones no son polinómicas: $4x - 5\sqrt{x} = 0$, $1 + e^x = 7$, $\frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{4}$

Ecuaciones polinómicas de primer grado

Una ecuación polinómica de primer grado o lineal es equivalente a una de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$.

Para resolverla se pasan todos los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, por último se despeja la incógnita y se obtiene una única solución:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo 7:

Para resolver la ecuación $7x - 18 = 3x$, se realizan los siguientes pasos:

1º) se pasa 18 sumando al segundo miembro	$7x = 3x + 18$
2º) se pasa $3x$ restando al primer miembro	$4x = 18$
3º) se pasa 4 dividiendo al segundo miembro	$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

Por tanto, la ecuación $7x - 18 = 3x$ tiene una única solución que es $x = \frac{9}{2}$

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Una ecuación polinómica de segundo grado o cuadrática es equivalente a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Se puede demostrar que las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula anterior se le llama discriminante de la ecuación y teniendo en cuenta su signo se tienen los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución que es doble o de multiplicidad 2 (se puede considerar que la ecuación tiene dos soluciones iguales).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 8: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.4.9}}{2.4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Por tanto, la única solución es $x = \frac{3}{2}$ que es doble o de multiplicidad 2.

c) $x^2 - 2x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.9}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{4}$ y se concluye que no existe solución real ya que el discriminante es negativo.

d) $-3x^2 + 4x = 0$. Como no hay término independiente se puede proceder de la siguiente forma:

Sacando factor común la x se tiene $x(-3x + 4) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $-3x + 4 = 0$, es decir $x = \frac{4}{3}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.

e) $5x^2 - 20 = 0$. Como no hay término en x se puede proceder de la siguiente forma:

Despejando x^2 se tiene $x^2 = 4$ y tomado raíces cuadradas $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -2$ y $x = 2$.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene como soluciones r_1 y r_2 se puede factorizar quedando:

$$a\,(x - r_1)\,(x - r_2) = 0$$

Ejemplo 9:

Las soluciones de la ecuación $-3x^2 + x + 2 = 0$ son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3).2}}{2(-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-6} = \frac{-1 \pm 5}{-6} = \begin{cases} \frac{-2}{3} \\ 1 \end{cases}$

Por tanto, la ecuación se puede escribir, $-3\left(x - \frac{-2}{3}\right)(x - 1) = 0$, es decir, $-3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) = 0$.

Ecuaciones polinómicas de cualquier grado

Si el polinomio que aparece en la ecuación polinómica está factorizado (está expresado como producto de polinomios de grado 1 o de mayor grado pero sin raíces reales), es inmediato el cálculo de sus soluciones teniendo en cuenta que un producto de factores es igual a cero si y sólo si alguno de los factores es nulo. De esta forma, las soluciones de la ecuación se obtendrán resolviendo cada una de las ecuaciones polinómicas obtenidas al igualar cada uno de los factores a cero.

Ejemplo 10: La ecuación $(2x^2 + 5)(x - 3)(1 + x) = 0$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -1$.

En efecto, al estar factorizado el polinomio, las soluciones de la ecuación se calculan resolviendo las siguientes ecuaciones:

$2x^2 + 5 = 0$ que no tiene soluciones

$x - 3 = 0$ cuya solución es $x = 3$

$1 + x = 0$ cuya solución es $x = -1$

Los siguientes resultados permiten, en algunos casos, factorizar un polinomio:

- Si no hay término independiente, es decir $a_0 = 0$, se saca factor común la mayor potencia posible de x

- Si un polinomio de coeficientes enteros es divisible por $x - x_0$, con x_0 un número entero, entonces x_0 es divisor del término independiente a_0
- Un polinomio es divisible por $x - x_0 \Leftrightarrow x_0$ es solución de la ecuación polinómica resultante de igualar ese polinomio a cero

Ejemplo 11: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^3 + 5x^2 = 0$

Para resolver esta ecuación, al ser el término independiente 0, se saca factor común x^2, quedando $x^2\ (2x + 5) = 0$. Al estar el polinomio factorizado las soluciones son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ doble} \qquad\qquad 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 0$ doble y $x = \frac{-5}{2}$.

b) $x^4 - 25 = 0$

Teniendo en cuenta que el polinomio $x^4 - 25$ es diferencia de cuadrados (los cuadrados de x^2 y de 5), la ecuación se puede escribir de la forma $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores. Como la ecuación $x^2 + 5 = 0$ no tiene solución, las únicas soluciones de la ecuación inicial son las de $x^2 - 5 = 0$, es decir, $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

c) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

Para factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ se tiene en cuenta que los divisores enteros del término independiente, -2, son 1, -1, 2 y -2. Sustituyendo $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$ en la ecuación se observa que únicamente $x = -2$ es solución. Dividiendo $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ entre $x - (-2) = x + 2$, mediante la Regla de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -1 & -2 \\ -2 & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, el polinomio se puede escribir de la forma $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = (x + 2)\ (4x^2 - 1)$ y la ecuación inicial se puede expresar como $(x + 2)\ (4x^2 - 1) = 0$. Así, las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ $\qquad 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Por tanto, las soluciones son $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{-1}{2}$.

d) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

Aplicando la Regla de Ruffini para factorizar el polinomio $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & -4 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede expresar de la forma $(x + 1)^2\ (x - 3)\ (x^2 + 1) = 0$. Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ doble} \qquad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad x^2 + 1 = 0 \text{ no tiene solución}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$ doble.

Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación bicuadrada es una ecuación polinómica de grado cuatro equivalente a una de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

Una ecuación de este tipo se resuelve transformándola en una ecuación de segundo grado con el cambio de variable $t = x^2$. Sustituyendo en la ecuación inicial se obtiene la ecuación polinómica de grado dos, $at^2 + bt + c = 0$. Resolviendo esta ecuación y considerando que $x = \pm\sqrt{t}$, se obtienen, si existen, las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 12: Resolver la ecuación $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación $t^2 - t - 6 = 0$, de donde $t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = \pm\sqrt{3}$ ya que $\pm\sqrt{-2}$ no son números reales.

1.2.2.Ecuaciones no polinómicas con una incógnita

Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un cociente de polinomios y el segundo es cero, es decir, $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

La soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación polinómica obtenida al igualar el numerador a cero y que además no anulan al polinomio del denominador, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ que no anulan al denominador $Q(x)$.

Ejemplo 13: Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 + 6x + 5 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.5}}{2} = \ = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El denominador de la ecuación inicial, $x + 1$, se anula para la solución $x = -1$, por tanto, la única solución de la ecuación $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$ es $x = -5$.

b) $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$

Para resolverla, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x\,(x + 2)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - (x^2 + 2x)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$$

Por tanto, la ecuación inicial es equivalente a $\frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$. Igualando el numerador a 0 se obtiene:

$$2 - 2x = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

Como $x = 1$ no anula el polinomio del denominador, la solución de la ecuación $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$ es $x = 1$.

Ecuaciones con raíces

Son aquellas en las que la incógnita aparece en el radicando de una o varias raíces.

Para resolver este tipo de ecuaciones se procede como sigue:

- si sólo hay una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja esta raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz, obteniéndose una ecuación sin raíces
- si hay más de una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja una de las raíces en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al índice de dicha raíz. Se repite este proceso las veces que sea necesario, hasta obtener una ecuación sin raíces
- En cualquier caso, hay que tener en cuenta que si el índice de la raíz es un número par entonces la ecuación que se obtiene no tiene porqué ser equivalente a la inicial, ya que pueden aparecer otras soluciones. Por tanto, una vez calculadas las soluciones de esta ecuación sin raíces, se ha de comprobar si realmente son soluciones de la ecuación inicial

Ejemplo 14: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}$

Como únicamente hay una raíz, $\sqrt[3]{x+1}$, para resolverla se pasa la raíz del segundo miembro al primero, quedando

$$2\sqrt[3]{x+1} = x$$

se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$\left(2\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 8(x+1) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 8x - 8 = 0$$

Para resolver esta ecuación polinómica, se factoriza mediante la regla de Ruffini el polinomio $x^3 - 8x - 8$.

	1	0	-8	-8
-2		-2	4	8
	1	-2	-4	0

Así, la ecuación polinómica se puede escribir de la forma $(x + 2)(x^2 - 2x - 4) = 0$ y sus soluciones son los valores que anulan alguno de los dos factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^3 - 8x - 8 = 0$ son $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{5}$ y $x = 1 - \sqrt{5}$.

Esta ecuación polinómica es equivalente a la inicial ya que el índice de la raíz es impar, por tanto, se puede asegurar que $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{5}$ y $x = 1 - \sqrt{5}$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}$.

b) $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$

En primer lugar, se despeja la raíz en un lado de la igualdad $\quad x - 5 = \sqrt{4x - 24}$

se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\quad (x - 5)^2 = 4x - 24$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $\quad x^2 - 14x + 49 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que su solución es $x = \dfrac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4.1.49}}{2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = 7$ doble.

En este caso se ha de comprobar si las soluciones de la ecuación polinómica lo son también de la ecuación inicial ya que al ser el índice de la raíz par, la ecuación obtenida puede no ser equivalente. Sustituyendo $x = 7$ en $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$ queda $5 = 5$ y, por tanto, se tiene que $x = 7$ es solución de la ecuación inicial.

c) $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$

En primer lugar, se deja la raíz en un lado de la igualdad $\sqrt{x + 1} = x - 1$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad $x + 1 = (x - 1)^2$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - 3x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda $x(x - 3) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 3$.

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación inicial se obtiene:

$x = 0$ no es solución de la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$, ya que sustituyendo se obtiene $2 = 0$

$x = 3$ es solución de la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$, ya que sustituyendo se obtiene $6 = 6$

Por tanto, la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$ tiene como solución $x = 3$.

d) $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} = 2$

En primer lugar, se despeja una raíz $\sqrt{2x + 9} = 2 + \sqrt{x + 1}$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad $2x + 9 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1}$

se deja la raíz en un miembro $x + 4 = 4\sqrt{x + 1}$

se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad $x^2 + 8x + 16 = 16x + 16$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - 8x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda $x(x - 8) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 8$.

Sustituyendo estos valores de la incógnita en la ecuación $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} = 2$ se comprueba que en ambos casos se cumple la igualdad, en consecuencia, las soluciones son $x = 0$ y $x = 8$.

e) $\sqrt{\frac{1}{x}} = x$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad, obteniéndose la ecuación $\frac{1}{x} = x^2$.

Para resolver la ecuación racional obtenida, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{1}{x} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x^3}{x} = 0$$

Para resolver la ecuación $\frac{1 - x^3}{x} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$1 - x^3 = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como $x = 1$ no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación $\sqrt{\frac{1}{x}} = x$ se comprueba que se cumple la igualdad, por tanto, la solución es $x = 1$.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Teniendo en cuenta que la función exponencial es inversa de la logarítmica y viceversa, en ocasiones es posible resolver ciertas ecuaciones en las que aparece una de estas dos funciones.

Para facilitar esta resolución, se indican a continuación algunas cuestiones a tener en cuenta:

- Es conveniente comenzar a resolver la ecuación despejando en uno de sus miembros un término que contenga una de estas funciones
- Si en una ecuación se aplica la función exponencial o logarítmica a los dos miembros se obtiene una ecuación equivalente ya que la función exponencial y logarítmica son inyectivas
- La función exponencial siempre toma valores positivos
- Únicamente se puede calcular el logaritmo de números positivos
- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de las potencias para simplificar la ecuación:

$$e^a\, e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de los logaritmos para simplificar la ecuación:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^b) = b\ln a \qquad (\text{con } a > 0,\ b > 0)$$

Ejemplo 15: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\ln x + 1 = 1$

Haciendo operaciones para dejar el término logarítmico en un miembro queda $\ln x = 0$

aplicando la función exponencial que es inversa de la logarítmica se obtiene $e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

Por tanto, la solución de la ecuación $\ln x + 1 = 1$ es $x = 1$

b) $e^{2x-3} - 3 = -2$

Haciendo operaciones para dejar el término exponencial en un miembro queda $e^{2x-3} = 1$

tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación $\ln(e^{2x-3}) = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{2x-3} - 3 = -2$ es $x = \frac{3}{2}$

c) $e^{3x+4} = -1$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función exponencial toma siempre valores positivos.

d) $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es inyectiva se obtiene la ecuación polinómica:

$$x^2 - 6 = -x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de x en la ecuación original se obtiene que la única solución de la ecuación $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$ es $x = -3$, ya que los términos $\ln(x^2 - 6)$ y $\ln(-x)$ no existen para $x = 2$.

e) $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$

Esta ecuación es equivalente a $e^{5x+5} = e^{-x-1}$ y teniendo en cuenta que la función exponencial es inyectiva, se obtiene:

$$5x + 5 = -x - 1 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$ es $x = -1$.

1.3. SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolver un sistema consiste en calcular el conjunto *S* (conjunto de soluciones) formado por los valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema.

A continuación se presentan los métodos de resolución más usuales en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} P(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases}$

Método de igualación

Consiste en despejar de cada una de las ecuaciones del sistema la misma incógnita e igualar las expresiones obtenidas. Como resultado de ello se obtiene una ecuación con una incógnita que se ha de resolver. Las soluciones de esta ecuación se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener los valores de la otra incógnita.

Ejemplo 16: Resolver el sistema no lineal $\begin{cases} 2x^2-y=1 \\ 6x+y=-5 \end{cases}$

Despejando la variable *y* de las dos ecuaciones queda $\begin{cases} y=2x^2-1 \\ y=-5-6x \end{cases}$

Igualando estas dos expresiones se obtiene $2x^2-1=-5-6x$

Pasando todos los sumandos al primer miembro queda $2x^2+6x+4=0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-32}}{4} = \dfrac{-6\pm 2}{4} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de *x* en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda, se obtiene:

x = -1 $\Rightarrow$ y = -5 + 6 = 1 $\qquad$ x = -2 $\Rightarrow$ y = -5 +12 = 7

Luego las soluciones del sistema son (-1, 1) y (-2, 7).

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra. De esta forma se obtiene una ecuación con una incógnita que una vez resuelta nos proporciona los valores de dicha incógnita. Sustituyendo estos valores en la expresión obtenida al despejar la otra incógnita, permite encontrar la solución buscada.

Ejemplo 17: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-6y+3=0 \\ x+5y-1=0 \end{cases}$

Para buscar su solución por el método de sustitución se elige una incógnita para despejarla, en este caso lo más sencillo es despejar *x* de la segunda ecuación quedando $x=1-5y$.

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación se obtiene $2(1-5y)-6y+3=0$, es decir, $-16y+5=0$.

Despejando *y* se obtiene $y=\dfrac{5}{16}$.

Al sustituir este valor en $x=1-5y$ queda $x=1-5\dfrac{5}{16}=-\dfrac{9}{16}$.

Luego la solución del sistema es $x=-\dfrac{9}{16}$, $y=\dfrac{5}{16}$.

Método de reducción

Consiste en sustituir una de las ecuaciones del sistema $\begin{cases} P(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases}$ por la ecuación $t\,P(x,y)+s\,Q(x,y)=0$ con t, s números reales no nulos. El nuevo sistema obtenido $\begin{cases} P(x,y)=0 \\ t\,P(x,y)+s\,Q(x,y)=0 \end{cases}$ $\left(\text{ó } \begin{cases} t\,P(x,y)+s\,Q(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases} \right)$ es equivalente al inicial y por ello con igual solución.

Teniendo en cuenta lo anterior, el método de reducción se basa en elegir t y s de forma que la ecuación $t\,P(x,y)+s\,Q(x,y)=0$ permita o bien calcular los valores de una de las incógnitas, o bien obtener una relación sencilla entre las dos incógnitas.

Ejemplo 18: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ 3x+2y+8=0 \end{cases}$

Para obtener una ecuación sin la incógnita x se multiplica la primera ecuación por 3, la segunda por -2 y se suman quedando

$$\begin{array}{r} 6x - 15y - 3 = 0 \\ \underline{-6x - 4y - 16 = 0} \\ -19y - 19 = 0 \end{array}$$

La nueva ecuación obtenida es $-19y - 19 = 0$ y sustituyendo la segunda ecuación por ella se obtiene el sistema $\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ -19y-19=0 \end{cases}$ que es equivalente al inicial.

Despejando y de la segunda ecuación obtenemos $y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación queda $2x + 5 - 1 = 0$ y por lo tanto $x = -2$. Luego la solución del sistema es (-2, -1).

Ejemplo 19: Resolver el sistema $\begin{cases} -8x+8y+x^3=0 \\ 8x-8y+y^3=0 \end{cases}$

Para obtener una relación más sencilla entre las incógnitas sumamos las dos ecuaciones quedando $y^3+x^3=0$. El sistema $\begin{cases} -8x+8y+x^3=0 \\ y^3+x^3=0 \end{cases}$ es equivalente al dado y para resolverlo despejamos y^3 de la segunda ecuación obteniéndose $y^3=-x^3$, y por lo tanto, $y = -x$.

Al sustituir este resultado en la primera ecuación se obtiene $-16x+x^3=0$, es decir, $x(-16+x^2)=0$.

Al resolver esta ecuación se obtiene $x=0$ y $(-16+x^2)=0$, por lo tanto, $x=0$, $x=\sqrt{16}=4$ y $x=-\sqrt{16}=-4$.

Hallando los correspondientes valores de y se obtienen las soluciones del sistema que son (0, 0), (4, -4), (-4, 4).

Los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones polinómicas con dos incógnitas del apartado anterior se pueden extender a sistemas con un mayor número de ecuaciones y de incógnitas, y a sistemas no polinómicos, procediendo de forma similar. A continuación se plantean algunos ejemplos.

Ejemplo 20: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y+z=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$ por el método de igualación.

Para ello, se despeja una variable, por ejemplo y, de las tres ecuaciones del sistema quedando $\begin{cases} y=1-x-z \\ y=3x+z-2 \\ y=z-1 \end{cases}$

Igualando dos a dos se obtiene $\begin{cases} 1-x-z=3x+z-2 \\ 1-x-z=z-1 \\ 3x+z-2=z-1 \end{cases}$

De esta manera se ha reducido el número de incógnitas del sistema a dos y escribiendo las incógnitas en un miembro y los términos independientes en otro, queda el sistema $\begin{cases} 4x+2z=3 \\ x+2z=2 \\ 3x=1 \end{cases}$

Despejando *x* de la tercera ecuación se obtiene $x=\frac{1}{3}$ y sustituyendo en la primera queda $\frac{4}{3}+2z=3$, luego $z=\frac{3-\frac{4}{3}}{2}=\frac{5}{6}$.

Además, es necesario comprobar que los valores $x=\frac{1}{3}$ y $z=\frac{5}{6}$ también verifican la segunda ecuación, ya que en caso contrario el sistema no tendría solución. En efecto, en este caso se verifica la igualdad ya que $\frac{1}{3}+2\frac{5}{6}=2$.

Para hallar *y* basta sustituir estos resultados en cualquiera de las ecuaciones en las que aparece despejada, por ejemplo en la tercera, $y=\frac{5}{6}-1=-\frac{1}{6}$.

Por tanto, la solución del sistema es $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{6}$, $z=\frac{5}{6}$.

Ejemplo 21: Resolver el sistema $\begin{cases} y-x^2-1=0 \\ x+y+z-1=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ por el método de sustitución.

Para resolver este sistema por el método de sustitución se elige una variable que se pueda despejar fácilmente, por ejemplo la *y* de la primera ecuación, quedando $y=1+x^2$, y se sustituye en el resto de ecuaciones obteniéndose un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el sistema inicial $\begin{cases} x+1+x^2+z-1=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x^2+x+z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$.

Despejando otra de las variables, por ejemplo la *z* de la segunda ecuación se obtiene $z=2x$.

Sustituyendo en la primera queda $x^2+x+2x=0$, es decir, $x^2+3x=0$.

Resolviendo esta última ecuación se obtiene $x=0$, $x=-3$.

Para cada uno de los anteriores valores de *x*, hallamos los respectivos valores de *y* y de *z* sustituyendo en las correspondientes igualdades:

$$x=0 \Rightarrow y=1+0^2=1,\ z=2.0=0$$
$$x=-3 \Rightarrow y=1+(-3)^2=10,\ z=2.(-3)=-6$$

Por tanto, las soluciones del sistema son (0, 1, 0) y (-3, 10, -6).

Ejemplo 22: Resolver el sistema $\begin{cases} y+z=6 \\ e^x+y=5 \\ z+e^x=3 \end{cases}$ por el método de reducción.

Restando la segunda y la tercera ecuación se obtiene $y-z=2$.

Uniendo este resultado con la primera ecuación nos da el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} y+z=6 \\ y-z=2 \end{cases}$.

Sumando sus dos ecuaciones se tiene $2y=8$, es decir, $y=4$.

Sustituyendo este valor en una cualquiera de las ecuaciones del sistema $\begin{cases} y+z=6 \\ y-z=2 \end{cases}$, por ejemplo en $y-z=2$, se obtiene $z=2$.

Para hallar x se sustituyen estos valores en una de las ecuaciones del sistema inicial en la que aparece esta incógnita, por ejemplo en $e^x + y = 5$, quedando $e^x = 1$, de donde se deduce $x = 0$.

Por tanto la solución del sistema es $x = 0$, $y = 4$, $z = 2$.

1.4. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

1.4.1. Orden en el conjunto de números reales. Intervalos. Valor absoluto

Dados dos números reales distintos, a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** y se escribe ***a* < *b*** si b-a es un número positivo. Se dice que ***a* es menor o igual que *b*** y se escribe ***a* ≤ *b*** si b-a es un número positivo o cero.

Si $a < b$ también se dice que ***b* es mayor que *a*** y se escribe ***b* > *a***. Análogamente, si $a \le b$ también se dice que ***b* es mayor o igual que *a*** y se escribe ***b* ≥ *a***.

A continuación, se enumeran algunas propiedades que relacionan las desigualdades con las operaciones entre números reales. Dados a, b y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. $a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c$
2. $a \le b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a.c \le b.c & \text{si } c \ge 0 \\ a.c \ge b.c & \text{si } c \le 0 \end{cases}$
3. Si ambos miembros de la desigualdad son positivos, al elevarlos al cuadrado la desigualdad se mantiene:

$$a > b > 0 \;\Rightarrow\; a^2 > b^2$$

4. Si $a \le b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

   Como caso particular, al tomar inversos se cumple:

   $a \ge 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \le 1$

   $0 < a \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \ge 1$

   $-1 \le a < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \le -1$

   $a \le -1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \ge -1$

Similares propiedades se verifican con la desigualdad < en lugar de la desigualdad ≤.

Ejemplo 23:

a) $-2 < 1 \;\Rightarrow\; -2+3 < 1+3 \;\Rightarrow\; 1 < 4$

b) $3 < 4 \;\Rightarrow\; -2.3 > -2.4 \;\Rightarrow\; -6 > -8$

c) $1 < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $-6 < -5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{-6} > \frac{1}{-5} \;\Rightarrow\; \frac{-1}{6} > \frac{-1}{5}$

La ordenación existente en el conjunto de los números reales permite definir un tipo de conjuntos en $\mathbb{R}$ que van a ser muy útiles: los **intervalos**. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semiabierto o semicerrado**:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Los números a y b que determinan cada uno de los conjuntos anteriores se denominan **extremos** del correspondiente intervalo.

Los intervalos que se han definido son intervalos finitos. Si se consideran los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como determinantes de uno de los dos extremos surgen los intervalos infinitos:

- **Intervalo infinito abierto**: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ o $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- **Intervalo infinito cerrado**: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ o $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Notar que $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Las propiedades anteriores son muy útiles a la hora de resolver inecuaciones.

Valor absoluto

Dado un número real cualquiera, a, se define su **valor absoluto** como $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Este valor se conoce también como **módulo** de a y representa la distancia del origen de la recta real al punto que representa al número a.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ se verifican las siguientes *propiedades:*

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)
4. $|a.b| = |a|.|b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$
6. $\sqrt{a^2} = |a|$
7. $|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$
8. $|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$

Ejemplo 24:

a) $|-3| = |3| = 3$

b) $|x^2+1| = x^2+1$

c) $|-e^x| = e^x$

d) $|e^{-x}| = e^{-x}$

e) $|7-x| = \begin{cases} 7-x & \text{si } 7-x \geq 0 \\ -(7-x) & \text{si } 7-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 7-x & \text{si } x \leq 7 \\ x-7 & \text{si } x > 7 \end{cases}$

f) $|x^2-2x+1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$ ya que el cuadrado de cualquier número es siempre positivo o cero.

1.4.2. Inecuaciones

NOTA IMPORTANTE: El signo de desigualdad de una inecuación puede ser "≤", "≥", "<" o ">". Para las cuestiones teóricas que se desarrollan en esta unidad únicamente se utilizará la desigualdad ">", siendo todas ellas *generalizables* a cualquiera de las otras tres.
En los ejemplos y ejercicios se utilizarán cualquiera de las cuatro desigualdades indistintamente.

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas.

Ejemplo 25: a) $2x < 8$ es una inecuación con una incógnita
b) $x^2 - 2x \leq y - 1$ es una inecuación con dos incógnitas

Una **solución** de una inecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la desigualdad.

Ejemplo 26:

a) El valor $x = -4$ es una solución de la inecuación $3x + 7 < 1$ ya que $3(-4) + 7 = -12 + 7 = -5$ es menor que 1.

b) Los valores $x = 3$ e $y = -5$ son una solución de la inecuación $x - y \geq 2$ ya que $3 - (-5) = 8$ es mayor o igual que 2.

c) La inecuación $x^2 < 0$ no tiene solución. Es imposible encontrar un número real cuyo cuadrado sea negativo, ya que cualquier número real al cuadrado es un número positivo o cero.

Resolver una inecuación es calcular el conjunto formado por todas sus soluciones.

Ejemplo 27: a) La inecuación $x^3 \geq 8$ tiene por solución cualquier número real mayor o igual que 2.
b) La inecuación $3x + 4 \leq 16$ tiene por solución $S = (-\infty, 4]$.

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 28:

a) Las inecuaciones $3x + 4 \leq 16$ y $3x \leq 12$ son equivalentes, ya que ambas tienen por solución $S = (-\infty, 4]$.

b) Las inecuaciones $x^3 \leq 1000$ y $x^3 < 1000$ no son equivalentes, ya que $x = 10$ es solución de la primera inecuación, pero no lo es de la segunda.

Inecuaciones polinómicas con una incógnita

Las **inecuaciones polinómicas** son aquellas equivalentes a una inecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es cero. Así, una **inecuación polinómica de grado *n*** se puede escribir de la forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 > 0$ donde a_n, a_{n-1}, ... , a_0 son los coeficientes del polinomio y $a_n \neq 0$.

Ejemplo 29:

a) $4x - 5 < x - 8$ es una inecuación polinómica de grado 1

b) $1 - x^6 > 7 + 2x$ es una inecuación polinómica de grado 6

c) Las siguientes inecuaciones no son polinómicas: $4x < 5\sqrt{x}$, $3x - 5\operatorname{sen}x \geq 8$, $7 - 9x^2 < \frac{1}{x}$

Inecuaciones polinómicas de primer grado

Estas inecuaciones se pueden escribir de la forma $ax + b > 0$, con $a \neq 0$.
Para resolverlas se despeja la incógnita aplicando las propiedades del orden de números reales (apartado 1.4.1), obteniéndose la solución.

Ejemplo 30: Resolver la inecuación $3x + 7 < 5x - 11$.

Pasando x al segundo miembro y los términos independientes al otro, se obtiene $18 < 2x$
multiplicando por $\frac{1}{2}$ queda $9 < x$

Por tanto, son soluciones de la inecuación los números reales mayores que 9, es decir, el intervalo $(9, +\infty)$.

Inecuaciones polinómicas de segundo grado

Estas inecuaciones se pueden escribir de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, con $a \neq 0$.
Una forma de resolverlas es estudiar el signo del polinomio de segundo grado que se ha obtenido descomponiéndolo en producto de factores.

Ejemplo 31: Resolver la inecuación $3x^2 + 5x > x^2 + 3$

Esta inecuación es equivalente a $2x^2 + 5x - 3 > 0$

Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces, obteniéndose $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$

Por tanto, la inecuación queda $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0$

El signo de $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$, depende del signo del factor $x - \frac{1}{2}$ y del signo de $x + 3$, que a su vez dependen de que x sea mayor o menor que $\frac{1}{2}$ y que -3 respectivamente. En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de segundo grado.

Signo	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$x - \frac{1}{2}$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Inecuaciones polinómicas de cualquier grado

Para su resolución, se procede de forma similar al caso anterior, factorizando el polinomio y estudiando su signo.

Ejemplo 32: Resolver la inecuación $2x^3 - 4x^2 - 7x \leq -x^2 + x + 3$.

La inecuación anterior es equivalente a $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$

Se descompone el polinomio en producto de factores, para ello se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -8 & -3 \\
-1 & & -2 & 5 & 3 \\
\hline
 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \\
3 & & 6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda: $(x + 1)(x - 3)(2x + 1) \leq 0$. En la tabla siguiente se estudia el signo de cada uno de los factores, en los intervalos determinados por las raíces del polinomio, y efectuando el producto se obtiene su signo.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$2x + 1$	-	-	+	+
$(x + 1)(x - 3)(2x + 1)$	-	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{-1}{2}, 3\right]$

Para calcular el valor absoluto de una expresión, en ocasiones, es necesario la resolución de una inecuación como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 33:

a) $$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{si } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq \frac{-1}{2} \\ -2x-1 & \text{si } x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$

b) $$|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x^2+5x+6 \geq 0 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } x^2+5x+6 < 0 \end{cases}$$

Para determinar cuando x^2+5x+6 es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son -2 y -3 y, por tanto, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
$x + 2$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$(x + 2)(x + 3)$	+	-	+

En conclusión, $$|x^2+5x+6| = \begin{cases} x^2+5x+6 & \text{si } x \leq -3 \text{ o } x \geq -2 \\ -x^2-5x-6 & \text{si } -3 < x < -2 \end{cases}$$

c) $$|-x^2-8x| = |x^2+8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x^2+8x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } x^2+8x < 0 \end{cases}$$

Para determinar cuando x^2+8x es mayor o igual que cero o menor que cero se calculan las raíces del polinomio que son 0 y -8, por tanto, $x^2+8x = x(x+8)$. Así, el signo del polinomio dependerá de los valores de x como se muestra en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -8)	(-8, 0)	(0, +∞)
x	-	-	-
$x + 8$	-	+	+
$x\ (x + 8)$	+	-	+

En conclusión, $|-x^2-8x| = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x \leq -8 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2-8x & \text{si } -8 < x < 0 \end{cases}$

Inecuaciones racionales con una incógnita

Son aquellas equivalentes a una inecuación de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Ejemplo 34: La inecuación $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{2x - 1}{x + 1}$ es una inecuación racional que es equivalente a $\frac{x - 2}{x} - \frac{2x - 1}{x + 1} \geq 0$ y realizando operaciones se obtiene $\frac{-x^2 - 2}{x\ (x + 1)} \geq 0$

<u>NOTA</u>: Es importante observar que la inecuación $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{2x - 1}{x + 1}$ no tiene porqué ser equivalente a la que se obtiene multiplicando en cruz, $(x - 2)(x + 1) \geq x(2x - 1)$, ya que la desigualdad puede cambiar de sentido dependiendo del signo de x y de $x + 1$.

Para resolverlas se pasan a un miembro todos términos para que en el otro quede 0, luego se estudia el signo de la fracción que se ha obtenido, descomponiendo el numerador y denominador en producto de factores y teniendo en cuenta que el denominador no se puede anular.

Ejemplo 35: Resolver la inecuación $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{x^2 - 1} \geq x$

Pasando x al segundo término queda $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{x^2 - 1} - x \geq 0$

y efectuando la diferencia se obtiene $\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \geq 0$

Se descompone el numerador en producto de factores dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio cociente que se obtiene en la anterior división es $x^2 + 1$, que no tiene raíces reales. Por tanto, el numerador queda $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$

Se factoriza el denominador, teniendo en cuenta que es diferencia de cuadrados, $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Así la inecuación inicial se puede escribir $\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \geq 0$.

Al ser $x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor de x, el signo de $\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$ se puede determinar estudiando el signo del resto de factores.

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, 3)	(3, +∞)
$x - 3$	-	-	-	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
$\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$	-	+	-	+

Observar que de los extremos de los intervalos, ni -1 ni 1 son solución de la inecuación ya que anulan el denominador, pero sí lo es -3 . Por tanto, la solución es el conjunto $(-1, 1) \cup [3, +\infty)$.

Otros tipos de inecuaciones con una incógnita

Para resolver inecuaciones en las que aparecen raíces, logaritmos, exponenciales ... se puede proceder, en algunos casos, de manera análoga a lo expuesto en los apartados anteriores, teniendo en cuenta propiedades específicas de las funciones que haya en la inecuación.
A continuación, se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 36:

a) Resolver $\sqrt{7 + x - x^2} + 2 \geq x$

Se despeja la raíz quedando $\sqrt{7 + x - x^2} \geq x - 2$

se elevan ambos miembros de la desigualdad al cuadrado $7 + x - x^2 \geq x^2 - 4x + 4$

se pasan todos los términos al segundo miembro de la desigualdad $0 \geq 2x^2 - 5x - 3$

se factoriza el polinomio, obteniéndose $0 \geq (2x + 1)(x - 3)$

se calcula el signo del polinomio estudiando el signo de ambos factores en la siguiente tabla

Signo	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$2x + 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$(2x + 1)(x - 3)$	+	-	+

Se observa que los puntos del intervalo $\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$ son soluciones de la inecuación $0 \geq (2x + 1)(x - 3)$ y como los extremos del intervalo verifican la desigualdad, se deduce que $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ es la solución de esta última inecuación.

Dado que en uno de los pasos se ha elevado al cuadrado es necesario comprobar si el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ también es solución de la inecuación inicial, para ello basta hacer la verificación con un punto del intervalo ya que $7 + x - x^2$ no tiene ninguna raíz en dicho polinomio.

Así, sustituyendo x = 0 queda $\sqrt{7 + 0 - 0} + 2 \geq 0$, al ser cierta esta desigualdad se sigue que el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ es la solución de la inecuación inicial.

b) Resolver $\frac{e^x}{e^{3x-2}} < e^{-x}$

Se multiplican ambos miembros por la expresión del denominador, que al ser positiva, da lugar a la inecuación equivalente $e^x < e^{-x} e^{3x-2}$

se realizan operaciones $e^x < e^{2x-2}$

al ser la exponencial estrictamente creciente, la inecuación anterior es equivalente a $x < 2x - 2$

se pasa x al segundo miembro y -2 al primero $2 < x$

Por tanto, la solución de la inecuación inicial es $(2, +\infty)$

c) Resolver $\ln(7x - 13) < 0$

Para eliminar el logaritmo del primer miembro se aplica la función exponencial quedando $e^{\ln(7x-13)} < e^0$ o equivalentemente $7x - 13 < 1$.

Despejando x queda $x < 2$.

Por tanto, la solución de la inecuación inicial es $(-\infty, 2)$.

1.5. INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

1.5.1. Geometría en el plano

En este apartado se estudian algunas de las curvas más comunes en el plano que aparecerán en la resolución de inecuaciones con dos incógnitas.

Rectas

La **ecuación general** de una recta en el plano es $ax + by = c$ siendo a, b, c números reales y las variables x e y las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

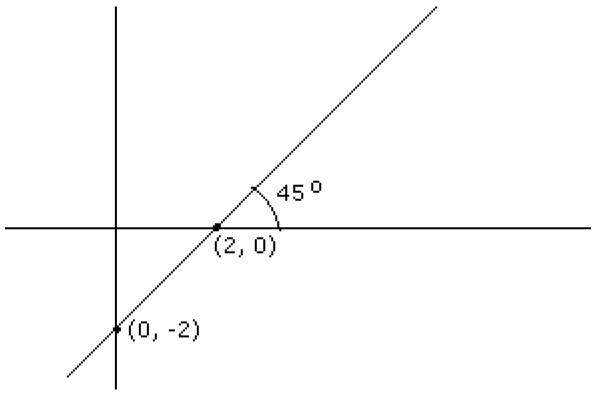
Así, un punto (x, y) del plano pertenece a la recta si verifica la ecuación.

Ejemplo 37: Para comprobar si los puntos $A = (0, -4)$, $B = (2, 1)$ y $C = (2, -1)$ pertenecen a la recta $3x - 2y = 8$, sustituimos las coordenadas de cada punto en la ecuación.

* Punto A: $3.0 - 2.(-4) = 8$, por tanto, A pertenece a la recta.
* Punto B: $3.2 - 2.1 = 6 - 2 = 4 \neq 8$, por tanto, B no pertenece a la recta.
* Punto C: $3.2 - 2.(-1) = 6 + 2 = 8$, por tanto, C pertenece a la recta.

La **inclinación** de una recta es el ángulo que forma el eje OX positivo con dicha recta y su **pendiente** es la tangente trigonométrica de su inclinación.

Ejemplo 38: La recta que pasa por los puntos (0, -2) y (2, 0) está representada en la siguiente figura. La inclinación de esta recta es igual a 45º y su pendiente es tg45º = 1.



Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente, en caso contrario, se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

Una recta viene determinada por "un punto y un vector direccional", por "dos puntos distintos" o por "un punto y la pendiente". Veamos a continuación como, a partir de estas distintas formas de determinación, se puede escribir su ecuación.

• *Ecuación de la recta que pasa por el punto* (x_0, y_0) *y es paralela al vector no nulo* (a, b)

- Si a y b son números reales no nulos la ecuación es $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$
- Si $a = 0$ la ecuación de la recta es $x = x_0$, ya que es una recta en la dirección del vector $(0, b)$, es decir, vertical.
- Si $b = 0$ la ecuación de la recta es $y = y_0$, ya que es una recta en la dirección del vector $(a, 0)$, es decir, horizontal.

Ejemplo 39: La ecuación de la recta que pasa por el punto (4, -2) y es paralela al vector (1, 5) es $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{5}$

Ejemplo 40:

a) Para calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, -2) y (-1, 3), se considera como vector direccional el vector (4, -2) - (-1, 3) = (5, -5). Por tanto, la ecuación de la recta es $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{-5}$

b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, -2) y (6, -2) viene dada por $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y+2}{-2+2}$, pero al ser cero el denominador de la segunda fracción, la ecuación de la recta es $y + 2 = 0$, es decir, $y = -2$.

- *Ecuación de la recta que pasa por el punto* (x_0, y_0) *y tiene por pendiente m*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

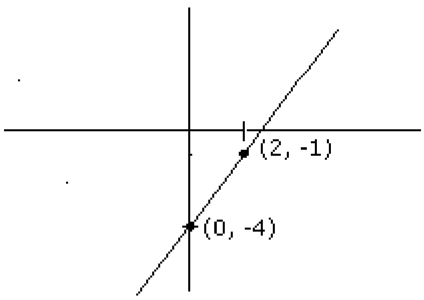
Ejemplo 41: La ecuación de la recta que pasa por el punto (1, -4) y tiene por pendiente 2 es $y + 4 = 2(x - 1)$

En ocasiones es interesante considerar la ecuación de una recta como una función, para ello se considera la **ecuación explícita**, con la variable y despejada, que tiene la forma $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n la ordenada para $x = 0$.

Esta ecuación explícita no existe para rectas verticales, es decir, para rectas cuya ecuación general es de la forma $x = k$, con k un número real. Nótese que estas rectas tienen la inclinación igual a 90º y la pendiente es infinito (o no existe).

Para representar gráficamente una recta, lo más sencillo es obtener dos puntos que pertenezcan a ella.

Ejemplo 42: Dada la recta $3x - 2y = 8$ los puntos que se obtienen para $x = 0$ y $x = 2$ son (0, -4) y (2, -1), por tanto, su gráfica es



Ejemplo 43:

a) Las rectas $y = 3x - 8$ e $y = 3x + 2$ son paralelas ya que ambas tienen la misma pendiente $m = 3$.

b) Las rectas $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{3}$ y $\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{-3}$ son paralelas ya que sus vectores direccionales (-4, 3) y (4, -3) son proporcionales y por ello tienen la misma dirección.

c) Las rectas $2x + y = 5$ y $4x + 2y = -3$ son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones no se obtiene ninguna solución.

d) Las rectas $2x - y = 5$ y $-4x + 2y = -10$ son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones se obtienen infinitas soluciones.

e) Las rectas $y = x - 8$ e $y = 3x + 2$ no son paralelas ya que sus pendientes $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$ son distintas.

f) Las rectas $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{3}$ y $\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{6}$ no son paralelas ya que tienen vectores direccionales (-4, 3) y (4, 6) tienen distinta dirección.

g) Las rectas $2x + y = 0$ y $4x + y = 2$ no son paralelas ya que al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene como solución $x = 1$, $y = -2$. Luego el punto de corte de las dos rectas es (1, -2).

Parábolas

En este apartado se estudian las parábolas que vienen definidas por polinomios de segundo grado.

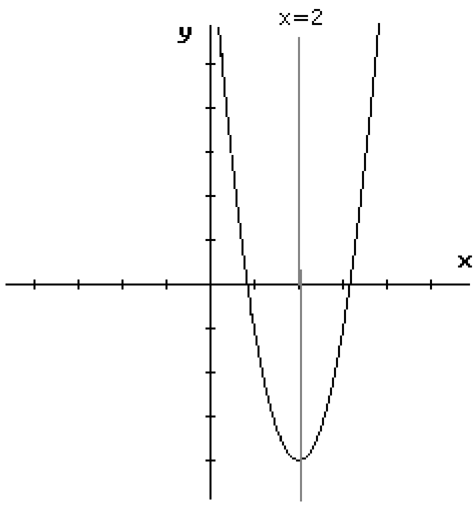
• *Parábolas de eje vertical*

La ecuación de una parábola de eje vertical es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con a no nulo.

La abscisa del vértice es $x_v = -\frac{b}{2a}$, y la ordenada y_v se calcula sustituyendo este valor en la ecuación.

Notar que si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba y que si $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

Ejemplo 44: La parábola $y = 3x^2 - 12x + 18$ tiene por eje la recta $x = -\frac{-12}{2.3} = 2$ y por vértice el punto (2, 6)

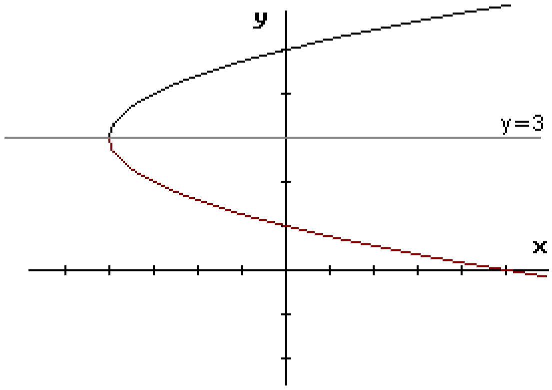


• *Parábolas de eje horizontal*

La ecuación de una parábola de eje horizontal es de la forma $x = ay^2 + by + c$, con a no nulo.

La ordenada del vértice es $y_v = -\frac{b}{2a}$, y la abscisa x_v se calcula sustituyendo este valor en la ecuación.

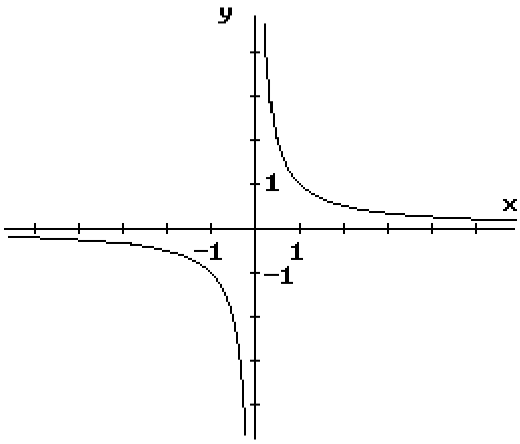
Ejemplo 45: La parábola $x = y^2 - 6y + 5$ tiene por eje la recta $y = -\frac{-6}{2} = 3$ y por vértice el punto (-4, 3)



Hipérbolas

En este apartado se estudian únicamente las hipérbolas cuya ecuación es de la forma $x.y = k$. Teniendo en cuenta el signo de k, se deduce que para $k<0$ la hipérbola está en el segundo y cuarto cuadrante, para $k>0$ la hipérbola está en el primer y tercer cuadrante y para $k=0$ la hipérbola viene representada por los ejes de coordenadas y se denomina hipérbola degenerada.

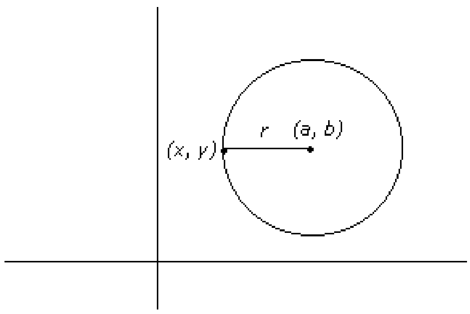
Ejemplo 46: La representación de la hipérbola de ecuación $x.y = 1$ es:



Circunferencia

La ecuación de una circunferencia de centro $C = (a, b)$ y radio r se puede escribir de la forma

$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$



En algunos casos, la circunferencia puede venir dada por una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Para determinar su centro y su radio se forman cuadrados en dicha ecuación obteniéndose $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Ejemplo 47:

a) La ecuación de la circunferencia de centro (-2, 6) y radio 4 es $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 16$, que desarrollando los cuadrados y realizando operaciones da lugar a la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$

b) El centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ se pueden calcular formando cuadrados perfectos en el primer miembro de la igualdad

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0 \iff (x^2 + 2x) + (y^2 - 8y) + 7 = 0 \iff ((x + 1)^2 - 1) + ((y - 4)^2 - 16) + 7 = 0 \iff$$
$$\iff (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

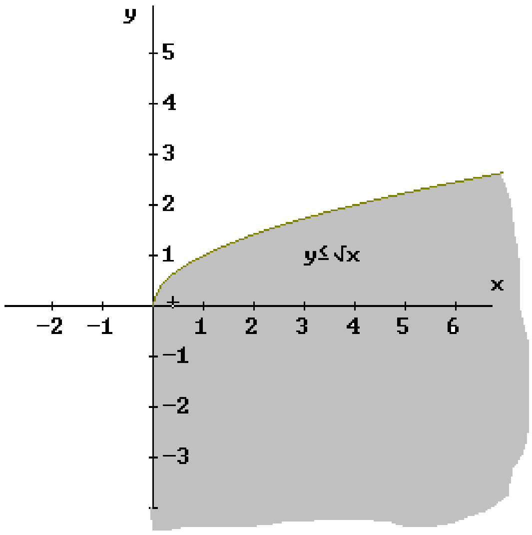
De donde se deduce que el centro de la circunferencia es el punto (-1, 4) y que el radio mide $\sqrt{10}$

1.5.2. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Dada una inecuación con dos incógnitas, su solución es la región del plano formada por los puntos (x, y) que la verifican.

Ejemplo 48: Resolver la inecuación $y \leq \sqrt{x}$

En primer lugar, hay que tener en cuenta que las soluciones serán puntos del plano (x, y) con $x \geq 0$, ya que en caso contrario no existiría su raíz cuadrada.
Representando $y = \sqrt{x}$ se obtiene la curva de la figura, que divide en dos regiones al semiplano correspondiente a los puntos con $x \geq 0$, en una de ellas los puntos verifican $y < \sqrt{x}$ y en la otra $y > \sqrt{x}$.
Considerando, por ejemplo, el punto (0, 1) y sustituyéndolo en la inecuación se obtiene $1 \leq \sqrt{0}$. Al ser falsa la anterior desigualdad, se deduce que son solución de la inecuación los puntos de la región que no contiene al (0, 1). Además al ser la desigualdad no estricta, también son solución los puntos de la curva.



La solución de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas son los puntos de la región del plano obtenida como intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones.

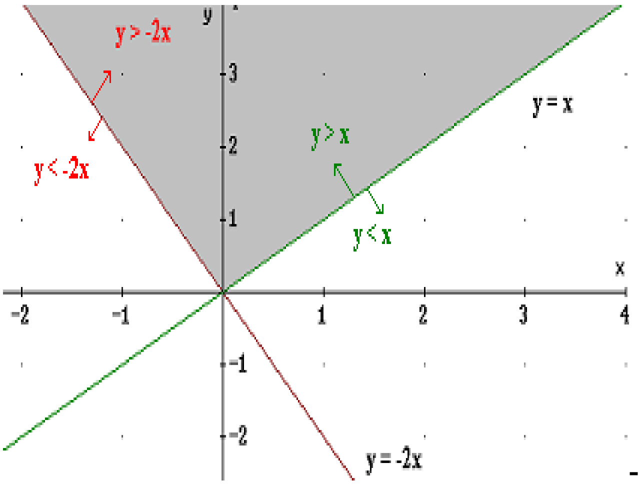
Ejemplo 49: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

En primer lugar, se despeja y de las dos inecuaciones quedando $\begin{cases} y > -2x \\ y < x \end{cases}$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = -2x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, -2) y se considera la región donde se verifica $y > -2x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 1$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 > -2$).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $y = x$ que es la recta que une los puntos (0, 0) y (1, 1) y tomamos la región donde se verifica $y < x$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 2$).

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones anteriormente determinadas y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



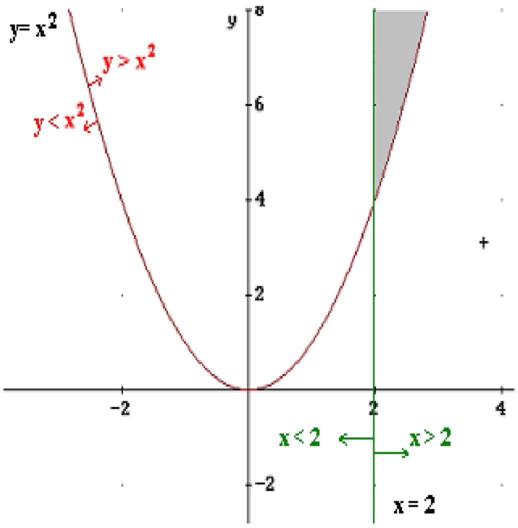
Ejemplo 50: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$

Para resolverlo despejamos *y* de la primera inecuación y *x* de la segunda quedando $\begin{cases} x^2 < y \\ x > 2 \end{cases}$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y = x^2$ que es la parábola de vértice (0, 0) que pasa por los puntos (-1, 1) y (1, 1) y se considera la región donde se verifica $x^2 < y$ para lo cual basta comprobar la desigualdad con un punto cualquiera que no esté en la parábola (por ejemplo *x* = 0, *y* = 1 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 1 > 0).

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación dibujamos $x = 2$ que es la recta vertical que pasa por (2, 0) y se considera la región donde se verifica $x > 2$.

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones que se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



1.6. NÚMEROS COMPLEJOS

1.6.1. Definiciones y Representación de los números complejos.

En el conjunto de los números reales, una ecuación tan sencilla como $x^2 + 1 = 0$ no se puede resolver ya que es equivalente a $x^2 = -1$ y no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Así, para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario construir un conjunto de números que contenga a los reales y en el que se puedan calcular las raíces cuadradas y, en general, de índice par de números negativos.

Un **número complejo** es un número de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, llamados **parte real** y **parte imaginaria** respectivamente, e i es la **unidad imaginaria** que se define como $i = \sqrt{-1}$.

El **conjunto de números complejos** es $C = \{a+bi \mid a, b \in R\}$.

Se dice que dos números complejos son **iguales** si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias. Es decir, $a+bi = c+di$ si se verifica $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 51:

a) $\sqrt{3}-4i$ es un número complejo con parte real $\sqrt{3}$ y parte imaginaria -4.

b) El número real -2 se puede considerar como un número complejo con parte real -2 y parte imaginaria 0, ya que se puede escribir $-2 = -2+0i$.

c) $\frac{2}{7}i$ es un número complejo con parte real 0 y parte imaginaria $\frac{2}{7}$, por tanto, es un número imaginario puro.

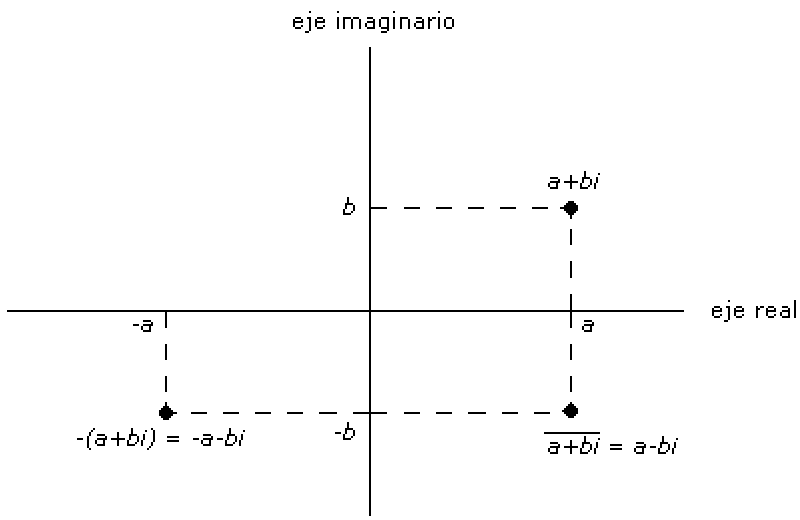
Dado un número complejo, $a+bi$, su **conjugado** es otro número complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria de signo contrario. Se representa $\overline{a+bi} = a-bi$.

Ejemplo 52: $\overline{3+4i} = 3-4i$, $\overline{\frac{4}{3}-i} = \frac{4}{3}+i$, $\overline{5} = 5$, $\overline{2i} = -2i$

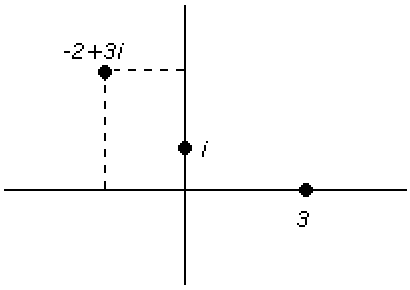
Se verifica que el conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número, es decir, $\overline{\overline{a+bi}} = a+bi$.

Los números complejos se representan en el plano. Para ello se consideran los ejes coordenados y se representan en el eje de abscisas la parte real del número complejo y en el eje de ordenadas la parte imaginaria. Así, dado el número complejo $a+bi$, su representación en el plano se corresponde con el punto dado por el par (a, b). Y recíprocamente, dado un punto en el plano definido por el par (a, b), este punto representa el numero complejo $a+bi$.

Debido a la correspondencia biunívoca que se establece entre los números complejos y los puntos del plano, éste recibe el nombre de *plano complejo*, el eje de abscisas se llama *eje real*, y el eje de ordenadas, *eje imaginario*.



Ejemplo 53: A continuación se representan en el plano complejo los números -2+3*i*, 3 e *i*.



1.6.2. Operaciones

Suma de números complejos

Dados dos números complejos se define su suma como otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Ejemplo 54:

a) $(3-2i) + (4+5i) = (3+4)+(-2+5)i = 7+3i$

b) $4+\frac{1}{3}i + \frac{3}{2}+\frac{2}{3}i = 4+\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)i = \frac{11}{2}+1i = \frac{11}{2}+i$

Producto de números complejos

El producto de dos números complejos se obtiene multiplicando las expresiones $a+bi$ y $c+di$ utilizando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a+bi).(c+di) = ac+adi+bic+bdi^2 = ac+adi+bci-bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo 55:

a) $(3+i).4i = 12i + 4i^2 = 12i - 4 = -4 + 12i$

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right).(2+10i) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i + \frac{4}{5}i + \frac{20}{5}i^2 = \frac{2}{3} - 4 + \left(\frac{10}{3}+\frac{4}{5}\right)i = \frac{-10}{3} + \frac{62}{15}i$

c) $(3+2i).(3-2i) = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$

Cociente de números complejos

Para calcular el cociente $\frac{a+bi}{c+di}$, basta multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{(c^2+d^2)+(-cd+dc)\,i} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\,i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular el inverso de un número complejo no nulo, escribiéndolo de la forma $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi}$ y realizando la división.

Ejemplo 56:

a) $\frac{11+10i}{1+4i} = \frac{(11+10i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-44i+10i-40i^2}{1-16i^2} = \frac{51-34i}{17} = 3-2i$

b) $(-3+7i)^{-1} = \frac{1}{-3+7i} = \frac{1(-3+7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \frac{-3+7i}{9-49i^2} = \frac{-3+7i}{58} = \frac{-3}{58} + \frac{7}{58}i$

1.6.3. Ecuaciones en $\mathbb{C}$.

Algunas ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los números reales, tienen solución en el conjunto $\mathbb{R}$. En general, se verifica que toda ecuación polinómica con coeficientes reales de grado n tiene n soluciones en el conjunto de los números complejos, pudiendo ser éstas números reales o imaginarios. Además, si tiene como solución un número imaginario, también es solución el conjugado de éste.

Ejemplo 57:

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ es equivalente a $x^2 = -9$, por tanto, no tiene solución en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sí la tiene en $\mathbb{C}$ ya que en este conjunto se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos la ecuación tiene dos soluciones que son $x = -3i$ y $x = 3i$ y se observa que son números complejos conjugados entre sí.

b) La ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, ya que aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones polinómicas de segundo grado se tiene $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ y se concluye que no existe solución real ya que el discriminante es negativo. Sin embargo, si la ecuación se resuelve en el conjunto de los números complejos tiene dos soluciones que son $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$

Por tanto, las soluciones en $\mathbb{C}$ son $x = 2+i$ y $x = 2-i$, que son dos números imaginarios conjugados entre sí.

c) La ecuación $x^3 - x^2 + 16x - 16 = 0$ tiene una solución real que es $x = 1$. Aplicando la Regla de Ruffini se obtiene:

$$x^3 - x^2 + 16x - 16 = (x-1)(x^2 + 16)$$

Como la ecuación $x^2 + 16 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, se concluye que $x = 1$ es la única solución real de la ecuación inicial.

Sin embargo, en $\mathbb{C}$ tiene otras dos soluciones, ya que en este conjunto se tiene:

$$x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial en $\mathbb{C}$ son $x = 1$, $x = 4i$ y $x = -4i$, siendo las dos últimas dos números complejos conjugados entre sí.