EJERCICIOS PARA RESOLVER

1. Indicar a que conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-3'020020002\ldots,\ \sqrt{625},\ \sqrt{\frac{25}{4}},\ \sqrt{0{,}0001},\ \frac{-5}{2},\ \sqrt[3]{100},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{-10}{5},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

Solución

$-3'020020002\ldots \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{625} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{\frac{25}{4}} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{0{,}0001} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\frac{-5}{2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{100} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\frac{-10}{5} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\frac{2\pi}{3} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en el caso de no ser ciertas poner un ejemplo con el que se pueda comprobar su falsedad:

a) Todos los números reales positivos son naturales.

b) Todo número decimal periódico es racional.

c) Todo número entero es irracional.

d) La suma de dos números irracionales es otro número irracional.

e) El producto de dos números racionales es otro número racional.

f) El inverso de un número real no nulo es otro número real.

g) El inverso de un número racional no nulo no puede ser un número natural.

Solución

a) Es falsa, por ejemplo $\sqrt{2}$ es un número real positivo pero no es natural.

b) Verdadera

c) Es falsa, por ejemplo -4 es un número entero pero no es irracional.

d) Es falsa, por ejemplo $1-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ son dos números irracionales y su suma, $1-\sqrt{5} + \sqrt{5} = 1$, es un número natural.

e) Verdadera

f) Verdadera

g) Es falsa, por ejemplo $\frac{1}{7}$ es un número racional y su inverso, 7, es un número natural.

3. Realizar de forma detallada las siguientes operaciones:

a) $5.3 - 2^2 + 4:2$ **b)** $3 + 2.(4-5) + 2.3$ **c)** $8 - 2.(2+3) - 2.2 + 3$

d) $3.(4-2) + 2.(5-8)$ **e)** $2 + 3.[4.(-1)-(3-7)]$ **f)** $\frac{3}{4}.\frac{1}{3} - 2:\frac{6}{5}$

g) $10 - (-4) + 12:(-3-2)$ **h)** $(5-3'43).(6'2-4)$ **i)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Solución

a) 13 **b)** 7 **c)** -3

d) 0 **e)** 2 **f)** $\frac{-17}{12}$

g) $\frac{58}{5}$ **h)** 3'454 **i)** 1

4. Escribir en las siguientes expresiones los paréntesis necesarios para que cada expresión tenga el valor indicado:

a) 6+2:2 = 4 **b)** 6+2:2 = 7 **c)** 5-3+8 = -6

d) 8+3.4-2 = 22 **e)** 8+3.4-2 = 14 **f)** -3.4+1.5 = -75

g) -3.4+1.5 = -7 **h)** 16:2.4 = 32 **i)** 16:2.4 = 2

Solución

a) (6+2):2 = 4 **b)** 6+2:2 = 7 **c)** 5-(3+8) = -6

d) (8+3).(4-2) = 22 **e)** 8+3.(4-2) = 14 **f)** -3.(4+1).5 = -75

g) -3.4+1.5 = -7 **h)** 16:2.4 = 32 **i)** 16:(2.4) = 2

5. Resolver las siguientes ecuaciones e indicar si las soluciones pertenecen a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ o $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 4x + 7 = 2x^2 - 6$ **b)** $2x^3 - 3x^2 = 2x$ **c)** $11 - 2x^2 = 1$ **d)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Solución

a) No tiene solución en $\mathbb{R}$ y, por tanto, tampoco la tiene en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

b) Las soluciones de la ecuación son $x = 2$ que es un número natural, $x = 0$ que es un número entero y $x = \frac{-1}{2}$ que es un número racional. Así, en $\mathbb{N}$ tiene una solución que es 2, en $\mathbb{Z}$ tiene dos soluciones, 0 y 2, en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ están las tres soluciones y en $\mathbb{I}$ no tiene ninguna solución.

c) Tiene dos soluciones, $x = -\sqrt{5}$ y $x = \sqrt{5}$, en $\mathbb{I}$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$ y no tiene ninguna solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

d) La única solución es $x = 1$ que pertenece a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. No tiene ninguna solución en $\mathbb{I}$.

6. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2 - 5x + 1 = (x - 1)^2$ **b)** $9x^2 + 30x + 25 = 0$ **c)** $3x^2 + 5 = 4x^2$ **d)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x - 4$

Solución

a) $x = 0$ **b)** $x = \frac{-5}{3}$ doble **c)** $x = -\sqrt{5}$ y $x = +\sqrt{5}$ **d)** No tiene solución

7. Escribir una ecuación polinómica cuyas soluciones sean:

a) $x = 0$, $x = -1$ y $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = 0$ doble, $x = -4$ doble

Solución

a) $3x^3 + x^2 - 2x = 0$ **b)** $x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 0$

8. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $6x^4 - 5x^2 = 0$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

Solución

a) $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ y $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ **b)** No tiene solución

9. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$ **b)** $4x^4 - 49 = 0$ **c)** $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

Solución

a) $x = 0$ doble y $x = 5$ doble **b)** $x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ y $x = \sqrt{\frac{7}{2}}$ **c)** $x = 1$, $x = 2$ y $x = \frac{-1}{2}$

10. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{2x^3 + 6x^2 + 8x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ **b)** $\frac{3x}{x^2 - 9} = \frac{5}{x - 3}$

Solución

a) No tiene solución **b)** $x = \frac{-15}{2}$

11. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $4x - 5\sqrt{x} = 0$ **b)** $\sqrt{x - 2} = x - 8$ **c)** $\sqrt[3]{2x - 1} = x$

Solución

a) $x = 0$ y $x = \frac{25}{16}$ **b)** $x = 11$ **c)** $x = 1$, $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{6x-5} - e = 0$ **b)** $\ln x - \ln(x-1) = \ln(4-x)$

Solución

a) $x = 1$ **b)** $x = 2$

13. Resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 2 \end{cases}$ por el método de sustitución.

Solución

$\left(-\frac{3}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$

14. Resolver por el método de igualación los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ \sqrt{x-3} + y + 4 = 2x \end{cases}$

Solución

a) $x = \frac{8}{17}$ e y = ó $\left(\frac{8}{17}, \frac{-6}{17}\right)$ **b)** Las soluciones del sistema son (4, 3) y (3, 2)

15. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x - 11y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^4 + 6y = 1 \\ x^2 + 8y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Solución

a) La solución del sistema es (23, 6).

b) Las soluciones del sistema son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{32}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{32}\right)$.

16. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y^2 + 2y = 1 \\ y - x = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^4 + 2y + z^2 = 8 \\ (1+z)x^2 + y = 3 \\ z - x = -2 \end{cases}$

Solución

a) El sistema no tiene solución. **b)** La solución del sistema es (1, 3, -1).

17. Resolver los sistemas: **a)** $\begin{cases} (x^2 - 9)y - 3 = x \\ x + xy = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y(x-2) = 4 \\ (x-1)(y-2) = 0 \end{cases}$

Solución

a) Las soluciones del sistema son $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, (2, -1) y (-3, -1).

b) Las soluciones del sistema son (1, -4) y (4, 2).

18. Ordenar los siguientes números reales de mayor a menor: $\frac{2}{5}$, $\sqrt{7}$, $-\frac{8}{17}$, 8, -3, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, $\frac{3}{4}$.

Solución

$$8 > \sqrt{7} > \sqrt{5} > \frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > -\frac{8}{17} > -3$$

19. Dados los intervalos A = (-∞, 7), B = [-4, 0] y C = [0, +∞) calcular:

a) $A \cap B$ **b)** $B \cap C$ **c)** $A \cap C$ **d)** $A \cup B$

e) $B \cup C$ **f)** $A \cup C$ **g)** $A \cap B \cap C$ **h)** $(A \cap C) \cup B$

Solución

a) [-4, 0] **b)** {0} **c)** [0, 7) **d)** (-∞, 7)

e) [-4, +∞) **f)** (-∞, +∞) = ℝ **g)** {0} **h)** [-4, 7)

20. Dados los intervalos I= [-5, 0] y J = [-$\sqrt{3}$, 4] calcular:

a) $(I \cap J)^c$ **b)** $I \cap J^c$ **c)** $I^c \cup J$ **d)** $I^c \cap J^c$

Solución

a) (-∞, -$\sqrt{3}$) ∪ (0, +∞) **b)** [-5, -$\sqrt{3}$) **c)** (-∞, -5) ∪ [-$\sqrt{3}$, +∞) **d)** (-∞, -5) ∪ (4, +∞)

21. Para cada una de las siguientes afirmaciones escribir dos intervalos que la verifiquen:

a) su unión es $\left(-8, \frac{5}{2}\right]$ **b)** su intersección es $(1, \sqrt{3})$ **c)** su intersección es $\varnothing$ y su unión es $\mathbb{R}$

Solución

a) Por ejemplo, $(-8, -2]$ y $\left(-2, \frac{5}{2}\right]$

b) Por ejemplo, $(-4, \sqrt{3})$ y $(1, +\infty)$

c) Por ejemplo, $(-\infty, 1]$ y $(1, +\infty)$

22. Determinar los intervalos de números reales que cumplen las siguientes desigualdades:

a) $\frac{x-2}{2x-1} > 0$ **b)** $x^2 + 4x - 8 \geq 2x^2 - 2x$ **c)** $\frac{3x+6}{1-x} \leq 0$

Solución

a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ **b)** $[2, 4]$ **c)** $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

23. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x+3| \geq 5\right\}$ **b)** $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 < x + 6\right\}$ **c)** $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 7 > 4|x+2|\right\}$

Solución

a) $A = (-\infty, -8] \cup [2, +\infty)$ **b)** $B = (-2, 3)$ **c)** $C = \varnothing$

24. Escribir la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones mediante intervalos:

a) $\begin{cases} 5x + 1 \leq 2(x-3) \\ \frac{x^2}{x+2} \leq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x < 6x + 1 \\ -3x^2 \geq -1 \end{cases}$

Solución

a) $(-\infty, -2)$ **b)** $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

25. Escribir la ecuación explícita de la recta que pasa por:

a) el punto $(4, 5)$ y tiene por vector direccional $(-2, 6)$.

b) los puntos $(3, -1)$ y $(-4, 2)$.

c) el punto $(4, -3)$ y es paralela a la recta $3x + 4y = 5$.

Solución

a) $y = 17 - 3x$ **b)** $y = \frac{-3}{7}x + \frac{2}{7}$ **c)** $y = \frac{-3}{4}x$

26. Estudiar si las rectas r y s son paralelas, en caso contrario calcular el punto de corte:
a) $r \equiv x - 3y = 8$ y $s \equiv 3x - y = 2$

b) $r \equiv 2x - 3y = 4$ y $s \equiv -4x + 6y = 4$

Solución

a) No son paralelas, se cortan en el punto $\left(\frac{-1}{4}, \frac{-11}{4}\right)$

b) Son paralelas.

27. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de la recta $9x - 6y - 1 = 0$ y $5x + y - 2 = 0$ y es paralela a la recta $x + y + 1 = 0$.

Solución
$3x + 3y - 2 = 0$

28. Calcular el valor del parámetro real a para que sean paralelas las siguientes rectas:
$(a + 1)x + ay + 4 = 0$ y $2ax + (2a + 1)y - 3 = 0$

Solución
$a = \frac{-1}{3}$

29. Hallar la ecuación de la circunferencia que verifica cada uno de los siguientes apartados:

a) tiene su centro en el punto (2, -5) y pasa por (3, 4).

b) pasa por los puntos (-1, -3), (-4, 0) y (0, -2).

c) uno de sus radios es el segmento que tiene por extremos los puntos (4, -1) y (2, 4).

Solución

a) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 82$

b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

c) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 29$ y $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 29$

30. Calcular el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$.

Solución

El centro es el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y el radio $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

31. Hallar el valor del parámetro a para que la recta $x+y = a$ sea tangente a la parábola de ecuación $y = 3x^2 -5x+4$.

Solución

$a = \frac{8}{3}$

32. Hallar el eje y vértice de la parábola $y = 2x^2 + 8x + 1$.

Solución

El eje es la recta $x = -2$ y el vértice es el punto (-2, -7).

33. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones: **a)** $\begin{cases} 2x+11 \geq 3 \\ 4x-7 < -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x+7 \leq 3 \\ 2-3x \leq 5 \end{cases}$

Solución

a) $S = S_1 \cap S_2 = [-4, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = \left[-4, \frac{3}{2}\right)$

b) La solución es $x = -1$ ya que $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -1] \cap [-1, +\infty) = \{-1\}$

34. Resolver los sistemas de inecuaciones: **a)** $\begin{cases} x^3 - 4x^2 \geq 3x - 18 \\ \dfrac{3+x}{x^2+1} < 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{5x+2} > 2 - 3x \\ x(x^2+1) \geq 4x^2 - 6 \end{cases}$

Solución

a) El sistema de inecuaciones no tiene solución ya que $S = S_1 \cap S_2 = [-2, +\infty) \cap (-\infty, -3) = \emptyset$

b) La solución del sistema de inecuaciones es

$$S = S_1 \cap S_2 = \left(\left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right) \cap ([-1, 2] \cup [3, +\infty]) = \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 2\right] \cup [3, +\infty)$$

35. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x^3 - 5x \geq 75 - 7x^2 \\ \dfrac{(x-1)^2}{e^x} \geq 0 \end{cases}$

Solución

La solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 = S_1 = \{-5\} \cup [3, +\infty)$.

36. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \sqrt[3]{4x^2 + 2x + 1} \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x-2} < 0 \end{cases}$

Solución

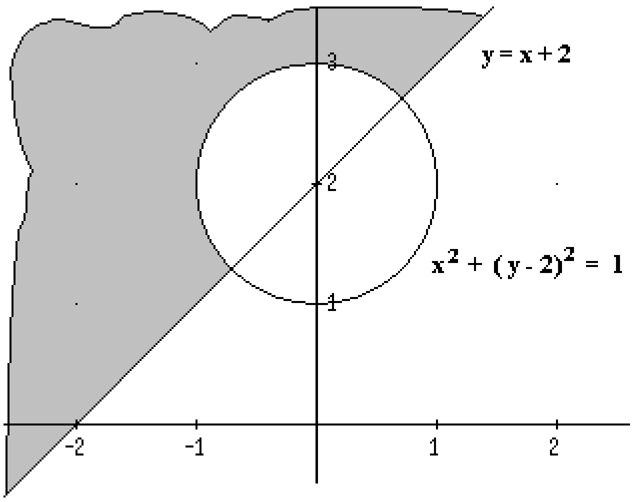
La solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{1}{2},\ 0\right] \cap (1,\ 2) = \varnothing, \text{ luego no tiene solución.}$$

37. Resolver el sistema $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 \geq 4y^2 + 4y + 2x^2 - 3 \\ y - x \geq 2 \end{cases}$ y representar gráficamente su solución.

Solución

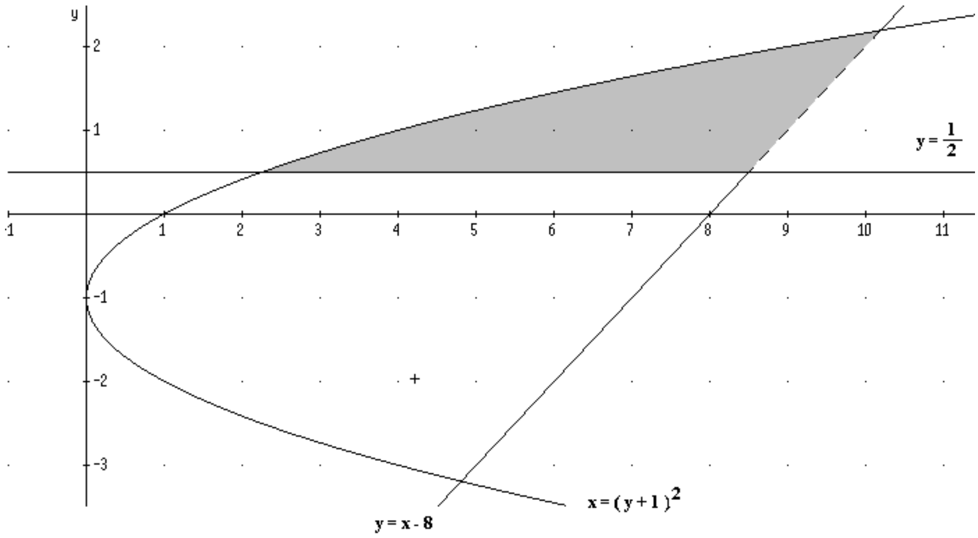
La solución del sistema es la intersección de las dos regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



38. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x - y^2 \geq 2y + 1 \\ y - x > -8 \\ 5y + x^2 + x \geq 3y - x + (x+1)^2 \end{cases}$

Solución

La solución del sistema es la intersección de las tres regiones anteriores y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



39. Dados z_1 = -3+2i, z_2 = 1+i, z_3 = 5-i y z_4 = -2-3i, calcular:

a) $z_2 + z_3 - iz_4$ **b)** $\overline{z_1 + z_2 - z_4}$ **c)** $z_1\, z_4 + 4z_2 - \overline{z_1}$ **d)** $(z_3 - z_2)(z_3 + z_2)$

e) $z_1^2 - z_4^2$ **f)** $z_1 - 13\dfrac{1}{z_4}$ **g)** $\dfrac{3z_1 + 2z_4}{z_2 + z_3}$ **h)** $(z_2 z_3)^{-1}$

Solución

a) 3+2i **b)** -6i **c)** 19+11i **d)** 24-12i

e) 10 **f)** -1-i **g)** $\dfrac{-13}{6}$ **h)** $\dfrac{3}{26} - \dfrac{1}{13}i$

40. Determinar una ecuación polinómica de coeficientes reales de grado 3 que tenga entre sus soluciones en $\mathbb{C}$ los números $\dfrac{-1}{2}$ y 5-i.

Solución

Una de las ecuaciones que cumple la condición indicada es $2x^3 - 19x^2 + 42x + 26 = 0$

41. Resolver en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 + 4x + 5 = 0$ **b)** $x^3 + x^2 + 25x + 25 = 0$ **c)** $x^4 - 8x^3 + 19x^2 = 0$

Solución

a) La ecuación no tiene soluciones en R y las soluciones en *C* son $x = -\dfrac{1}{2} + i$ y $x = -\dfrac{1}{2} - i$.

b) La única solución en R es $x = -1$ y las soluciones en *C* son $x = -1$, $x = -5i$ y $x = 5i$.

c) La única solución en R es $x = 0$ (doble) y las soluciones en *C* son $x = 0$ (doble), $x = 4 - \sqrt{3}\, i$ y $x = 4 + \sqrt{3}\, i$.