EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO

1. Determinar el precio de equilibrio de un bien cuyas funciones de demanda y de oferta están dadas por $D(p) = 25 - 3p$ y $S(p) = -5 + 2p$, respectivamente. Calcular, además, la cantidad de bien demandada para dicho precio de equilibrio.

Solución

El precio de equilibrio de un bien es aquél para el que se iguala su demanda y su oferta, es decir, $D(p) = S(p)$.

Imponiendo esta condición se obtiene la ecuación polinómica de primer grado, $25 - 3p = -5 + 2p$.

Pasando todos los términos al primer miembro queda la ecuación equivalente, $30 - 5p = 0$, cuya solución, sin más que despejar la incógnita, es $p = \frac{30}{5} = 6$.

Por tanto, el precio de equilibrio del bien es $p = 6$ y la cantidad demandada es $D(6) = 25 - 3.6 = 7$.

2. Si una tienda rebaja sus artículos un 24%, ¿cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 euros?

Solución

Llamando p al precio inicial de la prenda, el precio rebajado es la diferencia entre p y el 24% de p. Por tanto, se ha de verificar la igualdad, $38 = p - \frac{24}{100}p$.

Para calcular p, se resuelve la ecuación de primer grado anterior. Operando queda $38 = \frac{76}{100}p$, y despejando la incógnita, $p = 50$.

Por tanto, el precio inicial de la prenda es de 50 euros.

3. Un comerciante de verdura compra una cierta cantidad de tomates a 4 euros el kilo. Se le echan a perder 3 kilos y el resto los vende a 10 euros el kilo. ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia obtenida es de 90 euros?

Solución

Llamando x al número de kilos de tomates comprados, se tiene que $4x$ es el coste de la compra y $10(x - 3)$ lo obtenido con la venta, por tanto, se ha de verificar la siguiente igualdad:

$$4x + 90 = 10(x - 3)$$

Resolviendo la ecuación de primer grado anterior se tiene:

$$4x + 90 = 10(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 120 = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{120}{6} = 20$$

Por tanto, el comerciante ha comprado 20 kilos de tomates.

4. Un empresario ha comprado un local rectangular por 259.200 euros. Sabiendo que uno de los lados del local tiene una longitud igual a las tres cuartas partes del otro y que el precio del metro cuadrado es de 600 euros, ¿cuáles son las dimensiones del local?

Solución

Llamando x a la longitud en metros del lado mayor, el otro mide $\frac{3}{4}x$, por tanto, la superficie del local es, $x\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x^2$.

Teniendo en cuenta el precio total y el del metro cuadrado, se ha de verificar la igualdad,

$$600\frac{3}{4}x^2 = 259200$$

Para resolver la ecuación polinómica de segundo grado anterior se despeja x^2 quedando, $x^2 = 576$, de donde, $x = \pm\sqrt{576} = \pm 24$.

Al ser x una longitud se descarta $x = -24$ como solución del problema y se concluye que el lado mayor del local mide 24 metros y el otro $\frac{3}{4}24 = 18$ metros.

5. Calcular el precio de la entrada de niño y de adulto a un parque temático, sabiendo que ayer se recaudaron 22.000 euros por 440 entradas de adulto y 400 de niño. Además se sabe que el año pasado se recaudaron en un día 17.400 euros por 400 entradas de adulto y 330 de niño, que el precio de una entrada de adulto era un 10% más barata que este año y que una de niño es este año un 10% más cara que el año pasado.

Solución

Sean x = precio actual de la entrada de un adulto e y = precio actual de la entrada de un niño.

Teniendo en cuenta la recaudación de ayer se tiene que verificar $440x + 400y = 22000$.

Por otra parte, analizando los precios del año pasado se tiene:

- una entrada de adulto costaba $x - \frac{10}{100}x = \frac{9}{10}x$
- si una entrada de niño costaba z se cumple:

$$z + \frac{10}{100}z = y, \text{ de donde } \frac{11}{10}z = y, \text{ es decir, } z = \frac{10}{11}y$$

Teniendo en cuenta la recaudación de un día del año pasado se verifica:

$$400\frac{9}{10}x + 330\frac{10}{11}y = 17400$$

Así, el sistema a resolver es $\begin{cases} 440x + 400y = 22000 \\ 400\frac{9}{10}x + 330\frac{10}{11}y = 17400 \end{cases}$ y simplificando $\begin{cases} 11x + 10y = 550 \\ 6x + 5y = 290 \end{cases}$.

Para calcular su solución lo haremos por el método de reducción. Para ello se suma, la primera ecuación multiplicada por 6 y la segunda por -11 quedando $5y = 110$, es decir, $y = 22$.

Sustituyendo este valor en una cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo en $6x + 5y = 290$, se obtiene $6x + 5.22 = 290$ y despejando x, queda $x = 30$.

Por tanto, el precio actual de las entradas de adulto y de niño es 30 y 22 euros respectivamente.

6. Tres amigos, Pedro, Luis y Pablo, deciden asociarse para montar una empresa, necesitando para ello un capital de 15.000 euros. Como no todos disponen del mismo dinero deciden invertir de la siguiente manera: Pedro aporta el triple de lo que ponen Luis y Pablo juntos, y por cada 20 euros que aporta Luis, Pablo aporta 30. ¿Cuánto capital aportó cada uno de ellos?

Solución

Sea x, y, z el capital aportado para la empresa por Pedro, Luis y Pablo respectivamente.

Analizando el capital necesario y las condiciones de inversión de cada uno de los socios, se ha de verificar el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 15000 \\ x = 3(y + z) \\ 20z = 30y \end{cases}$

Para resolverlo se despeja z de la tercera ecuación, $z = \frac{3}{2}y$, y se sustituye en la segunda quedando $x = 3(y + \frac{3}{2}y)$, es decir, $x = \frac{15}{2}y$.

Sustituyendo $x = \frac{15}{2}y$, $z = \frac{3}{2}y$ en la primera ecuación y despejando y se obtiene:

$$\frac{15}{2}y + y + \frac{3}{2}y = 15000 \quad \Leftrightarrow \quad 10y = 15000 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1500$$

Por lo tanto, $x = \frac{15}{2}1500 = 11250$ y $z = \frac{3}{2}1500 = 2250$.

Así, el capital necesario para formar la empresa se obtiene con las siguientes aportaciones: Pedro pone 11.250 euros, Luis, 1.500 euros y Pablo, 2.250 euros.

7. Carlos compra vituallas para ir de excursión con unos amigos, por un total de 60 euros. Sin embargo el día de la excursión 3 de ellos no aparecen, lo que hace que cada uno tenga que poner un euro más de lo previsto. ¿Cuántas personas fueron a la excursión y cuánto puso cada una de ellas?

Solución

Si llamamos x al número de personas que van a la excursión y p a la cantidad de euros que tienen que poner cada una, se verifica:

- teniendo en cuenta que hubieran ido todos, $(p-1)(x+3) = 60$
- teniendo en cuenta los que han ido, $px = 60$

Luego, el sistema a resolver es $\begin{cases} (p - 1)(x + 3) = 60 \\ px = 60 \end{cases}$

Como $p \neq 0$, se puede dividir por p en la segunda ecuación para despejar x quedando $x = \frac{60}{p}$, y sustituyendo este valor en la primera se obtiene $(p - 1)(\frac{60}{p} + 3) = 60$, es decir, $57 + 3p - \frac{60}{p} = 60$.

Operando se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $3p^2 - 3p - 60 = 0$, cuyas soluciones son $p = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4.3.60}}{2.3} = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{6} = \frac{3 \pm 27}{6} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$. Al ser p un número positivo se deshecha la solución -4, por lo tanto, p = 5. Sustituyendo este valor en $x = \frac{60}{p}$, se tiene x = 12.

Por tanto, van a la excursión 12 personas y cada una ha de pagar 5 euros.

8. El precio de fabricación de x unidades de un producto, viene dado en euros por x^2 - 185x + 1000. ¿Cuántas unidades se pueden fabricar con un presupuesto máximo de 4000 euros?

Solución

Se ha de verificar $x^2 - 185x + 1000 \leq 4000$, o equivalentemente, $x^2 - 185x - 3000 \leq 0$.

Al ser una inecuación polinómica de segundo grado, se puede resolver descomponiendo el polinomio en producto de factores, para ello vamos a calcular sus raíces:

$$x = \frac{185 \pm \sqrt{185^2 - 4(-3000)}}{2} = \frac{185 \pm 215}{2} = \begin{cases} 200 \\ -15 \end{cases}$$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $(x - 200)(x + 15) \leq 0$. En la siguiente tabla se estudia el signo del polinomio, en los intervalos determinados por sus raíces.

Signo	(-∞, -15)	(-15, 200)	(200, +∞)
x - 200	-	-	+
x + 15	-	+	+
(x - 200)(x + 15)	+	-	+

Teniendo en cuenta que la inecuación viene dada por una desigualdad no estricta, se sigue que la solución es [-15, 200].

Por tanto, se pueden fabricar un máximo de 200 unidades del producto.

9. Una empresa fabrica dos tipos de artículos A y B, obteniendo unos beneficios unitarios de 5 euros para A y 8 euros para B. ¿Cuántas unidades de cada artículo se han de fabricar y vender para obtener unos beneficios superiores a 1000 euros?

Solución

Si llamamos x e y al número de unidades vendidas de A y de B respectivamente, los beneficios vendrán dados por $5x + 8y$.

Como estos beneficios han de ser superiores a 1000 se ha de verificar $5x + 8y > 1000$.

Es claro que existen muchas soluciones de esta inecuación. Para resolverla se despeja una incógnita, por ejemplo la y, procediendo de la siguiente forma:

$$5x + 8y > 1000 \iff 8y > 1000 - 5x \iff y > 125 - \frac{5}{8}x$$

Por tanto, si el número de unidades comercializadas del artículo A son x, el número de las del artículo B ha de ser superior a $125 - \frac{5}{8}x$.

10. En una granja se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra.

a) ¿Podrá producir diariamente 10 unidades de queso y 11 de mantequilla?, y ¿11 unidades de queso y 12 de mantequilla?

b) Representar en el plano las posibles producciones diarias de esta granja.

Solución

a) Si llamamos x al número de unidades producidas de queso e y a las de mantequilla, se ha de verificar:

- teniendo en cuenta la cantidad diaria máxima disponible de leche, $10x + 5y \le 200$
- teniendo en cuenta la mano de obra disponible cada día, $6x + 8y \le 150$
- además $x \ge 0$ e $y \ge 0$ por ser unidades producidas

Por tanto, se tiene que cumplir el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} 10x + 5y \le 200 \\ 6x + 8y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Para producir 10 unidades de queso y 11 de mantequilla, se ha de verificar el sistema de inecuaciones anterior para estos valores, sustituyendo x por 10 e y por 11 queda

$$\begin{cases} 10.10 + 5.11 \le 200 \\ 6.10 + 8.11 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 155 \le 200 \\ 148 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases}$$

Como se cumple, se puede afirmar que la granja podrá producir diariamente 10 unidades de queso y 11 de mantequilla.

Si sustituimos x por 11 e y por 12 en el sistema se tiene $\begin{cases} 10.11 + 5.12 \le 200 \\ 6.11 + 8.12 \le 150 \\ 11 \ge 0 \\ 12 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 170 \le 200 \\ 162 \le 150 \\ 10 \ge 0 \\ 11 \ge 0 \end{cases}$, y en este caso, la segunda de las inecuaciones no se verifica, luego no es posible producir en esta granja 11 unidades de queso y 12 de mantequilla.

b) Para representar todas las posibles producciones diarias de la granja se tiene que resolver el sistema de inecuaciones planteado, para lo cual se calculan las soluciones de cada inecuación.

Despejando *y* de la primera queda $y \le \frac{200-10x}{5}$, es decir, $y \le 40-2x$.

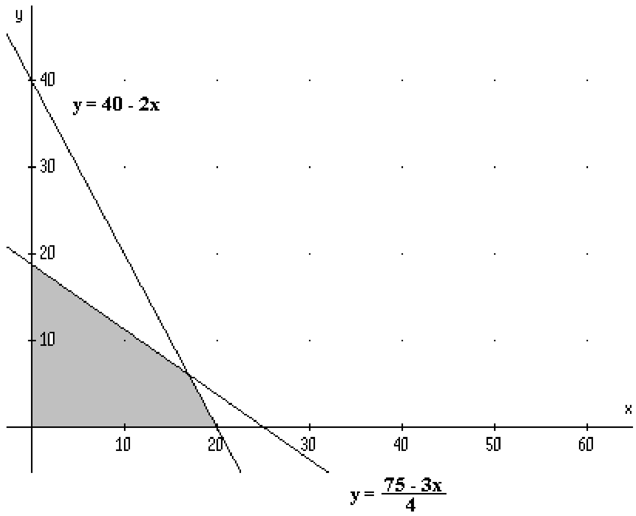
La recta $y = 40-2x$ pasa por los puntos (0, 40) y (20, 0). Para determinar la región donde se cumple $y \le 40-2x$ basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo *x* = 0, *y* = 0 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 0 ≤ 40). Por tanto, la solución está formada por los puntos del semiplano en el que está el (0, 0), es decir, por los puntos situados por debajo de la recta o en ella. (Ver figura).

Despejando *y* de la segunda inecuación queda $y \le \frac{150-6x}{8}$, es decir, $y \le \frac{75-3x}{4}$.

La recta $y = \frac{75-3x}{4}$ pasa por los puntos (1, 18) y (25, 0). Para determinar la región donde se cumple $y \le \frac{75-3x}{4}$ basta elegir un punto que no esté en la recta y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo *x* = 0, *y* = 0 es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $0 \le \frac{75}{4}$). Por tanto, la solución está formada por los puntos del semiplano en el que está el (0, 0), es decir, por los puntos situados por debajo de la recta o en ella. (Ver figura).

Las soluciones de las inecuaciones $x \ge 0$ y $y \ge 0$ son los puntos situados en el primer cuadrante incluidos los ejes que lo delimitan. (Ver figura).

Las posibles producciones diarias de la granja están dadas por los puntos situados en la intersección de las regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



11. Se desea construir un corral rectangular con un lado 2 metros más largo que el otro y que tenga una superficie mínima de $15\,m^2$. Calcular la longitud que puede tener el lado menor si se dispone de hasta 20 metros lineales de cerca para vallarlo.

Solución

Si llamamos x a la longitud del lado menor del corral, se tiene que el lado mayor mide $x + 2$, el área del corral es $x(x+2)$ y el perímetro $2x+2(x+2)$.

Teniendo en cuenta las limitaciones del problema se tiene que verificar el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x(x+2) \geq 15 \\ 2x+2(x+2) \leq 20 \\ x > 0 \end{cases}$

Para resolver la primera inecuación se pasan todos sus términos al primer miembro y se opera quedando $x^2+2x-15 \geq 0$.

Se factoriza el polinomio para lo que se calculan sus raices, $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$; así la inecuación se puede escribir de la forma $(x-3)(x+5) \geq 0$.

En la tabla siguiente se estudia el signo del polinomio en los intervalos determinados por sus raíces:

Signo	(-∞, -5)	(-5, 3)	(3, +∞)
x - 3	-	-	+
x + 5	-	+	+
$(x-1)(x-4)$	+	-	+

Teniendo en cuenta la tabla anterior y que la desigualdad es no estricta, la solución de esta inecuación es (-∞, -5] ∪ [3, +∞).

Realizando operaciones en la segunda inecuación queda $4x+4 \leq 20$, es decir, $x \leq 4$. Por tanto, su solución es (-∞, 4].

En consecuencia, la solución del sistema es S = ((-∞, -5] ∪ [3, +∞)) ∩ (-∞, 4] ∩ (0, +∞) = [3, 4].

La longitud del lado menor del corral podrá ser cualquier valor del intervalo [3, 4].