

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular los dominios de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-6}$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

e) $f(x) = e^{\frac{5+x}{1+x}}$

f) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^2-9}$

Solución

a) La función $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-6}$ es racional, por lo tanto, no está definida en aquellos puntos que anulan el denominador. Para determinarlos se resuelve la ecuación $x^2+x-6=0$ cuya solución es $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$, luego $D = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está definida por una raíz cuadrada, sólo existe si el radicando es no negativo, es decir, si $x+3 \geq 0$. Despejando x se tiene $x \geq -3$ y por tanto, $D = [-3, +\infty)$.

c) La función $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+1}$ es composición de una función logarítmica y una racional, por tanto, para calcular su dominio hay que tener en cuenta que las dos estén definidas.

El logaritmo neperiano sólo se puede hallar de expresiones positivas, luego, es necesario que $\frac{2-x}{x+1} > 0$. Para estudiar el signo $\frac{2-x}{x+1}$ utilizaremos la tabla siguiente:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$2-x$	+	+	-
$x+1$	-	+	+
$\frac{2-x}{x+1}$	-	+	-

Se cumple que $\frac{2-x}{x+1} > 0$ en el intervalo $(-1, 2)$. Además, por ser $\frac{2-x}{x+1}$ un cociente su denominador debe de ser no nulo y por ello, $x \neq -1$.

Por tanto, $D = (-1, 2)$.

d) Como $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$ está definida por una raíz cuadrada se tiene que cumplir que $x^2+x-2 \geq 0$. Se factoriza el polinomio quedando $(x-1)(x+2) \geq 0$, y se estudia su signo en la tabla que sigue:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
-------	-----------------	-----------	----------------

$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 1)(x + 2)$	+	-	+

Teniendo en cuenta que $x = -2$ y $x = 1$ verifican la desigualdad se tiene que $D = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

e) La función exponencial $f(x) = e^{\frac{5+x}{1+x}}$ está definida siempre que lo esté su exponente $\frac{5+x}{1+x}$, es decir, si $1+x \neq 0$. Luego, $D = \mathbb{R} - \{-1\}$.

f) La función $f(x) = \sin \frac{1}{x^2 - 9}$ es composición de la función seno y una racional. Como el dominio de la función seno es \mathbb{R} , $f(x)$ está definida cuando exista la función racional $\frac{1}{x^2 - 9}$, es decir, si $x^2 - 9 \neq 0$, lo que es lo mismo $x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \neq 0$, de donde se tiene que $x \neq 3, -3$.

Por tanto, $D = \mathbb{R} - \{3, -3\}$.

2. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ y $h(x) = e^{2x-1}$; realizar las siguientes operaciones: $f - 3g + h$, $\frac{f}{h}$, $f \cdot g^2$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ h$.

Solución

$$(f - 3g + h)(x) = f(x) - 3g(x) + h(x) = x^2 - 5x + 3 - 3\sqrt{x+1} + e^{2x-1}$$

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 5x + 3}{e^{2x-1}}$$

$$(f \cdot g^2)(x) = f(x)(g(x))^2 = (x^2 - 5x + 3)(\sqrt{x+1})^2 = (x^2 - 5x + 3)(x+1) = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$$

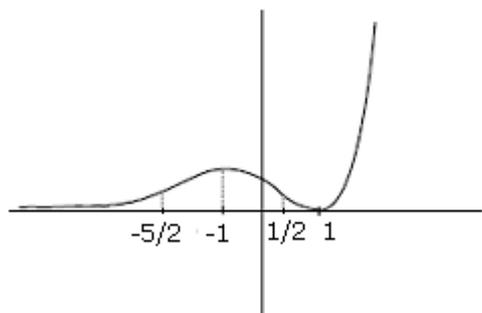
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 - 5\sqrt{x+1} + 3 = x+1 - 5\sqrt{x+1} + 3 = x - 5\sqrt{x+1} + 4$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 5x + 3) = \sqrt{x^2 - 5x + 3 + 1} = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

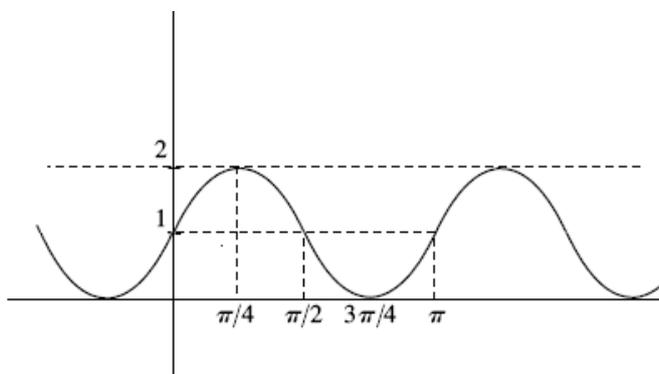
$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(e^{2x-1}\right)\right) = f\left(\sqrt{e^{2x-1} + 1}\right) = \\ &= \left(\sqrt{e^{2x-1} + 1}\right)^2 - 5\left(\sqrt{e^{2x-1} + 1}\right) + 3 = e^{2x-1} + 1 - 5\left(\sqrt{e^{2x-1} + 1}\right) + 3 = e^{2x-1} - 5\left(\sqrt{e^{2x-1} + 1}\right) + 4 \end{aligned}$$

3. Indicar qué características tienen las funciones cuyas gráficas son las siguientes curvas:

a)



b)



Solución

a) En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$ la función es estrictamente creciente y estrictamente convexa.

En el intervalo $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ la función es estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

En el intervalo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ la función es estrictamente decreciente y estrictamente cóncava.

En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ la función es estrictamente decreciente y estrictamente convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es estrictamente creciente y estrictamente convexa.

Además, está acotada inferiormente por 0 y no lo está superiormente.

No es periódica.

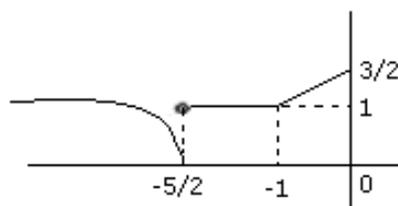
b) Es una función periódica de periodo π , por ello basta analizarla en el intervalo $[0, \pi]$.

En los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ la función es estrictamente creciente y en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ estrictamente decreciente.

La función es estrictamente cóncava en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y estrictamente convexa en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Además, está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 2.

4. Calcular los límites, si existen, de la función que tiene la siguiente gráfica en los puntos:
 $x = -5/2$, $x = -1$, $x = 0$:



Solución

En $x = -5/2$, hallamos los límites laterales ya que el comportamiento de su gráfica cambia antes y después del punto, quedando $\lim_{x \rightarrow -5/2^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -5/2^-} f(x) = 0$. Como no coinciden, se puede afirmar

que no existe $\lim_{x \rightarrow -5/2} f(x)$.

En $x = -1$ se ve claramente observando la gráfica que $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$, por tanto, se tiene que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

En $x = 0$, la función no está definida a su derecha por lo que sólo se puede calcular el límite por la izquierda obteniéndose $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2}$.

5. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \frac{5x+2}{x^2-1}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \frac{-3}{1+e^{1/x-1}}$ en $x = 1$

c) $f(x) = e^{1/|x|}$ en $x = 0$

d) $f(x) = 3^{1/x}$ en $x = 0$

Solución

a) Como al sustituir $x = 1$ en el polinomio del denominador, éste se anula, vamos a factorizarlo para separar el factor $(x - 1)$ quedando $f(x) = \frac{5x+2}{x^2-1} = \frac{5x+2}{(x-1)(x+1)}$.

Para calcular los límites laterales se utiliza notación simbólica:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{7}{0^+ \cdot 2} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{7}{0^- \cdot 2} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3}{1+e^{x-1}} = \frac{-3}{1+e^{0^+}} = \frac{-3}{1+e^{+\infty}} = \frac{-3}{1+\infty} = \frac{-3}{+\infty} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{-3}{1 + e^{-\infty}} = \frac{-3}{1 + 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

c) Para calcular este límite hay que recordar la definición de valor absoluto: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{-x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0^+}} = 3^{+\infty} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{0^-}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2+5}}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 - (x-3)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 7 \\ 7x - 61 & \text{si } 7 < x \leq 8 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-2|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solución

a) Como la función está dada por un cociente, hay que determinar los puntos que anulan el denominador, es decir, los puntos que son solución de la ecuación $3 - \sqrt{x^2+5} = 0$.

Resolviendo la ecuación queda:

$$3 - \sqrt{x^2+5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} = 3 \Rightarrow x^2+5 = 9 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 2$$

Como en el proceso de resolución se ha elevado al cuadrado, es necesario comprobar si -2 y 2 verifican la ecuación inicial: $3 - \sqrt{(-2)^2+5} = 3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0$, $3 - \sqrt{2^2+5} = 3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0$

Por tanto, $x = -2$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación.

Luego, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

En los puntos $x = -2$ y $x = 2$ presenta discontinuidades no evitables ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^-} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^+} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

b) La función $f(x) = \begin{cases} 4 - (x-3)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 7 \\ 7x - 61 & \text{si } 7 < x \leq 8 \end{cases}$ verifica:

En el intervalo $(0, 7)$ es el polinomio $4 - (x-3)^2$, luego es continua y en el intervalo $(7, 8)$ es el polinomio $7x - 61$, y por ello continua.

El único punto que requiere un estudio es $x = 7$ ya que la definición de f cambia antes y después de él, por lo que se calculan los límites laterales quedando: $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} (4 - (x-3)^2) = -12$,

$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} (7x - 61) = -12$ y $f(7) = -12$. Por tanto, f es continua en $x = 7$.

c) Para estudiar la función $f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-2|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, conviene primero escribirla sin el valor absoluto quedando $f(x) = \begin{cases} x + \frac{-x+2}{x} & \text{si } x < 2 \text{ y } x \neq 0 \\ x + \frac{x-2}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Los únicos puntos que requieren un estudio especial son $x = 0$ y $x = 2$ ya que en los demás casos la función es continua por las propiedades de continuidad estudiadas.

En $x = 0$ se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{-x+2}{x} \right) = 0 + \frac{2}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{-x+2}{x} \right) = 0 + \frac{2}{0^-} = -\infty$$

luego, la función es discontinua no evitable en este punto.

En $x = 2$ se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + \frac{x-2}{x} \right) = 2 + \frac{0}{2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + \frac{-x+2}{x} \right) = 2 + \frac{0}{2} = 2, \quad f(2) = 2$$

luego la función es continua en este punto.

d) La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua si $x \neq 0$ por ser producto y composición de funciones continuas.

En $x = 0$ se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$, por ser producto de una función que tiende a 0 y una función acotada, y $f(0) = 0$

Por tanto, f también es continua en $x = 0$.

7. Determinar el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en 1

Solución

Se calculan los límites laterales en $x = 1$ ya que la definición de la función cambia antes y después del él: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + 7) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 3x - 5) = a - 2$ y $f(1) = 5$.

Para que la función sea continua en $x = 1$ los tres valores anteriores deben coincidir, luego, $a - 2 = 5$ y por tanto, $a = 7$.

8. Hallar $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - (1-a)x - a}{x^2 - a^2}$ según los distintos valores reales de a .

Solución

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - (1-a)x - a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)(x+1)}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x+1}{x+a} = \begin{cases} \frac{a+1}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{1}{0^+} = +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

9. Hallar, si existen, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ b) $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

Solución

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$

Para estudiar la existencia de asíntotas verticales se calculan los límites laterales en $x = -2$ ya que -2 es el único punto de discontinuidad de f :

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \frac{9}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

Por tanto la recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función por la derecha y por la izquierda.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = -\infty$$

Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales pudiendo existir asíntotas oblicuas o ramas parabólicas, que se estudian hallando los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - x + 3}{x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x(x + 2)} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 3}{x + 2} = -3$$

Por tanto, la recta $y = x - 3$ es asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - x + 3}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x(x+2)} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 3}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 3}{x+2} = -3$$

Por tanto, la recta $y = x - 3$ es asíntota oblicua de f cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

Para estudiar la existencia de asíntotas verticales, como f sólo está definida a la izquierda de $x = -1$ y a la derecha de $x = 0$, se calculan los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \ln \frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = \ln \frac{-1}{0^-} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = \ln \frac{0^+}{1} = \ln 0 = -\infty$$

Por tanto la recta $x = -1$ es asíntota vertical de la función por la izquierda.

Por tanto la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función por la derecha.

Para analizar la existencia de asíntotas horizontales se calculan los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{x+1} = \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.