EJERCICIOS PARA RESOLVER

1. Calcular los dominios de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x-6}$ **c)** $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x)=e^{x^2-1}$

e) $f(x)=\sqrt{7x-x^2}$ **f)** $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2-1}$ **g)** $f(x)=2^{\frac{x}{x^2+3x+2}}$ **h)** $f(x)=\dfrac{1}{e^{x+1}-1}$

Solución

a) $D = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

b) $D = (-\infty, -5] \cup [5, 6) \cup (6, +\infty)$

c) $D = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) $D = \mathbb{R}$

e) $D = [0, 7]$

f) $D = \mathbb{R}$

g) $D = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

h) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

2. Hallar $f(-2)$, $f(-1)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(3)$ y $a.f(a)$ con $a > 0$, siendo f la función:

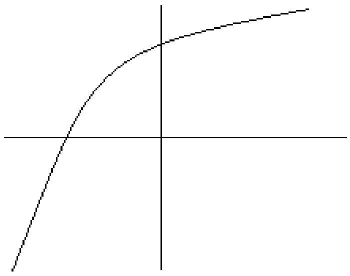
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^3-1} & \text{si } x\le -1\\ 3^{-x}+1 & \text{si } -1<x<0\\ 3x+1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

Solución

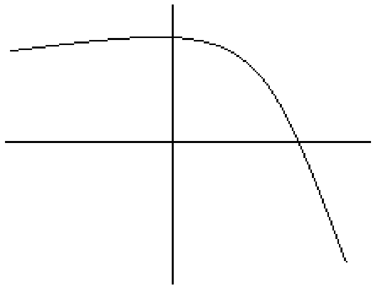
$f(-2) = \dfrac{1}{9}$, $f(-1) = 0$, $f(-1/2) = \sqrt{3}+1$, $f(3) = 10$, $a.f(a) = 3a^2 + a$

3. Dadas las siguientes gráficas, indicar cual de ellas corresponde a una función decreciente, convexa y no acotada:

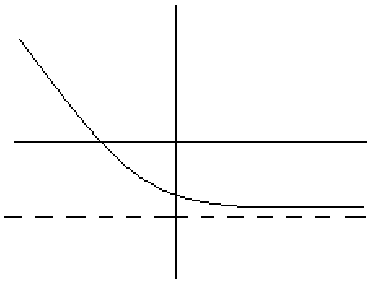
a)



b)



c)



Solución

La gráfica del apartado **c)**

4. Calcular los siguientes límites laterales:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{2-x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{2-x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-1}{2^{1/(x-1)}+3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{2^{1/(x-1)}+3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x^2+1}}{x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{x^2+1}}{x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1-x^3}{x^2-1}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^3}{x^2-1}$

Solución

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{2-x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{2-x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-1}{2^{1/(x-1)}+3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{2^{1/(x-1)}+3} = -\dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x^2+1}}{x^2} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{x^2+1}}{x^2} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1-x^3}{x^2-1} = -\dfrac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^3}{x^2-1} = -\dfrac{3}{2}$

5. Calcular los límites de las siguientes funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5}{x^3-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+5x-3}{7x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+x-1}{6x^7+x^5+x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-1}{3x^2+x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+x^2-1}{7x^3+2}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^2+1}{x^3+x^2+7}$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5}{x+5}$

Solución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5}{x^3-1} = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+5x-3}{7x-1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+x-1}{6x^7+x^5+x} = \dfrac{1}{6}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{x+1} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-1}{3x^2+x+2} = 2$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+x^2-1}{7x^3+2} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^2+1}{x^3+x^2+7} = 0$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5}{x+5} = +\infty$

6. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}+x}{\sqrt[3]{8x^3+7x^2-1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\ln x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x^2-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{\operatorname{arctg} 5x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x} = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}+x}{\sqrt[3]{8x^3+7x^2-1}} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\ln x}{x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x^2-1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right) = \dfrac{-1}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{-x}}{\operatorname{arctg} 5x} = \dfrac{1}{5}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 2x^3-15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2-x}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución

a) La función es continua en su dominio $D = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

En $x = -1$ y $x = 2$ hay discontinuidades no evitables ya que se cumple:

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

b) La función es continua en su dominio $D = \mathbb{R}$.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad no evitable ya que se cumple que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$.

d) La función es continua en su dominio $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable ya que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -4$.

e) La función es continua $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

En $x = 0$ hay una discontinuidad no evitable ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y en $x = 1$ también hay una discontinuidad no evitable ya que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

8. Hallar el valor de *a* para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2 - 2} & \text{si} \quad x < -1 \\ x^3 + x + 3 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ sea continua en $x = -1$.

Solución

$a = 3$

9. Estudiar si la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si} \quad x < -2 \\ \sqrt{x+2} + 1 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$ es continua en los siguientes intervalos:

a) $\left(-\dfrac{3}{2}, 7\right)$ **b)** $(-4, +\infty)$ **c)** [-2, 5]

Solución

a) La función es continua en $\left(-\dfrac{3}{2}, 7\right)$.

b) La función no es continua en $(-4, +\infty)$ ya que $x = -3$ no pertenece al dominio.

c) La función es continua en [-2, 5].

10. Hallar, si existen, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^5 - 8}{x^4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{x^2 - 2}$ **c)** $f(x) = e^{\frac{2-x}{1-x}}$

Solución

a) La recta $x = 0$ es asíntota vertical de *f* por la derecha y por la izquierda verificando que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de *f* cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

b) La asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{x^2 - 2}$ es la recta $y = x$.

c) La recta $x = 1$ es asíntota vertical de $f(x) = e^{\frac{2-x}{1-x}}$, por la izquierda ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ y no lo es por la derecha ya que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

La recta $y = e$ es asíntota horizontal cuando *x* tiende a $-\infty$ y cuando *x* tiende a $+\infty$.

11. Hallar, si existen, las asíntotas de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{e^{x-1}}{x-3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Solución

• *Asíntotas verticales*

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de f por la izquierda ya que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ y no lo es por la derecha ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

La recta $x = 3$ es asíntota vertical de f por la izquierda y por la derecha ya que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.

• *Asíntotas horizontales*

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.