Tema 3. FUNCIONES (Derivación)

En este tema se consideran funciones reales definidas en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, siendo D un intervalo abierto o la unión de intervalos abiertos.

3.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_0 \in D$ en el que la función es continua, se sabe que cuando x toma valores infinitamente próximos a x_0, $f(x)$ se aproxima a $f(x_0)$, pero la continuidad no informa de cómo se realiza esta aproximación, por ejemplo, si es creciendo o decreciendo y, en cada caso, si lo es con mayor o menor rapidez. El concepto de derivada que a continuación se define proporciona esta información.

Se llama **incremento de la variable independiente** x a partir de x_0 al valor $\Delta x = x - x_0$. Este valor da una medida de la proximidad entre x y x_0, de forma que $x \to x_0$ es equivalente a $\Delta x \to 0$.

Se llama **incremento de la variable dependiente** y al valor $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Este valor da una medida de la proximidad entre $f(x)$ y $f(x_0)$.

Se llama **cociente incremental** al valor $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que da una medida de la proporción en que se encuentra los incrementos definidos anteriormente.

Si se consideran puntos infinitamente próximos a x_0 hay que calcular el límite del cociente incremental cuando $x \to x_0$, lo que nos lleva a la definición de derivada de la función en el punto x_0.

Se llama **derivada de *f* en el punto x_0**, al número real, si existe, dado por:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Utilizando incrementos, teniendo en cuenta que $x = x_0 + \Delta x$, este límite se puede escribir de la forma:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

La derivada, caso de existir, se representa habitualmente por $\boldsymbol{f'(x_0)}$ o $\boldsymbol{\frac{df}{dx}(x_0)}$.

Si existe $f'(x_0)$ se dice que f es **derivable en el punto x_0**.

Ejemplo 1:

a) Dada la función $f(x) = 2x^2 + x - 1$, para saber si existe $f'(-1)$ se calcula el límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -3$$

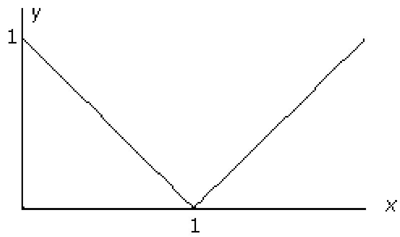
Como este límite existe y es un número real se concluye que f es derivable en el punto $x = -1$ y $f'(-1) = -3$

b) Dada la función $f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ para estudiar su derivabilidad en x = 1, se estudia si existe el límite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Como la definición de *f* es distinta a la derecha e izquierda de *x* = 1 se han de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1; \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

Al ser los dos límites laterales distintos, se concluye que no existe $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, y, en consecuencia, la función no es derivable en *x* = 1.

Representando la función se observa que en *x* = 1 la gráfica presenta un punto anguloso o punto de pico.



c) Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, veamos si es derivable en x = 0 calculando el siguiente límite:

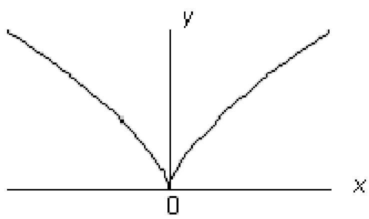
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Para obtener el límite anterior se han de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por tanto, la función no es derivable en *x* = 0 ya que no existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

La gráfica de la función presenta en *x* = 0 un punto de pico.



Una condición necesaria para que una función *f* sea derivable en un punto se da en la siguiente proposición.

Proposición

$$f \text{ derivable en } x_0 \in D \;\Rightarrow\; f \text{ continua en } x_0$$

Notar que el recíproco puede no ser cierto, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y sin embargo, no son derivables en él (apartados b y c del Ejemplo 1). Normalmente esta proposición se aplica de la siguiente forma:

$$f \text{ no continua en } x_0 \in D \;\Rightarrow\; f \text{ no derivable en } x_0$$

Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad y derivabilidad en x = 1.

Para estudiar la continuidad hay que calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$. Como la definición de f cambia antes y después del punto $x = 1$, es necesario hallar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2+1 = 2; \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Al ser distintos los límites laterales se concluye que f no es continua en $x = 1$, y por tanto, aplicando la proposición anterior, f no es derivable en $x = 1$.

Interpretación geométrica

(Ver el apartado de Interpretación geométrica en Unidad didáctica 7 de <http://www.unizar.es/aragon_tres>)

Se puede comprobar gráficamente que $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

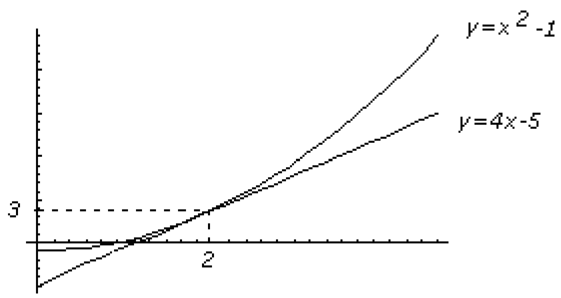
Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ se puede escribir de la forma:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo 3: Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x = 2$.

La pendiente es $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

La ecuación de la recta tangente es $y = f(2) + f'(2)(x-2)$, es decir, $y = 3 + 4(x-2)$, y operando queda $y = 4x - 5$.



Función derivada. Propiedades

Si una función $f(x)$ tiene derivada en todos los puntos de un conjunto $A \subseteq D$, se dice que f es derivable en A. En este caso, se puede definir una nueva función que se denota por f' o $\frac{df}{dx}$ y se llama **función derivada de *f*** dada por:

$$f': A \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes **reglas de derivación** que indican como obtener la función derivada de las funciones elementales más utilizadas.

$f(x)=c$	$\Rightarrow$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^a$	$\Rightarrow$	$f'(x)=ax^{a-1}$
$f(x)=a^x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f'(x)=a^x \ln a$
$f(x)=e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Propiedades

1. Si f y g son dos funciones derivables entonces $f + g$ también lo es y $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

2. Si f es una función derivable y t un número real cualquiera entonces $t.f$ también lo es y $(t.f)'(x)=t\, f'(x)$

3. Si f y g son dos funciones derivables, entonces, $f.g$ también lo es y $(f.g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

4. Si f y g son dos funciones derivables con $g(x)\neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ también lo es y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

5. Si f es derivable en x y g lo es en $f(x)$ entonces $g\circ f$ es derivable en x y $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\, f'(x)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de ***Regla de la cadena***.

6. Si f es una función inyectiva y derivable en x con $f'(x)\neq 0$ entonces la función inversa f^{-1} es derivable en $f(x)$ y $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.

Aplicando estas propiedades y las reglas de derivación se puede obtener fácilmente la función derivada de las funciones más habituales.

Ejemplo 4: Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$, derivando cada sumando se obtiene, $f'(x) = 2x + \cos x$

b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$, escribiendo la función de la forma $f(x) = x^3 - x^{-2} + x^{\frac{2}{3}}$ y derivando cada sumando queda

$$f'(x) = 3x^2 - (-2)x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

c) $f(x) = x^3 e^{2x}$, aplicando la regla de derivación del producto queda, $f'(x) = 3x^2 e^{2x} + x^3 2e^{2x} = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x}$.

d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{-x + 2}$, aplicando la regla de derivación del cociente queda

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(-x + 2) - (x^3 - x + 1)(-1)}{(-x + 2)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{(-x + 2)^2}$$

e) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = e^{\operatorname{sen} 3x}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = 3\cos 3x \; e^{\operatorname{sen} 3x}$

Una vez definida la función f' se puede plantear si esta función a su vez tiene derivada. Así para aquellos puntos en los que f' tiene derivada, se define la **función derivada segunda** de f que se denota por f'' o $\frac{d^2 f}{dx^2}$ dada por $f''(x) = (f')'(x)$.

Reiterando este proceso se pueden definir las derivadas sucesivas de f: función derivada tercera, cuarta, …, **función derivada *n*-ésima**, que las denotaremos por f''', $f^{(4)}, \ldots$, $f^{(n)}$, respectivamente.

Ejemplo 5: Hallar la función derivada n-ésima de $f(x) = e^{3x}$.

Se calcula en primer lugar la función derivada obteniéndose $f'(x) = 3\, e^{3x}$.

La función derivada segunda de f se halla derivando la función $f'(x)$ quedando $f''(x) = 3^2\, e^{3x}$.

La función derivada tercera de f se halla derivando la función $f''(x)$ quedando $f'''(x) = 3^3\, e^{3x}$.

Reiterando el proceso y generalizando los resultados obtenidos se tiene que la función derivada n-ésima de f es $f^{(n)}(x) = 3^n\, e^{3x}$.

3.2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN. EXTREMOS RELATIVOS

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_0 \in D$ se dice que $f(x)$ es:

- **Creciente** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \le f(x_0) & si \quad x < x_0 \\ f(x_0) \le f(x) & si \quad x_0 < x \end{cases}$

- **Estrictamente creciente** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que se verifica $\begin{cases} f(x) < f(x_0) & si\ x < x_0 \\ f(x_0) < f(x) & si\ x_0 < x \end{cases}$

- **Decreciente** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) & si\ x < x_0 \\ f(x_0) \geq f(x) & si\ x_0 < x \end{cases}$

- **Estrictamente decreciente** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que se verifica $\begin{cases} f(x) > f(x_0) & si\ x < x_0 \\ f(x_0) > f(x) & si\ x_0 < x \end{cases}$

A continuación se van a dar condiciones suficientes para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función a partir de la derivada.

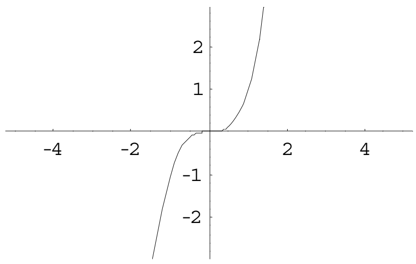
Proposición

Dada $f(x)$ una función derivable en x_0 se cumple:

a) Si $f'(x_0) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en x_0.

b) Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en x_0.

Notar que los recíprocos de estas afirmaciones no son ciertos, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $x_0 = 0$ (ver figura) y sin embargo, $f'(0)$ no es positiva ya que $f'(0) = 0$.



Ejemplo 6: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$

Esta función es derivable en su dominio, $D = (-\infty, +\infty)$, por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6$.

En este caso, para estudiar el signo de $f'(x)$ se factoriza el polinomio obteniéndose:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x + 1)(x - 1)$$

El signo de esta expresión depende del signo de $(x + 1)$ y del signo de $(x - 1)$ que cambian en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
$x + 1$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$f'(x) = 6x^2 - 6$	+	-	+

Al ser $f'(x) > 0$ en (-∞, -1) y en (1, +∞), se deduce que f es estrictamente creciente en dichos intervalos y al ser $f'(x) < 0$ en (-1, 1), la función f es estrictamente decreciente en este intervalo.

b) $f(x) = (\ln x)^2$

Esta función es derivable en su dominio $D = (0, +\infty)$ y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

Para determinar el signo de $f'(x)$ se analiza el signo del numerador y del denominador:

- El signo del numerador puede cambiar en los puntos que lo anulan: $2\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

  Así, $2\ln x < 0$ en (0, 1) y $2\ln x > 0$ en $(1, +\infty)$.

- El signo del denominador es siempre positivo en los puntos del dominio.

Se divide el dominio en los intervalos determinados por $x = 1$ y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

- En (0, 1), $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.
- En $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_0 \in D$ se dice que $f(x)$ tiene en x_0:

- Un **máximo relativo**, si existe un entorno de x_0 en el que se cumple $f(x) \le f(x_0)$.
- Un **mínimo relativo**, si existe un entorno de x_0 en el que se cumple $f(x_0) \le f(x)$.
- Un **extremo relativo**, si f tiene en x_0 un máximo o un mínimo relativo.

Si las desigualdades anteriores se verifican de forma estricta para $x \ne x_0$, se dice que el máximo o mínimo es **estricto**.

A continuación se dan condiciones necesarias y condiciones suficientes para determinar los mínimo y máximos relativos de una función a partir de las derivadas primera y segunda.

Condición necesaria de extremo relativo

Si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x_0 \in D$ y x_0 es un extremo relativo de f, entonces $f'(x_0) = 0$.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente; por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene como derivada $f'(x) = 2x^2$ que se anula en $x = 0$ y sin embargo, es estrictamente creciente en $x = 0$ por lo que no tiene extremo en dicho punto.

Se dice que x_0 **es un punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$.

Los extremos relativos de f son puntos críticos, pero no todo punto crítico es extremo relativo. Nótese que los puntos candidatos a ser extremos relativos están entre aquellos que son puntos críticos y aquellos en los que la función derivada no existe.

Condición suficiente de extremo relativo

Si f es una función con derivada segunda continua en $x_0 \in D$ y $f'(x_0) = 0$, se verifica:

a) $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_0 un mínimo relativo estricto.

b) $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_0 un máximo relativo estricto.

Otra forma de determinar lo que ocurre en un punto crítico x_0 en el que f es continua, es estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en puntos muy próximos a x_0, situados antes y después de él. Así,

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x < x_0 \\ f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_0 \text{ un} \\ \text{máximo relativo estricto} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x < x_0 \\ f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_0 \text{ un} \\ \text{mínimo relativo estricto} \end{array}$$

Ejemplo 7: Calcular los extremos relativos de la función $f(x) = \ln(1+x^2)$.

El dominio de definición de esta función es $D = (-\infty, +\infty)$ ya que $1+x^2 > 0$ para cualquier valor de x.

Para hallar los puntos críticos se calcula $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ que existe para cualquier x y se anula en $x = 0$, luego este es el único punto crítico de f. Para determinar si $x = 0$ es extremo relativo o no, se puede proceder de las dos formas siguientes.

- Si se quiere aplicar la condición suficiente mediante el signo de la segunda derivada en el punto crítico, se tiene que hallar $f''(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x.2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$ y como $f''(0) = 2 > 0$, se deduce que f tiene en $x = 0$ es un mínimo relativo estricto.

- Si se quiere estudiar el crecimiento y decrecimiento de f en las proximidades de $x = 0$, es necesario estudiar el signo de $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ antes y después del 0 como se indica en la tabla que sigue:

Signo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$2x$	-	+
$1+x^2$	+	+
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↓	↑

En $x = 0$ la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, por lo tanto, f tiene un mínimo relativo estricto en dicho punto.

3.3. CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_0 \in D$ en el que la función es derivable, se dice que $f(x)$ es:

- **Cóncava** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que la gráfica de f no queda por encima de la recta tangente a f en x_0, es decir, si $f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Si para $x \ne x_0$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente cóncava** en x_0.

- **Convexa** en x_0, si existe un entorno de x_0 en el que la gráfica de f no queda por debajo de la recta tangente a f en x_0, es decir, si $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Si para $x \ne x_0$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente convexa** en x_0.

La función f tiene en $x_0 \in D$ **un punto de inflexión** si f es estrictamente cóncava a la izquierda de x_0 y estrictamente convexa a su derecha o viceversa.

Si f es derivable en un punto de inflexión x_0, entonces la recta tangente a f en dicho punto atraviesa a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.

A continuación, se enuncian tres resultados que caracterizan la concavidad, convexidad y la existencia de puntos de inflexión para funciones derivables.

Proposición 1 (Condiciones suficientes de concavidad y convexidad)

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto $x_0 \in D$, se verifica:

a) $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente convexa en x_0

b) $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente cóncava en x_0

Proposición 2 (Condición necesaria de punto de inflexión)

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto $x_0 \in D$ y f tiene en x_0 un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

Nota: Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no sólo aquellos puntos que anulan $f''(x)$ sino también donde no existe.

Proposición 3 (Condición suficiente de punto de inflexión)

Si f es una función con derivada tercera continua en un punto $x_0 \in D$ y $f''(x_0) = 0$, se verifica:

$$f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ es un punto de inflexión de } f$$

Otra forma de determinar si un punto candidato a punto de inflexión (en el que la función es continua) lo es realmente, es estudiar la concavidad y convexidad de la función en puntos muy próximos a x_0, situados antes y después de él. Así,

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente convexa (cóncava) en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x < x_0 \\ f \text{ estrictamente cóncava (convexa) en puntos } x \text{ próximos a } x_0 \text{ con } x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ tiene en } x_0 \text{ un} \\ \text{punto de inflexión} \end{array}$$

Ejemplo 8: Estudiar la concavidad, convexidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Su derivada segunda se ha calculado en el Ejemplo 7 y es $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$.

Para realizar el estudio de su signo se factoriza únicamente el numerador ya que el denominador es siempre positivo quedando $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$

El signo de esta expresión depende de los signos de (1 - x) y de (1 + x) que cambia en los puntos x = 1 y x = -1 respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
1 - x	+	+	-
1 + x	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-

$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Luego en los intervalos (-∞, -1) y (1, +∞) la función es estrictamente cóncava y en (-1, 1) es estrictamente convexa. Además como $x = 1$ y $x = -1$ son puntos del dominio de *f* en los que cambia la concavidad-convexidad de la función, se tiene que (1, *f*(1)) = (1, ln2) y (-1, *f*(-1)) = (-1, ln2) son puntos de inflexión.

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden que son $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ y $f''(x) = \dfrac{-4}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$. Como $f''(x) \neq 0 \ \forall x$ sólo hay que considerar $x = \dfrac{1}{2}$ ya que es el único punto del dominio en el que la función no es derivable, y estudiar el signo de $f''(x)$ antes y después de él.

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ se cumple que $f''(x) > 0$, luego f es estrictamente convexa y en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ se cumple que $f''(x) < 0$, luego f es estrictamente cóncava. Por lo tanto, $x = \dfrac{1}{2}$ es un punto de inflexión de *f*.

Ejemplo 9: Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12$

Se calcula la derivada de segundo orden que es $f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$ y los puntos donde se anula, obteniéndose

$$f''(x) = 0 \iff 36x^2 - 60x - 24 = 0 \iff x = 2 \ \text{ y } \ x = -\frac{1}{3}$$

Para comprobar la condición suficiente de punto de inflexión se halla la derivada tercera quedando $f'''(x) = 72x - 60$ cuyo valor en los puntos $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ es:

$$f'''(2) = 72.2 - 60 = 84 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = 72\left(-\frac{1}{3}\right) - 60 = -84 \neq 0$$

Por lo tanto, la función tiene en $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ puntos de inflexión.