EJERCICIOS RESUELTOS

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones y escribir su función derivada:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 7x+2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 3\sqrt{7x^2+2} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = x^2 - 2x|x-3|$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por lo que hay que estudiarla teniendo en cuenta los siguientes casos:

- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ es continua y derivable, por ser un cociente de polinomios con denominador no nulo, y su derivada es $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$.
- Si $0 < x < 1$, $f(x) = 7x+2$ es continua y derivable, por ser un polinomio, y $f'(x) = 7$.
- Si $x > 1$, $f(x) = 3\sqrt{7x^2+2}$ es continua, por ser una función irracional con radicando no negativo, y derivable cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{3.14x}{2\sqrt{7x^2+2}} = \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}}$.
- Si $x = 0$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (7x+2) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{(x-1)^2} = 2$$

Como ambos límites coinciden con $f(0)=2$, f es continua en 0.

Para estudiar si es derivable en $x = 0$ calculamos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ para lo que hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{7x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{7x}{x} = 7$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{(x-1)^2}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2 x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x^2+4x}{(x-1)^2 x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x+4}{(x-1)^2} = 4$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 0$.

- Si $x = 1$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3\sqrt{7x^2+2} = 9 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(7x+2) = 9.$$

Como su valor coincide con $f(1) = 9$, se deduce que f es continua en $x = 1$.

Para estudiar si es derivable en $x = 1$ calculamos $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para lo que hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3\sqrt{7x^2+2}-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\left(3\sqrt{7x^2+2}-9\right)\left(3\sqrt{7x^2+2}+9\right)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{9(7x^2+2)-81}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{63x^2-63}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{63(x-1)(x+1)}{(x-1)(3\sqrt{7x^2+2}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{63(x+1)}{3\sqrt{7x^2+2}+9} = \frac{63.2}{18} = 7$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{7x+2-9}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{7(x-1)}{(x-1)} = 7$$

Como los límites laterales coinciden se tiene que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 7$ y por tanto, la función es derivable en $x = 1$ siendo $f'(1) = 7$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(x-1)^3} & \text{si } \; x < 0 \\ 7 & \text{si } \; 0 < x \le 1 \\ \dfrac{21x}{\sqrt{7x^2+2}} & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$

b) Como $f(x) = \sqrt{x+3}$ está dada por una raíz cuadrada, es continua en su dominio D =[-3, +∞).

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, que existe en (-3, +∞).

c) Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, la función $f(x) = x^2 - 2x\left|x-3\right|$ se escribe de la forma $f(x) = \begin{cases} x^2+2x\,(x-3) & \text{si } \; x<3 \\ x^2-2x\,(x-3) & \text{si } \; x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2-6x & \text{si } \; x<3 \\ -x^2+6x & \text{si } \; x \ge 3 \end{cases}$.

Para estudiar la continuidad y derivabilidad de f se consideran los siguientes casos:

- Si $x < 3$, $f(x) = 3x^2 - 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = 6x - 6$.
- Si $x > 3$, $f(x) = -x^2 + 6x$ es continua y derivable por ser un polinomio, y $f'(x) = -2x + 6$.
- Si $x = 3$, para estudiar la continuidad se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(-x^2+6x\right) = 9 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(3x^2-6x\right) = 9$$

Como ambos límites coinciden con $f(3) = 9$, f es continua en $x = 3$.

Para estudiar si es derivable en $x = 3$ calculamos $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ para lo que hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2+6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} -(x-3) = 0$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{3x^2-6x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{3(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} 3(x+1) = 12$$

Como no coinciden la función no es derivable en $x = 3$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 6x-6 & \text{si} \quad x<3 \\ -2x+6 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

d) Como $f(x) = \sqrt[3]{x}$ está dada por una raíz cúbica, es continua en su dominio $D = \mathbb{R}$.

La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \forall x \neq 0$.

Para estudiar si es derivable en $x = 0$ calculamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Como este límite no es un número real se concluye que la función no es derivable en $x = 0$.

2. Hallar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 1$. Para los valores calculados hallar $f'(1)$

Solución

Para que f sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ y efectuando los cálculos se obtiene: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$

Igualando queda $a+b = \dfrac{1}{2}$, es decir, $b = \dfrac{1}{2} - a$.

Para que f sea derivable en $x = 1$ se tiene que cumplir que exista y sea un número real el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Como f está definida de distinta manera a la izquierda y la derecha de $x = 1$, es necesario calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x^2-1}{2(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{2(x^2+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)(x-1)}{2(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)}{2(x^2+1)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-\frac{1}{2}}{x-1}\underset{b=\frac{1}{2}-a}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+\frac{1}{2}-a-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)}{(x-1)}=a$$

Igualando ambos límites laterales queda $a=-\frac{1}{2}$ y sustituyendo en la relación obtenida entre a y b se tiene $b=\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.

Por tanto la función es continua y derivable en $x = 1$ si $a=-\frac{1}{2}$ y $b = 1$ siendo $f'(1)=\frac{-1}{2}$.

3. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^3+\frac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$ **c)** $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$

d) $f(x)=xe^{3x^2+1}$ **e)** $f(x)=\ln\frac{2x+5}{2x-5}$ **f)** $f(x)=\sqrt[8]{x^3+sen2x}$

Solución

Para obtener las funciones derivadas usaremos la regla de la cadena, las reglas de derivación de las funciones elementales y de las operaciones de funciones.

a) Para derivar de forma más sencilla, la función se escribe $f(x)=2x^3+\frac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}=2x^3+x^{-5}+x^{\frac{2}{5}}$ y derivando queda $f'(x)=2.3x^{3-1}+(-5)x^{-5-1}+\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=6x^2-5x^{-6}+\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=6x^2-5\frac{1}{x^6}+\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

b) Para obtener la función derivada de $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$ se aplica la regla de la derivada del cociente quedando: $f'(x)=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2}=\frac{4}{(2x+1)^2}$

c) Para derivar $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$, la función se escribe $f(x)=x\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}$ y utilizando la regla de la derivada del producto queda:

$$f'(x)=\sqrt{x^2+2}+x\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}2x=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

e) Para calcular la función derivada de $f(x)=xe^{3x^2+1}$ hay que tener en cuenta la regla de la derivada del producto y la derivada de la función exponencial quedando:

$$f'(x)=e^{3x^2+1}+xe^{3x^2+1}6x=e^{3x^2+1}+6x^2e^{3x^2+1}=e^{3x^2+1}(1+6x^2)$$

f) La función $f(x)=\ln\dfrac{2x+5}{2x-5}$ es composición de un logarítmo y una función racional, por tanto su derivada se puede calcular aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{2x+5}{2x-5}}\frac{2(2x-5)-2(2x+5)}{(2x-5)^2}=\frac{-20}{(2x+5)(2x-5)}=\frac{-20}{4x^2-25}$$

g) Para derivar esta función más fácilmente se escribe $f(x)=\sqrt[8]{x^3+sen2x}=\left(x^3+\mathrm{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}}$ y derivando queda:

$$f'(x)=\frac{1}{8}\left(x^3+\mathrm{sen}2x\right)^{\frac{1}{8}-1}\left(3x^2+2\cos 2x\right)=\frac{1}{8}\left(x^3+\mathrm{sen}2x\right)^{\frac{-7}{8}}\left(3x^2+2\cos 2x\right)=\frac{\left(3x^2+2\cos 2x\right)}{8\left(x^3+\mathrm{sen}2x\right)^{\frac{7}{8}}}=$$

$$=\frac{\left(3x^2+2\cos 2x\right)}{8\,\sqrt[8]{\left(x^3+\mathrm{sen}2x\right)^7}}$$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ en x = 7 y en x = -5

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en x = -1 y en x = 0

c) $f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x<1\\ 2x^3+2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ en $x=1$ y en $x=0$

d) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ en $x=1$

Solución

a) En x = 7 la función $f(x)=\sqrt{x+2}$ es continua y derivable. Calculando la función derivada de f queda $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$, y sustituyendo en x = 7, $f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$.

En x = -5 no tiene sentido hablar de derivada ya que en dicho punto no está definida la función.

b) La función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$ es $f'(x)=(-2)x^{-3}=\dfrac{-2}{x^3}$ y su valor en x=-1, $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1)^3}=2$.

En x = 0, la función no es derivable ya que no es un punto del domino de f.

c) Se puede comprobar que la función $f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x<1\\ 2x^3+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ es continua en $x = 1$ y como su definición cambia antes y después de él, para calcular la derivada en este punto hay que hallar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ mediante los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^3+2-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^3-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}2(x^2+x+1)=6$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+1-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}3(x+1)=6$$

Al coincidir los dos límites laterales, se concluye que f es derivable en $x=1$, y que $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$.

Para calcular la derivada en $x=0<1$, se considera la definición de la función dada por $f(x)=3x^2+1$ que tiene por función derivada $f'(x)=6x$, luego $f'(0)=0$.

d) Observar que en este caso la función $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ no es continua en $x=1$ ya que $\lim\limits_{x\to 1^-}2x \neq \lim\limits_{x\to 1^+}x^2$, luego se puede afirmar sin necesidad de más cálculos que no es derivable en $x=1$.

5. Calcular la ecuación de la recta tangente, si existe, a las curvas dadas por las funciones siguientes en los puntos indicados :

a) $f(x)=x^3+7x+2$ en $x = 0$

b) $f(x)=\ln x^2$ en $x = 1$

c) $f(x)=\begin{cases}5x+1 & \text{si } x<1\\ x^2+3x+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en $x = 1$

Solución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto dado por x_0 es $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

a) Se calcula la derivada de la función $f(x)=x^3+7x+2$ quedando $f'(x)=3x^2+7$, cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'(0)=7$. Teniendo en cuenta que $f(0)=2$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (0, 2) es $y=2+7(x-0)$, es decir, $y = 7x + 2$.

b) Se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln x^2$ quedando $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, cuyo valor en el punto $x = 1$ es $f'(1) = 2$. Teniendo en cuenta que $f(1) = \ln 1 = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1, 0) es $y = 0 + 2(x-1)$, es decir, $y = 2x - 2$.

c) Se puede comprobar que la función $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2+3x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$. Para estudiar la derivabilidad de la función en dicho punto se ha de calcular $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ y, para ello, los limites laterales ya que la definición de *f* cambia antes y después de $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3x+2-6}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x+4) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x+1-6}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5x-5}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{5(x-1)}{x-1} = 5$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 1$ y $f(1) = 5$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1, 6) es $y = 6 + 5(x-1)$, es decir, $y = 5x + 1$.

6. Estudiar el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x^3 + 3x + 1$ **b)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 3-5x & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x^2-5 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Solución

a) La función $f(x) = 7x^3 + 3x + 1$ es derivable en su dominio, *D* = (-∞, +∞), por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 21x^2 + 3$.

Para determinar el crecimiento y decrecimiento de *f*, se estudia el signo de $f'(x)$ que en este caso es siempre positivo, por tanto, *f* es estrictamente creciente en (-∞, +∞) y no tiene máximos ni mínimos relativos.

b) La función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ es derivable en su dominio, *D* = (0, +∞), y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

El signo de $f'(x)$ depende del signo de su numerador ya que el denominador es siempre positivo. El signo de $1 - \ln x$ cambia en los puntos que lo anulan:

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Se divide el dominio en los dos intervalos determinados por $x = e$ y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

- En (0, *e*), se verifica $\ln x < 1$, por tanto $f'(x) > 0$, y por ello *f* es estrictamente creciente.

- En (e, $+\infty$), se verifica $\ln x > 1$, por tanto $f'(x) < 0$, y por ello f es estrictamente decreciente.

De lo anterior se deduce que en $x = e$ la función cambia de estrictamente creciente a estrictamente decreciente, por tanto, f tiene un máximo relativo estricto en dicho punto.

c) Como la función $f(x) = \begin{cases} 3-5x & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ está definida a trozos, su estudio se realiza por separado en cada uno de los intervalos en los que tiene distinta definición:

- En ($-\infty$, 1), $f'(x) = -5 < 0$, luego f es estrictamente decreciente.
- En (1, $+\infty$), $f'(x) = 6x > 0$, luego f es estrictamente creciente.

En x = 1, la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente y como además f es continua en x = 1 $\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^2-5\right) = -2,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3-5x) = -2 \text{ y } f(1) = -2\right)$, se deduce que f tiene un mínimo relativo en dicho punto.

---

7. Dada la función $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$, determinar:

a) el dominio de definición **b)** el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) La función $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$ es composición de una función logarítmica y una racional, por tanto, para calcular su dominio hay que tener en cuenta que las dos estén definidas.

El logaritmo neperiano sólo se puede hallar si $\dfrac{x+3}{x-3} > 0$. Luego hay que considerar dos casos:

- $x+3 > 0$ y $x-3 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > -3$ y $x > 3$ $\Leftrightarrow$ $x \in (3, +\infty)$
- $x+3 < 0$ y $x-3 < 0$ $\Leftrightarrow$ $x < -3$ y $x < 3$ $\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty, -3)$

Además, para que no se anule el denominador de la fracción ha de ser $x \neq 3$.

Por tanto, $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

b) Para estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos se halla la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{x+3}{x-3}}\,\frac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{1}{x+3}\,\frac{-6}{x-3} = \frac{-6}{(x+3)(x-3)}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f'(x)$ en $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y a partir de él se determina la monotonía de $f(x)$:

Signo	(-∞, -3)	(3, +∞)
$x+3$	-	+
$x-3$	-	+
$f'(x)=\dfrac{-6}{(x+3)(x-3)}$	-	-
$f(x)$	↓	↓

Por tanto, *f* es estrictamente decreciente en los intervalos (-∞, -3) y (3, +∞) y no tiene máximos ni mínimos relativos.

c) Para estudiar la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión se halla $f''(x)$ derivando en $f'(x)=\dfrac{-6}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{-6}{x^2-9}$, obteniéndose $f''(x)=\dfrac{12x}{(x^2-9)^2}$.

El signo de $f''(x)$ en *D* depende únicamente del signo de *x*, ya que su denominador es siempre positivo, así:

- En (-∞, -3), $f''(x)<0$, luego *f* es estrictamente cóncava.
- En (3, +∞), $f''(x)>0$, luego *f* es estrictamente convexa.

Por tanto, la función no tiene puntos de inflexión ya que no existe ningún punto en el que cambie la concavidad-convexidad estricta de la función.

8. Dada la función $f(x)=ax^4+4ax^3+6ax^2+x^2-bx+4ax+2x-b+a-1$, calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que en *x* = -2 tenga un punto de inflexión y para que su gráfica pase por el punto $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Solución

Para que *x* = -2 sea un punto de inflexión de *f* es necesario que $f''(-2)=0$. Derivando se obtiene:

$$f'(x)=4ax^3+12ax^2+12ax+2x-b+4a+2$$

$$f''(x)=12ax^2+24ax+12a+2$$

Imponiendo $f''(-2)=0$:

$$f''(-2)=12a(-2)^2+24a(-2)+12a+2=12a+2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$$

Para comprobar si *f* tiene en *x* = -2 un punto de inflexión veamos si $f'''(-2)\neq 0$. Derivando $f''(x)$ se obtiene:

$$f'''(x)=24ax+24a \quad \text{de donde} \quad f'''(-2)=24a(-2)+24a=-24a$$

sustituyendo $a=-\dfrac{1}{6}$ queda $f'''(-2)=-24\left(\dfrac{-1}{6}\right)=4\neq 0$. Por tanto, *x* = -2 es punto de inflexión de *f*.

Para que la gráfica de f pase por el punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ se ha de verificar $f(1) = \frac{2}{3}$, es decir:

$$f(1) = -\frac{1}{6} - 4\frac{1}{6} - 6\frac{1}{6} + 1 - b - 4\frac{1}{6} + 2 - b - \frac{1}{6} - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} - 2b = \frac{2}{3} \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

En conclusión el valor de los parámetros es $a = -\frac{1}{6}, b = -\frac{2}{3}$.

9. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 8 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{2}{a - x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que $f(x)$ es continua en $x = 3$.

b) Para $a = 0$ estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de la función.

Solución

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$ se tiene que verificar $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{a - x} = \frac{2}{a - 3}, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(x^3 - 3x - 8\right) = 27 - 9 - 8 = 10, \quad f(3) = 10$$

Igualando queda $\frac{2}{a - 3} = 10$ y despejando se tiene $a = \frac{16}{5}$

b) Para $a = 0$, la función a estudiar es $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 8 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{2}{-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

La derivada de esta función es $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ y en $x = 3$ la función no es derivable ya que no es continua puesto que $a = 0 \neq \frac{16}{5}$

Los puntos críticos se calculan a continuación:

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ y $x = -1$ (ambos menores que 3)

Además también hay que considerar como candidato a extremo relativo $x = 3$ ya que la función no es derivable en él.

Se estudia el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

- En $(-\infty, -1)$, $f'(x) = 3(x + 1)(x - 1) > 0$, luego f es estrictamente creciente.
- En $(-1, 1)$, $f'(x) = 3(x + 1)(x - 1) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.
- En $(1, 3)$, $f'(x) = 3(x + 1)(x - 1) > 0$, luego f es estrictamente creciente.
- En $(3, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$, luego f es estrictamente creciente.

En el punto x = -1, la función cambia de estrictamente creciente a estrictamente decreciente por lo tanto en x = -1 hay un máximo relativo de f y en x = 1, la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente por lo tanto, en x = 1 hay un mínimo relativo de f.

10. Estudiar la monotonía, la curvatura y la existencia de extremos relativos y de puntos de inflexión las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{1/x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ **c)** $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$

Solución

a) La función $f(x) = e^{1/x}$ no está definida para x = 0 ya que anula el denominador de su exponente, por tanto, su dominio es $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Es continua en D por ser composición de dos funciones continuas ya que una es una función exponencial y la otra una función racional con denominador no nulo. Además, $f(x)$ es derivable en D y su derivada es $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} e^{1/x} < 0, \forall x \in D$, por tanto f es estrictamente decreciente para cualquier valor x de D y no tiene extremos relativos.

Para estudiar la curvatura de f se calcula $f''(x)$ derivando $f'(x) = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2}$ y se estudia su signo:

$$f''(x) = \frac{\dfrac{1}{x^2} e^{1/x}\, x^2 + e^{1/x}\, 2x}{x^4} = \frac{e^{1/x}(1 + 2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

En la siguiente tabla se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por x = 0 y $x = -\dfrac{1}{2}$ y se determina la curvatura de $f(x)$:

Signo	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, +\infty)$
1 + 2x	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

La función es estrictamente cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ y estrictamente convexa en $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Como en el punto $x = -\dfrac{1}{2}$ cambia la concavidad-convexidad estricta de la función y $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{-1/2}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ se deduce que el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e^2}\right)$ es un punto de inflexión.

b) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x + 2}$ es $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ en el que es continua y derivable por ser cociente de polinomios con denominador no nulo.

Derivando la función queda:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+2)-(x^2-x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x-2-x^2+x-3}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$

Resolviendo $x^2+4x-5=0$, queda $x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}=\begin{cases}-5\\ 1\end{cases}$ y por tanto, la derivada se puede escribir como $f'(x)=\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$

En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos x = -5, 1 que son los que anulan al numerador de $f'(x)$ y el punto x = -2 en el que la función no es derivable.

Signo	(-∞, -5)	(-5, -2)	(-2, 1)	(1, +∞)
$x+5$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$f'(x)=\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$	+	-	-	+
$f(x)$	↑	↓	↓	↑

La función es estrictamente creciente en los intervalos (-∞, -5) y (1, +∞) y estrictamente decreciente en (-5, -2) y en (-2, 1).

En x = -5 hay un cambio de crecimiento a decrecimiento, luego se alcanza en este punto un máximo relativo, es decir, al ser $f(-5)=-11$, el punto $(-5,-11)$ es un máximo relativo.

En x = 1 hay un cambio de decrecimiento a crecimiento, luego se alcanza en este punto un mínimo relativo. Como $f(1)=1$, el punto $(1,1)$ es un mínimo relativo.

Derivando en $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$ se obtiene $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x-5)2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{(2x+4)(x+2)-(x^2+4x-5)2}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x+10}{(x+2)^3}=\frac{18}{(x+2)^3}$$

Para estudiar el signo de $f''(x)$, como su numerador es positivo basta hacerlo en los intervalos determinados por x = -2:

- En (-∞, -2), $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ la función es estrictamente cóncava.
- En (-2, +∞), $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ la función es estrictamente convexa.

Notar que en el punto x = -2 cambia la concavidad-convexidad estricta de f, pero no es un punto de inflexión ya que no pertenece al dominio de definición.

c) Para hallar el dominio de la función $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ hay que tener en cuenta que el logaritmo neperiano sólo está definido si $\frac{x}{x+1}>0$. Para resolver esta inecuación se estudia el signo de $\frac{x}{x+1}$ considerando los intervalos definidos por los puntos x = -1, 0 que son los que anulan el denominador y el numerador, respectivamente:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 0)	(0, +∞)
x	-	-	+
$x+1$	-	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	-	+

Por tanto, D = (-∞, -1) ∪ (0, +∞).

$f(x)$ es continua y derivable en D por ser composición de funciones continuas y derivables.
La monotonía de la función se determina a partir de su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x(x+1)}$$

Para estudiar su signo sólo hay que considerar los intervalos dados por los puntos x = -1, 0 que son los que anulan el denominador puesto que el numerador no se anula. En la tabla siguiente se estudia el signo de $f'(x)$ y se determina la monotonía de la función:

Signo	(-∞, -1)	(0, +∞)
x	-	+
$x+1$	-	+
$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$	+	+
$f(x)$	↑	↑

La función es estrictamente creciente en D, por lo tanto no tiene máximos ni mínimos relativos.

La curvatura de la función se determina a partir de su segunda derivada. Escribiendo $f'(x)=\frac{1}{x^2+x}$ y derivando se obtiene:

$$f''(x)=\frac{-2x-1}{\left(x^2+x\right)^2}=\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$$

Como $f''(x)$ se anula si -2x - 1 = 0, es decir, si $x=-\frac{1}{2}$ que no pertenece a D, y su denominador es positivo en D, se tiene :

- En (-∞, -1), $f''(x)>0$ ⇒ la función es estrictamente convexa.
- En (0, +∞), $f''(x)<0$ ⇒ la función es estrictamente cóncava.

Como no existe ningún punto en el que f cambie su concavidad-convexidad estricta, se deduce que f no tiene puntos de inflexión.