EJERCICIOS PARA RESOLVER

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en sus dominios, y calcular la función derivada:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{si} \quad x<-3\\ x^2+2x-3 & \text{si} \quad -3\le x\le 1\\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}x\,\text{sen}\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x\ne 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ **c)** $f(x)=|2x+7|$

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$ y en x = -3 hay una discontinuidad no evitable ya que

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty$.

La función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{-3,1\}$, en x = -3 no es derivable ya que la función no es continua y en x = 1 tampoco es derivable puesto que $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$.

La función derivada es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+3)^2} & \text{si} \quad x<-3\\ 2x+2 & \text{si} \quad -3<x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

b) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
Es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y en x = 0 la función no es derivable ya que no existe:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\text{sen}\dfrac{1}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\text{sen}\frac{1}{x^2}$$

La derivada de f es $f'(x)=\text{sen}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$, que existe si $x\ne 0$.

c) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Es derivable en $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$ y en x = $-\dfrac{7}{2}$ la función no es derivable ya que presenta un punto de pico.

La función derivada es $f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<-\dfrac{7}{2}\\ 2 & \text{si} \quad x>-\dfrac{7}{2}\end{cases}$

2. Hallar a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}ax^2+b & \text{si} \quad x\le 1\\ \sqrt{x}+1 & \text{si} \quad x<1\end{cases}$ sea continua y derivable en x = 1.

Solución

$a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{7}{4}$

3. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^5 + x^{-7} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3-3x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{3x^2-4x+1}$

d) $f(x) = (x^2+1)\,e^{-2x}$ **e)** $f(x) = \ln\frac{3-5x}{2x+7}$ **f)** $f(x) = \ln\left(1+\sqrt{2x-1}\right)$

Solución

a) $f'(x) = -15x^4 - 7x^{-8} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

b) $f'(x) = \frac{-x^4-6x^2+12x}{\left(x^3-3x^2\right)^2}$

c) $f'(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$

d) $f'(x) = 2e^{-2x}(-x^2+x-1)$

e) $f'(x) = \frac{-41}{(2x+7)(3-5x)}$

f) $f'(x) = \frac{1}{2x-1+\sqrt{2x-1}}$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x\sqrt{x-2}$ en $x = 3$ y en $x = 0$ **b)** $f(x) = e^{1/x}$ en $x = 1$ y en $x = 0$

c) $f(x) = |3x-1|$ en $x = 0$ y en $x = \frac{1}{3}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < 0 \\ x^2-2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Solución

a) $f'(3) = \frac{5}{2}$

En $x = 0$ no tiene sentido la derivada ya que en dicho punto ni siquiera está definida la función.

b) $f'(1) = -e$.

En $x = 0$, la función no es derivable ya que el punto no pertenece al domino de f.

c) $f'(0) = -3$

En $x = \frac{1}{3}$, la función no es derivable ya que:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)}{x-\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)}{x-\frac{1}{3}} = -3$$

d) $f'(0) = -2$

5. Calcular la ecuación de la recta tangente, si existe, a las curvas dadas por las funciones siguientes en los puntos indicados :

a) $f(x) = -5x^3 + 3x - 1$ en $x = -1$ **b)** $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{4} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$ **d)** $f(x) = |x+5|$ en $x = -5$

Solución

a) $y = 1 - 12(x+1)$, es decir, y = -12x - 11

b) $y = \dfrac{1}{e} + \dfrac{3}{e}(x-1)$, es decir, $y = \dfrac{3}{e}x - \dfrac{2}{e}$

c) $y = 2 + \dfrac{1}{4}(x-3)$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

d) En $x = -5$, la función no es derivable ya que $\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{f(x) - f(-5)}{x+5} \neq \lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{f(x) - f(-5)}{x+5}$, por lo tanto, no existe recta tangente a la curva determinada por dicha función en este punto.

6. Calcular las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{5x-2}$ **b)** $f(x) = x^2 e^{1/x}$ **c)** $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x+1}}{2-x}$

Solución

a) $f'(x) = \dfrac{-20}{(5x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{200}{(5x-2)^3}$, $f'''(x) = \dfrac{-3000}{(5x-2)^4}$

b) $f'(x) = (2x-1)e^{1/x}$, $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^{1/x}$, $f'''(x) = \dfrac{-1}{x^4} e^{1/x}$

c) $f'(x) = \dfrac{x+4}{2(x+1)(2-x)}$, $f''(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 2}{2(x+1)^2(2-x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{x^3 + 12x^2 - 6x + 10}{(x+1)^3(2-x)^3}$

7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 8}{x^4}$:

a) Hallar su dominio de definición.

b) Estudiar el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos.

c) Estudiar la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.

Solución

a) $D = \mathbb{R} - \{0\}$

b) La función f es estrictamente creciente en (-∞, -2) y en (0, +∞) y estrictamente decreciente en (-2, 0).

En $x=-2$ f tiene un máximo relativo estricto que en su gráfica corresponde al punto $\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$.

c) La función *f* es estrictamente convexa en los puntos de *D* y no tiene puntos de inflexión.

8. Dada la función $f(x)=e^{\frac{2-x}{1-x}}$, determinar:

a) el dominio de definición

b) el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad , la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) $D=\mathbb{R}-\{1\}$

b) La función *f* es estrictamente creciente en *D* y no tiene máximos ni mínimos relativos.

c) La función es estrictamente convexa en $(-\infty,\ 1)$ y en $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ y estrictamente cóncava en $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$.

Por tanto, el punto $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{e}\right)$ es un punto de inflexión de la función.

9. Dada una función f continua y derivable en $x = 3$ que cumple que $f''(3)=0$, $f'''(3)=0$, $f^{(4)}(3)=0$ y $f^{(5)}(3)=5$. ¿Qué se puede decir de la función en $x = 3$?

Solución

En $x = 3$, *f* tiene un punto de inflexión.

10. Dada la función $f(x)=xe^{-x}$, determinar:

a) el dominio de definición

b) el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad , la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) $D=\mathbb{R}$

b) *f* es estrictamente creciente $(-\infty,\ 1)$ y estrictamente decreciente en $(1,\ +\infty)$.

En el punto $x = 1$ tiene un máximo relativo que en la gráfica corresponde al punto $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$.

c) *f* es estrictamente cóncava en $(-\infty,\ 2)$ y estrictamente convexa en $(2,\ +\infty)$, por lo que el punto $x = 2$ es un punto de inflexión de *f* que en la gráfica corresponde al punto $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$.

11. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^2-9}$, determinar:

a) el dominio de definición

b) el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad , la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) $D=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) f es estrictamente creciente $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y estrictamente decreciente en $(0,3)\cup(3,+\infty)$ y por tanto en el punto x = 0 tiene un máximo relativo.

c) f es estrictamente convexa en (-∞, 3) y en (3, +∞) y estrictamente cóncava en (-3, 3). No tiene puntos de inflexión.

12. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{x}$, determinar:

a) el dominio de definición

b) el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) $D=\mathbb{R}-\{0\}$

b) f es estrictamente decreciente (-∞, 0) y en (0, 1) y estrictamente creciente en (1, +∞) y por tanto, en el punto x = 1 tiene un mínimo relativo que en la gráfica corresponde al punto $\left(1,\ e^2\right)$.

c) f es estrictamente cóncava en (-∞, 0) y estrictamente convexa en (0, +∞). No tiene puntos de inflexión.

13. Dada la función $f(x)=\dfrac{30\left|1-x\right|}{(3-x)^3}$, determinar:

a) el dominio de definición

b) el crecimiento, el decrecimiento y los extremos relativos

c) la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión

Solución

a) $D=\mathbb{R}-\{3\}$

b) f es estrictamente creciente (-∞, 0), en (1, 3) y en (3, +∞) y estrictamente decreciente en (0, 1). Por tanto, en el punto x = 0 tiene un máximo relativo y en x = 1 un mínimo relativo.

c) La función es estrictamente convexa en (-∞, -1) y en (1, 3) y estrictamente cóncava en (-1, 1) y en (3, +∞). Por tanto, f tiene puntos de inflexión en x = -1 y x =1.