EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO

1. Sea la función de demanda general de un bien A, $q_a = \frac{y - 9p_a + 5p_b + 3p_c}{5p_a}$, siendo y la renta, p_a el precio del bien A, p_b y p_c los precios de otros bienes. Sabiendo que inicialmente y = 186, $p_a = 9$, $p_b = 6$ y $p_c = 15$.

a) Determinar la cantidad de ese bien que inicialmente se demanda.

b) Obtener la expresión de su demanda directa y calcular su elasticidad.

c) Calcular la elasticidad-renta del bien A.

Solución

a) Sustituyendo los valores iniciales en la función demanda queda

$$q_a = \frac{186 - 9.9 + 5.6 + 3.15}{5.9} = \frac{186 - 81 + 30 + 45}{45} = 4$$

b) Hay que encontrar la función $q_a = f(p_a)$ que nos da el valor de la demanda de A en función de su precio. Sustituyendo en q_a las condiciones iniciales de y, p_b y p_c, se tiene:

$$q_a = \frac{186 - 9p_a + 30 + 45}{5p_a} = \frac{261 - 9p_a}{5p_a}$$

La elasticidad viene dada por la expresión $E = -\frac{\frac{dq_a}{dp_a}}{\frac{q_a}{p_a}} = -\frac{p_a}{q_a}\frac{dq_a}{dp_a}$.

Derivando la función $q_a = \frac{261 - 9p_a}{5p_a}$ queda $\frac{dq_a}{dp_a} == \frac{-261}{5p_a^2}$ y sustituyendo en la definición de la elasticidad se obtiene $E = -\frac{p_a}{\frac{261 - 9p_a}{5p_a}} . \frac{-261}{5p_a^2} = \frac{261}{261 - 9p_a}$

c) Hay que encontrar la función $q_a = f(y)$ que nos da el valor de la demanda de A en función de la renta y. Sustituyendo en q_a las condiciones iniciales de p_a, p_b y p_c, se tiene:

$$q_a = \frac{y - 81 + 30 + 45}{45} = \frac{y - 6}{45}$$

La elasticidad-renta viene dada por la expresión $E = -\frac{\frac{dq_a}{dy}}{\frac{q_a}{y}} = -\frac{y}{q_a}\frac{dq_a}{dy}$.

Como la derivada de $q_a = \frac{y-6}{45}$ es $\frac{dq_a}{dy} = \frac{1}{45}$ se tiene que $E = -\frac{y}{q_a}\frac{dq_a}{dy} = \frac{y}{\frac{y-6}{45}} . \frac{1}{45} = \frac{y}{y-6}$.

2. En una empresa el coste total de producir q unidades viene dado por la función:

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$$

a) Obtener la función de coste marginal y la de coste total medio.

b) Determinar el coste marginal y el coste medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

Solución

a) Derivando $C(q)$ nos da la función de coste marginal $CM_a(q) = C'(q) = q^2 - 24q + 150$.

Dividiendo $C(q)$ por q se obtiene la función de coste total medio:

$$CM_e(q) = \frac{1}{3}q^2 - 12q + 150 + \frac{2304}{q}$$

b) Sustituyendo en las funciones del apartado anterior $q = 3$ se tiene: $CM_a(3) = 87$ y $CM_e(3) = 885$, y sustituyendo $q = 6$ queda: $CM_a(6) = 42$ y $CM_e(3) = 474$.

3. La función de ingresos de una empresa es, $I(q) = -\frac{6}{10^6}q^3 + \frac{18}{10^3}q^2 - 2q + 100$, con $q > 100$, y la función de coste total es $C(q) = \frac{2}{10^2}q^2 - 24q + 11000$, siendo q el número de unidades vendidas. Hallar el ingreso marginal, el coste marginal y el beneficio marginal.

Solución

El ingreso marginal $IM_a(q)$ se obtiene derivando la función ingreso total quedando:

$$IM_a(q) = I'(q) = -\frac{18}{10^6}q^2 + \frac{36}{10^3}q - 2$$

El coste marginal $CM_a(q)$ se obtiene derivando la función coste total quedando:

$$CM_a(q) = C'(q) = \frac{4}{10^2}q - 24 = \frac{1}{25}q - 24$$

Dado que la función de beneficio es $B(q) = I(q) - C(q)$, se deduce que el beneficio marginal es:

$$BM_a(q) = B'(q) = I'(q) - C'(q) = IM_a(q) - CM_a(q)$$

$$= -\frac{18}{10^6}q^2 + \frac{36}{10^3}q - 2 - \left(\frac{1}{25}q - 24\right) = -\frac{18}{10^6}q^2 - \frac{1}{250}q + 22$$

4. Las funciones de oferta y demanda de un bien en un mercado competitivo son:

$$q^s(p) = \frac{10p-20}{4} \qquad \text{y} \qquad q^d(p) = \frac{450-p}{6}$$

a) Obtener la expresión de la elasticidad de la demanda.

b) Hallar el precio de equilibrio del mercado.

Solución

a) Teniendo en cuenta que $\frac{dq^d}{dp} = \frac{-1}{6}$, la elasticidad de la demanda es:

$$E = -\frac{p}{q^d}\frac{dq^d}{dp} = -\frac{p}{\frac{450-p}{6}} \cdot \frac{-1}{6} = \frac{p}{450-p}$$

b) Para calcular el precio de equilibrio se igualan la oferta y la demanda, $q^s(p) = q^d(p)$, y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\frac{10p-20}{4} = \frac{450-p}{6} \iff 60p-120 = 1800-4p \iff 64p = 1920 \iff p = \frac{1920}{64} = 30$$

Por tanto, el precio de equilibrio del mercado es 30.

5. En un mercado monopolístico, la función de demanda es $q = 50 - p$ y la función de costes $C(q) = q^2 + 6q + 20$:

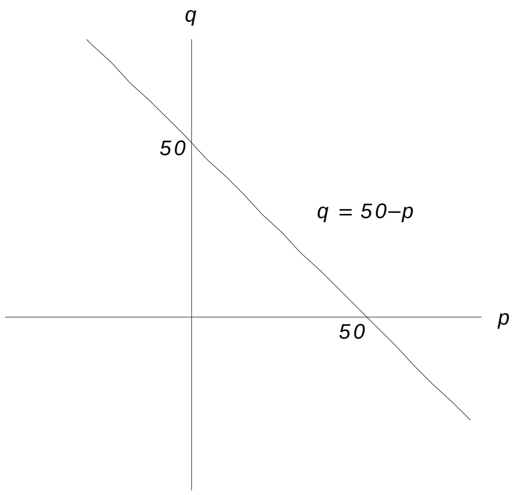
a) Representar gráficamente las funciones de demanda y de costes.

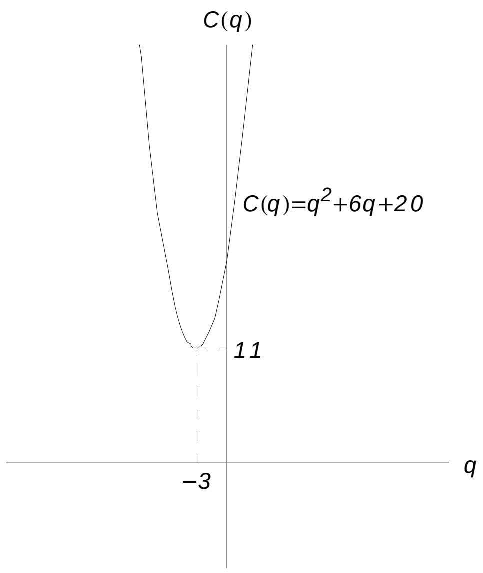
b) Determinar el beneficio máximo del monopolista en función de la cantidad producida.

Solución

a) La gráfica de la función $q = 50 - p$ es una recta; para determinarla basta calcular las coordenadas de dos puntos, por ejemplo, los puntos de corte con los ejes: (0, 50) y (50, 0).

La gráfica de $C(q) = q^2 + 6q + 20$ es una parábola con mínimo en el punto (-3, 11).





Observar que las representaciones anteriores se han realizado sin tener en cuenta el carácter económico de las funciones por lo que se ha considerado $\mathbb{R}$ como dominio. Sin embargo, teniendo en cuenta que el precio, p, y la producción, q, han de ser variables no negativas, las gráficas de las funciones de demanda y de costes corresponden a la parte de la curva representada en el primer cuadrante.

b) La función beneficio viene dada por la diferencia entre ingresos y costes.

Para obtener los ingresos, $I(q) = pq$, despejamos p de la función de demanda, $p = 50 - q$ y se sustituye en $I(q)$, quedando $I(q) = pq = (50 - q)q = 50q - q^2$. Por tanto, la función beneficio es:

$$B(q) = I(q) - C(q) = = 50q - q^2 - q^2 - 6q - 20 = 44q - 2q^2 - 20$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $44 - 4q = 0$, que tiene por solución $q = 11$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que: $B''(q) = -4$ y $B''(11) = -4 < 0$

Por tanto, el máximo beneficio se obtiene al producir $q = 11$ unidades y es $B(11) = 222$.

6. La función de costes a corto plazo de una empresa es: $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$, siendo q la cantidad producida.

a) Suponiendo que es un empresario competitivo, determinar la cantidad producida por el empresario para obtener el máximo beneficio y dicho beneficio máximo si el precio de equilibrio del mercado es 42.

b) Suponiendo que es un empresario monopolista, determinar la cantidad producida por el empresario para obtener el máximo beneficio y dicho beneficio máximo si la demanda del mercado que abastece es $q = 390 - p$.

Solución

a) La función beneficio viene dada por la diferencia entre ingresos y costes:

$$B(q) = pq - C(q) = pq - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12$$

Sustituyendo en $B(q)$ el precio de equilibrio, $p = 42$, se tiene

$$B(q) = 42q - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12 = -4q^3 + 6q^2 + 24q - 12 .$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $-12q^2 + 12q + 24 = 0$ o equivalentemente, $q^2 - q - 2 = 0$.

Resolviendo la ecuación queda $q = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$, luego la única solución con sentido económico es $q = 2$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que:

$$B''(q) = -24q + 12 \quad \text{y} \quad B''(2) = -24.2 + 12 = -36 < 0$$

Por tanto, para obtener el máximo beneficio se necesita producir $q = 2$ unidades y dicho beneficio máximo es $B(2) = 28$.

b) De la función de demanda, $q = 390 - p$, se obtiene el precio $p = 390 - q$ y sustituyendo en $B(q)$ se tiene

$$B(q) = (390 - q)\,q - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12 = -4q^3 + 5q^2 + 372q - 12.$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $-12q^2 + 10q + 372 = 0$ que equivale a $6q^2 - 5q - 186 = 0$.

Resolviendo la ecuación queda $q = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 4464}}{12} = \dfrac{5 \pm 67}{12} = \begin{cases} -\dfrac{31}{6} \\ 6 \end{cases}$, luego la única solución con sentido económico es $q = 6$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que:

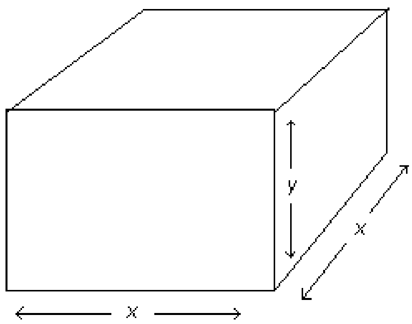
$$B''(q) = -24q + 10 \quad \text{y} \quad B''(6) = -24.6 + 10 = -134 < 0$$

Por tanto, para obtener el máximo beneficio se necesita producir $q = 6$ unidades y dicho beneficio máximo es $B(q) = -4.6^3 + 5.6^2 + 372.6 - 12 = 1536$.

7. Una empresa desea construir contenedores de almacenamiento con base cuadrada que tengan $27\,\text{m}^3$ de espacio en su interior. El material para su fabricación cuesta 2 u.m. por m^2.

Determinar las dimensiones de un contenedor para que el coste del material sea mínimo.

Solución



La cantidad de material necesario para construir un contenedor viene dado por la suma de las superficies de todas sus caras.

El área del suelo que es cuadrado es x^2 y coincide con la del techo. El área de cada una de las paredes es xy. Por tanto, la superficie del contenedor es $2x^2 + 4xy$.

Teniendo en cuenta que el volumen del contenedor es 27, se tiene $x^2 y = 27$, de donde despejando y queda $y = \dfrac{27}{x^2}$. Sustituyendo en la superficie calculada se obtiene $2x^2 + 4x\dfrac{27}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{108}{x}$.

En consecuencia, el coste de material usado en la fabricación viene dado por la función:

$$C(x) = 2\left(2x^2 + \frac{108}{x}\right) = 4x^2 + \frac{216}{x}$$

Hay que buscar el valor de x que minimice la función $C(x)$, para lo que se aplica la condición necesaria y suficiente de mínimo.

Condición necesaria:

$C'(x)=0$, es decir, $C'(x)=8x-\dfrac{216}{x^2}=0$ y resolviendo la ecuación queda:

$$\frac{8x^3-216}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 8x^3-216=0 \quad \Rightarrow \quad x^3=27 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

Condición suficiente:

$C''(x)>0$, condición que se cumple en este caso ya que $C''(x)=8+\dfrac{432}{x^3}$ y $C''(3)=24>0$.

Por tanto, el coste del material será mínimo cuando el lado de la base sea de x = 3 m. y la altura del contenedor y = 3 m., de lo que se concluye que el contenedor debe de ser cúbico.

8. Un mayorista de vinos vende lotes de 20 botellas de vino de reserva del 92 al precio de 90 euros por botella. Con el fin de vender mayor cantidad a un determinado cliente le hace la siguiente oferta: por cada botella adicional al lote de 20 inicialmente propuesto, se le reduce en 3 euros el precio de cada botella adquirida.

Hallar el número de botellas que debe vender a dicho cliente para que obtenga un ingreso máximo.

Solución

Sea x = "número de botellas adicionales".

El número de botellas vendidas es $20+x$ y el precio de cada botella, $90-3x$ y por tanto la función ingreso obtenido es $I(x)=(20+x)(90-3x)=1800+30x-3x^2$.

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes como sigue:

$$I'(x)=30-6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 30-6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{30}{6}=5$$

$$I''(x)=-6 \quad \Rightarrow \quad I''(5)=-6<0$$

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá vender 5 botellas adicionales al lote inicial, es decir, 25 botellas a un precio de 90 - 3.5 = 75 euros cada una.

El ingreso obtenido con esta venta es de $I(5)=1800+150-75=1875$ euros.