Tema 4: INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN

4.1. INTEGRAL INDEFINIDA

4.1.1. DEFINICIONES. PROPIEDADES.

El cálculo de integrales indefinidas de una función es un proceso inverso del cálculo de derivadas ya que se trata de encontrar una función cuya derivada coincida con una función dada.

Dada una función real de variable real $f(x)$ definida en $[a,b]$, se llama **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ a toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Ejemplo 1: $F(x)=x^3$ es una primitiva de la función $f(x)=3x^2$ ya que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

También son primitivas de $f(x)=3x^2$ las funciones $F_1(x)=x^3+1$, $F_2(x)=x^3-5$, $F_3(x) = x^3 + \frac{2}{3}$ ya que verifican:

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 3x^2 = f(x)$$

Proposición: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces cualquier primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ es de la forma $F(x)+C$ con $C\in \mathbb{R}$

Ejemplo 2: Todas las primitivas de la función $f(x)=3x^2$ son de la forma $F(x)=x^3+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$
Todas las primitivas de la función $f(x)=e^{-x}$ son de la forma $F(x) = -e^{-x}+C$ siendo $C\in \mathbb{R}$

Se llama **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas sus primitivas y se denota como $\int f(x)\,dx$, es decir:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{siendo } F(x) \text{ una primitiva de } f(x) \text{ y } C\in \mathbb{R}$$

A la función $f(x)$ se le denomina *función integrando* y a la constante C, *constante de integración.*

Ejemplo 3: $\int dx = x+C$ $\qquad \int 5x^4\,dx = x^5+C$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\qquad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$

Observación: No toda función de una variable tiene primitivas y por tanto, integral indefinida. En este apartado sólo se consideran las funciones cuya integral indefinida se puede expresar mediante una combinación finita de funciones elementales.

Como consecuencia de la linealidad de la derivada se deducen las siguientes propiedades (*linealidad de la integral*):

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4: $\int (2x^2 - 3)\,dx = \int 2x^2\,dx + \int -3\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int dx = 2\frac{x^3}{3} - 3x + C$

4.1.2. INTEGRALES INMEDIATAS

Se llaman **integrales inmediatas** a aquellas cuya expresión puede ser obtenida a partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales. A continuación, se exponen las integrales inmediatas más utilizadas, siendo la segunda columna una generalización de la primera.

$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad \text{si } a \neq -1$	$\int \left(f(x)\right)^a f'(x)\,dx = \dfrac{\left(f(x)\right)^{a+1}}{a+1}+C \quad \text{si } a \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{si } a > 0$	$\int a^{f(x)}\,f'(x)\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \quad \text{si } a > 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
$\int \text{sen}x\,dx = -\cos x + C$	$\int \text{sen} f(x)\,f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \text{sen}x + C$	$\int \cos f(x)\,f'(x)\,dx = \text{sen}\,f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \text{tg}\,f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\,x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}\,dx = \text{arctg}\,f(x) + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\,x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}}\,dx = \text{arcsen}\,f(x) + C$

Ejemplo 5: (relativo a integrales que se resuelven aplicando la primera columna de la tabla anterior)

a) $\int (2x^3 + 5x^2 - 7x + 1)\,dx = 2\int x^3dx + 5\int x^2dx - 7\int xdx + \int dx = 2\dfrac{x^4}{4} + 5\dfrac{x^3}{3} - 7\dfrac{x^2}{2} + x + C = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{7x^2}{2} + x + C$

b) $\int \left(x^4 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x}\right)dx = \int x^4\,dx - \int \dfrac{3}{x^3}dx + \int \dfrac{1}{x}dx = \int x^4\,dx - 3\int x^{-3}\,dx + \int \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^5}{5} - 3\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + \ln x + C = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{2x^2} + \ln x + C$

c) $\int \left(\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int x^{\frac{4}{5}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \dfrac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} - \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} - \dfrac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \dfrac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C = \dfrac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$

d) $\int \left(2^x + 3x\right)dx = \int 2^x\,dx + 3\int xdx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3x^2}{2} + C$

e) $\int \left(e^x - 5\text{sen}x + \cos x\right)dx = \int e^x\,dx - 5\int \text{sen}x\,dx + \int \cos x\,dx = e^x + 5\cos x + \text{sen}x + C$

f) $\int \left(\dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int \dfrac{dx}{1+x^2} - 5\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\,\text{arctg}\,x - 5\,\text{arcsen}\,x + C$

Ejemplo 6: (relativo a integrales que se resuelven aplicando la segunda columna de la tabla anterior)

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, al ser la función integrando una potencia de base (1-2x) veamos si se puede aplicar la igualdad de la tabla dada por: $\int (f(x))^a f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{a+1}}{a+1} + C$ con $a = 3$

Para ello se necesita tener en la función integrando la derivada de la base que en este caso es -2, por lo que se multiplica y divide por este número y aplicando la linealidad de la integral queda:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int \frac{-2}{-2}(1-2x)^3\,dx = \frac{1}{-2}\int (1-2x)^3(-2)\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^4}{4} + C = -\frac{(1-2x)^4}{8} + C$$

b) $\int \sqrt[3]{3x-2}\,dx = \int (3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{3}{3}(3x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^{\frac{1}{3}}\,3\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{(3x-2)^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}{4} + C$

c) $\int \frac{10x-7}{5x^2-7x+1}\,dx = \ln\left(5x^2-7x+1\right) + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}} = \int \frac{3}{3}\frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{3x+2}} = \frac{2}{3}\int \frac{3dx}{2\sqrt{3x+2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2} + C$

En este caso, la función integrando se ha multiplicado y dividido por 3 para tener la derivada del radicando y se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz.

f) $\int e^{-4x}\,dx = \int \frac{-4}{-4}e^{-4x}\,dx = \frac{1}{-4}\int e^{-4x}(-4)\,dx = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$

g) $\int 3^{sen\,x}\cos x\,dx = \frac{3^{sen\,x}}{\ln 3} + C$

h) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x^2}} = \int \frac{2x\,dx}{2\sqrt{5+x^2}} = \sqrt{5+x^2} + C$

i) $\int \cos 3x\,dx = \int \frac{3}{3}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x\,dx = \frac{\text{sen}3x}{3} + C$

4.3.1. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Dada la integral $\int f(x)\,dx$, si consideramos x como una función de otra variable, $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)\,dt$, y sustituyendo en la integral inicial se obtiene $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$.

En el caso de que esta segunda integral sea más sencilla que la primera, se resuelve en la variable t y posteriormente se deshace el cambio de variable sustituyendo t en función de x.

En resumen, para realizar un cambio de variable en una integral se realizan los siguientes pasos:

1.- Se elige el cambio de variable que se quiere realizar indicando la expresión que relaciona la variable x inicial con la nueva variable t.

2.- Se calcula dx en función de la variable t y dt.

3.- Se sustituye en la integral la variable x y dx por las expresiones en la variable t y dt. La nueva integral obtenida solamente debe depender de t.

4.- Se resuelve esta integral, obteniendo la solución en la variable t.

5.- Se deshace el cambio de variable, dando el resultado en la variable inicial x.

Ejemplo 7:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$, esta integral no es inmediata ya que no se ajusta a ningún caso de la tabla. Para resolverla se hace el cambio de variable $\sqrt{x-2} = t$, elevando al cuadrado queda $x-2 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 + 2$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t}tdt = 2\int (t^2+2)dt = 2\int t^2dt + 4\int dt = 2\frac{t^3}{3} + 4t + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 4\sqrt{x-2} + C$

b) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$, para resolver esta integral se hace el cambio de variable $e^x = t$

Diferenciando la igualdad anterior queda $e^x\,dx = dt$, es decir, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = \int \frac{t^2}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t - \ln(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+1} = e^x - \ln(e^x+1) + C$

Observación: Las integrales inmediatas generalizadas (segunda columna de la tabla) también se pueden calcular mediante cambio de variable.

Ejemplo 8:

a) $\int (1-2x)^3\,dx$, esta integral es inmediata como se ha comprobado en el ejemplo 6, pero también se puede resolver realizando el cambio de variable $\begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int t^3\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\int t^3dt = -\frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}}$, esta integral es inmediata y se puede resolver aplicando la tabla, ya que es fácil obtener en el numerador la derivada del radicando.

También se puede resolver mediante el cambio de variable $\begin{cases} t = 3\text{sen}\,x - 1 \\ dt = 3\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = \frac{dt}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3sen\,x-1}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3sen\,x-1)^2} + C$$

Ejemplo 9:

a) $\int \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5) + C$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^4} = \int (x+1)^{-4}\,dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + C$

c) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x-2}dx = \ln(x^2-5x-2) + C$

d) $\int \frac{dx}{4x+1} = \int \frac{1}{4}\frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\ln(4x+1) + C$

e) $\int \frac{7dx}{(3x+1)^2} = 7\int \frac{3}{3}(3x+1)^{-2}\,dx = \frac{7}{3}\int (3x+1)^{-2}\,3\,dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{7}{3(x+1)} + C$

f) $\int \frac{x+1}{x-1}dx$, como el grado del polinomio del numerador no es menor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-1 \\ \hline \underline{-x+1} & 1 \\ /\quad 2 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x+1}{x-1}dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}dx = x + 2\ln(x-1) + C$

g) $\int \frac{x^2+1}{x-2}dx$, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{rl} x^2 + \quad\;\; 1 & \underline{|x-2} \\ \underline{-x^2+2x} & \quad x+2 \\ /\quad 2x+1 & \\ \underline{-2x+4} & \\ 5 & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x^2+1}{x-2} = x + 2 + \frac{5}{x-2}$

Integrando se obtiene $\int \frac{x^2+1}{x-2}\,dx = \int\left(x+2+\frac{5}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln(x-2) + C$

4.2. INTEGRAL DEFINIDA

4.2.1. CONCEPTOS Y PROPIEDADES

El concepto de integral definida aparece en el cálculo del área de un recinto plano limitado por las gráficas de ciertas funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado.

Sean $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. La **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$ se calcula como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Los valores a y b se llaman *extremos de integración*.

Esta forma de calcular la integral definida se conoce con el nombre de **Regla de Barrow** y se suele escribir: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Ejemplo 10:

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (1-x^3)\,dx = \left. x - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left(2-\frac{16}{4}\right) - \left(1-\frac{1}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$$

Propiedades:

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3.- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ con $a < c < b$

4.- $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

5.- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}$

Las propiedades 4 y 5 hacen referencia a la linealidad de la integral definida.

Cambio de variable en la integral definida: Si se realiza un cambio de variable en una integral definida es necesario calcular los extremos de integración para la nueva variable.

Ejemplo 11: $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Para resolver la integral se hace el cambio de variable $\sqrt{x+1} = t$, elevando al cuadrado queda $x+1 = t^2$ y despejando x, $x = t^2 - 1$

Diferenciando la igualdad anterior se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos iniciales en $t = \sqrt{x+1}$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

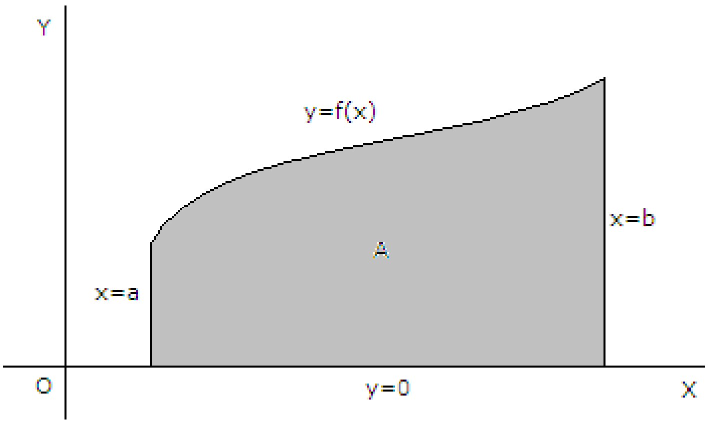
$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}}2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\int_1^2 t^2dt - 2\int_1^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_1^2 = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$

4.2.2. CÁLCULO DE ÁREAS EN EL PLANO

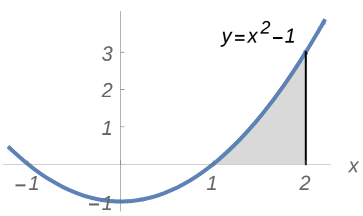
A. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir, la gráfica de la función está situada por encima del eje OX en dicho intervalo.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 12: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas y=0 y las rectas x=1, x=2 es

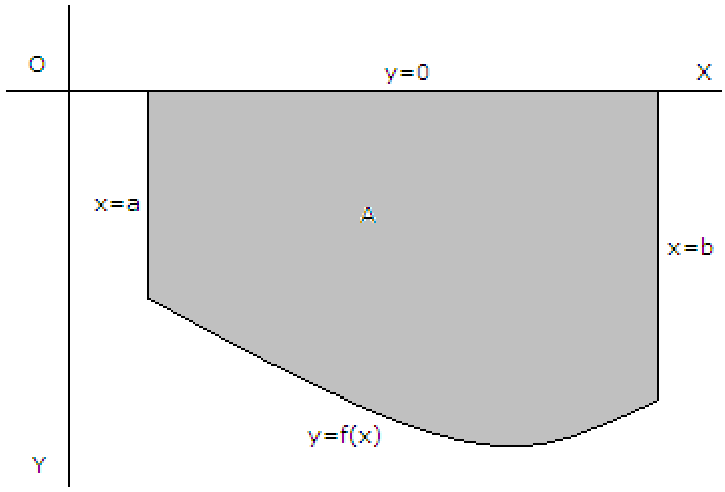


$$A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

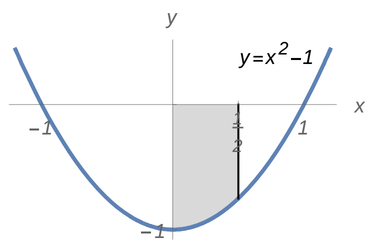
B. Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función está situada por debajo del eje OX en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas verticales $x = a, \; x = b$ viene dada por:

$$\text{Área} = A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Ejemplo 13: El área delimitada por la parábola $y = x^2 - 1$, el eje de abscisas $y=0$ y las rectas $x=0$, $x=1/2$ es

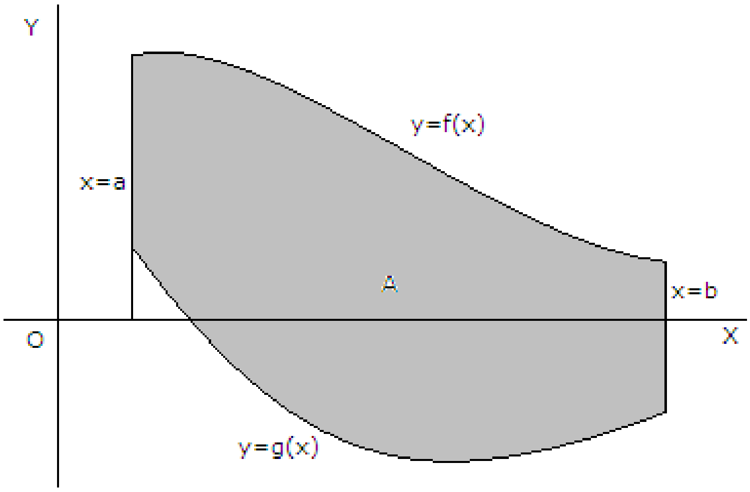


$$A = -\int_0^{1/2} (x^2 - 1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^{1/2} = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{11}{24}$$

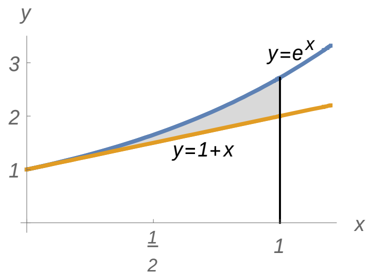
C. Sean $y = f(x), y = g(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ verificando $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es decir la gráfica de la función $f(x)$ se sitúa por encima de la gráfica de $g(x)$ en dicho intervalo.

El área de la figura plana delimitada por las curvas $y = f(x), y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a, \; x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$



Ejemplo 14: El área delimitada por la recta $y = 1+x$, la curva $y = e^x$ y las rectas $x=0$, $x=1$ es



$$A = \int_0^1 \left(e^x - (1+x)\right) dx = \left[e^x - x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(e - 1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = e - \frac{5}{2}$$