EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL INDEFINIDA

1. Dada la función $f(x) = 3x^5 + \frac{2}{x^3}$:

a) Calcular todas sus funciones primitivas.

b) Determinar la función primitiva cuya gráfica pasa por el punto (1, 6).

c) Determinar la función primitiva $F(x)$ que verifica $F(-1) = \frac{-1}{2}$.

Solución

a) Las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + C$, siendo C una constante real, ya que $F'(x) = 3x^5 + \frac{2}{x^3} = f(x)$

b) La función primitiva $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + C$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 6) ha de verificar $F(1) = 6$, es decir, $\frac{1^6}{2} - \frac{1}{1^2} + C = 6$, de donde $C = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

Por tanto la primitiva que se busca es $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{13}{2}$.

c) La función primitiva $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + C$ ha de verificar $F(-1) = \frac{-1}{2}$, es decir, $\frac{(-1)^6}{2} - \frac{1}{(-1)^2} + C = \frac{-1}{2}$, de donde $C = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Por tanto la primitiva que se busca es $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2}$.

2. Calcular las siguientes integrales utilizando la tabla de integrales inmediatas:

a) $\int \left(3 + 4x^5 - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ **b)** $\int \left(6e^x + 4^x\right) dx$ **c)** $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} dx$ **d)** $\int \frac{1}{\sqrt{5x - 1}} dx$

e) $\int \frac{7}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}} dx$ **f)** $\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx$ **g)** $\int (4x + 1)^2 dx$ **h)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

i) $\int 5^{x^3+1} x^2 \, dx$ **j)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)}$ **k)** $\int \operatorname{tg} x \, dx$ **l)** $\int \frac{4^x - 2^x}{3^x} dx$

ll) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ **m)** $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ **n)** $\int \frac{1 + x^2}{x^2} dx$ **o)** $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$

Solución

a) Utilizando las propiedades de linealidad y la tabla de integrales inmediatas se tiene:

$$\int\left(3+4x^5-\frac{8}{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx = 3\int dx+4\int x^5dx-8\int\frac{1}{x}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx = 3x+4\frac{x^6}{6}-8\ln x+\frac{x^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}}+C =$$

$$= 3x+4\frac{x^6}{6}-8\ln x+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C = 3x+\frac{2}{3}x^6-8\ln x+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C = 3x+\frac{2}{3}x^6-8\ln x+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$$

b) Utilizando las propiedades de linealidad y la tabla de integrales inmediatas se tiene:

$$\int(6e^x+4^x)\,dx = 6\int e^x dx+\int 4^x dx = 6e^x+\frac{4^x}{\ln 4}+C$$

c) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \ln(1+\operatorname{sen} x)+C$

En este caso en el numerador es la derivada del denominador por lo que la integral es el logaritmo neperiano del denominador.

d) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx = \int\frac{2}{2}\frac{5}{5}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx = \frac{2}{5}\int\frac{1}{2\sqrt{5x-1}}5\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{5x-1}+C$

Se ha multiplicado y dividido por 2 para tener la derivada de la raíz y se ha multiplicado y dividido por 5 para tener la derivada del radicando.

e) $\displaystyle\int\frac{7}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}}dx = 7\int(2x-1)^{-\frac{2}{5}}dx = 7\int\frac{2}{2}(2x-1)^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{7}{2}\int(2x-1)^{-\frac{2}{5}}2\,dx = \frac{7}{2}\frac{(2x-1)^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}+C =$

$$= \frac{7}{2}\frac{(2x-1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+C = \frac{5}{2}\sqrt[5]{(2x-1)^3}+C$$

El 7 sale fuera de la integral por linealidad y se multiplica y divide por 2 para tener en el integrando la derivada de la función $2x - 1$ que aparece en la base.

f) $\displaystyle\int\frac{x^3}{4-5x^4}dx = \int\frac{1}{-20}\frac{-20x^3}{4-5x^4}dx = -\frac{1}{20}\int\frac{-20x^3}{4-5x^4}dx = -\frac{1}{20}\ln(4-5x^4)+C$

Se multiplica y divide por -20 para tener en el numerador la derivada del polinomio del denominador y se integra la fracción obtenida dando lugar a un logaritmo.

g) $\displaystyle\int(4x+1)^2dx = \int\frac{4}{4}(4x+1)^2dx = \frac{1}{4}\int(4x+1)^2 4dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+1)^3}{3}+C = \frac{1}{12}(4x+1)^3+C$

Se multiplica y divide por 4 para tener en el integrando la derivada de la función $4x + 1$ que aparece en la base.

h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el integrando la derivada de la función $\sqrt{x}$ que aparece en el exponente.

i) $\int 5^{x^3+1}x^2\,dx = \int \frac{3}{3}5^{x^3+1}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int 5^{x^3+1}\,3x^2\,dx = \frac{1}{3}\frac{5^{x^3+1}}{\ln 5} + C$

Se multiplica y divide por 3 para tener en el integrando la derivada de la función x^3+1 que aparece en el exponente.

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \int \frac{2}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3+\sqrt{x}}\,dx = 2\ln\left(3+\sqrt{x}\right) + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el numerador la derivada de la función $3+\sqrt{x}$ que aparece en el denominador.

k) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + C$

Se multiplica y divide por -1 para tener en el numerador la derivada del denominador.

l) $\int \frac{4^x - 2^x}{3^x}\,dx = \int\left(\frac{4^x}{3^x} - \frac{2^x}{3^x}\right)dx = \int\left(\frac{4}{3}\right)^x dx - \int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} + C$

ll) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

En el integrando están la función ln$x$ y su derivada $\frac{1}{x}$ por lo que se puede integrar como una potencia de base ln$x$.

m) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + C$

En $\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$ está en el numerador la derivada del denominador por lo que se integra de forma inmediata dando lugar al logaritmo del denominador.

n) $\int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x^2}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx + \int 1dx = \frac{x^{-1}}{-1} + x + C = \frac{-1}{x} + x + C$

o) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$

3. Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ con $\sqrt{e^x - 1} = t$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)}$ con $\sqrt{x} = t$

Solución

a) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{e^x - 1} = t$ queda $e^x - 1 = t^2$, es decir, $e^x = 1 + t^2$.
Diferenciando en la última igualdad se obtiene: $e^x dx = 2t\,dt$, de donde, $dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{1+t^2} dt$.

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$

b) Elevando al cuadrado en la igualdad $\sqrt{x} = t$ queda $x = t^2$.
Diferenciando se obtiene: $dx = 2t\,dt$.

Sustituyendo en la integral inicial y resolviendo se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)} = \int \frac{2t\,dt}{t(3+t)} = 2 \int \frac{1}{3+t} dt = 2\ln(3+t) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable resulta: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3 + \sqrt{x}\right)} = 2\ln(3 + \sqrt{x}) + C$

Nota: Esta integral también se puede resolver como inmediata tal y como se ha visto en el ejercicio 2j.

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4} dx$ **b)** $\int \frac{x-1}{x^2 - 2x + 4} dx$ **c)** $\int \frac{x^3}{x+1} dx$

Solución

a) $\int \frac{10x}{(x^2-8)^4} dx = 5\int (x^2-8)^{-4}\, 2x\, dx = 5 \frac{(x^2-8)^{-3}}{-3} + C = -\frac{5}{3(x^2-8)^3} + C$

b) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx = \int \frac{2}{2} \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4} dx = \ln(x^2 - 2x + 4) + C$

Se multiplica y divide por 2 para tener en el numerador la derivada del polinomio del denominador y se integra la fracción obtenida dando lugar a un logaritmo.

c) $\int \frac{x^3}{x+1} dx$

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del polinomio del denominador, se ha de realizar en primer lugar la división polinómica quedando:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x+1 \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 - x + 1 \\ \quad / \; -x^2 & \\ \quad\; x^2 + x & \\ \quad\quad / \; x & \\ \quad\quad -x - 1 & \\ \quad\quad\quad / \; -1 & \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \dfrac{-1}{x+1}$

Así, $\int \dfrac{x^3}{x+1}\,dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1} \right) dx = \int (x^2 - x + 1)\,dx - \int \dfrac{1}{x+1}\,dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$

EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL DEFINIDA

5. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ **b)** $\int_1^4 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \dfrac{3}{x} \right) dx$ **c)** $\int_0^1 \dfrac{x}{2-x}\,dx$

d) $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\,dx$ **e)** $\int_0^3 \dfrac{-2}{5x+1}\,dx$

Solución

a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4} \right]_{-2}^{2} = \dfrac{2^4}{4} - \dfrac{(-2)^4}{4} = 0$

En primer lugar se ha calculado una primitiva de $f(x) = x^3$ y después se ha aplicado la regla de Barrow.

b) $\int_1^4 \left(2x^2 + \sqrt{x} - \dfrac{3}{x} \right) dx = \int_1^4 \left(2x^2 + x^{1/2} - \dfrac{3}{x} \right) dx = \left[2\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^{3/2}}{3/2} - 3\ln x \right]_1^4 = \left[\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 3\ln x \right]_1^4 =$

$= \dfrac{2}{3}4^3 + \dfrac{2}{3}4\sqrt{4} - 3\ln 4 - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} - 3\ln 1 \right) = \dfrac{128}{3} + \dfrac{16}{3} - 3\ln 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{140}{3} - 3\ln 4$

c) $\int_0^1 \dfrac{x}{2-x}\,dx = \int_0^1 -\dfrac{2-x-2}{2-x}\,dx = \int_0^1 \left(-1 + \dfrac{2}{2-x} \right) dx = \left[-x - 2\ln(2-x) \right]_0^1 = -1 - 2\ln 1 + 2\ln 2 = -1 + 2\ln 2$

d) $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\,dx = 2\int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\,dx = \left[-2\cos\dfrac{x}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} = -2\cos\dfrac{2\pi}{2} + 2\cos\dfrac{\pi}{2} = -2(-1) + 2\cdot 0 = 2$

e) $\int_0^3 \dfrac{-2}{5x+1}\,dx = \dfrac{-2}{5}\int_0^3 \dfrac{5}{5x+1}\,dx = \dfrac{-2}{5}\left[\ln(5x+1) \right]_0^3 = \dfrac{-2}{5}\left[\ln 16 - \ln 1 \right] = \dfrac{-2}{5}\ln 2^4 = \dfrac{-8}{5}\ln 2$

6. Calcular los valores de m para que:

a) $\int_0^m e^{3x}\,dx = \dfrac{7}{3}$ **b)** $\int_{m-5}^{0} (mx - x^2)\,dx = 0$

Solución

a) Se calcula el valor de la integral y luego se iguala a $\frac{7}{3}$:

$$\int_0^m e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^m = \frac{e^{3m}}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^{3m}-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Por tanto $e^{3m} - 1 = 7 \Rightarrow e^{3m} = 8 \Rightarrow 3m = \ln 8 \Rightarrow m = \frac{\ln 2^3}{3} = \frac{3\ln 2}{3} = \ln 2$

b) Se calcula el valor de la integral y luego se iguala a 0:

$$\int_{m-5}^0 (mx - x^2)\,dx = \left[m\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{m-5}^0 = -\left(m\frac{(m-5)^2}{2} - \frac{(m-5)^3}{3}\right) = -(m-5)^2\left(\frac{m}{2} - \frac{m-5}{3}\right)$$

$$= -(m-5)^2\,\frac{3m-2m+10}{6} = -(m-5)^2\,\frac{m+10}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 5, -10$$

7. Calcular $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$ realizando el cambio de variable $\sqrt{3-x} = t$

Solución

A partir del cambio $\sqrt{3-x} = t$, elevando al cuadrado queda, $3 - x = t^2$, de donde se obtiene,

$x = 3 - t^2$ y $dx = -2t\,dt$

Los nuevos extremos de integración para esta variable se calculan sustituyendo los extremos iniciales en $t = \sqrt{3-x}$. Por tanto se tiene, $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3-2} = 1 \end{cases}$

Sustituyendo el cambio en la integral inicial y resolviendo la integral obtenida queda:

$$\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{3-t^2}{t}(-2t)\,dt = \int_{\sqrt{2}}^1 (2t^2-6)dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 6t\right]_{\sqrt{2}}^1 = \frac{2}{3} - 6 - \left(\frac{2\sqrt{2}^3}{3} - 6\sqrt{2}\right) = \frac{14\sqrt{2}-16}{3}$$

8. a) Calcular $\int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx$

b) Razonar si el valor de la integral anterior coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = e$

Solución

a) $\int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} + \ln x\right]_1^e = \frac{e^2}{8} + \ln e - \frac{1}{8} - \ln 1 = \frac{e^2}{8} + 1 - \frac{1}{8} = \frac{e^2+7}{8}$

b) Al verificarse $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 0 \;\; \forall\, x \in [1, e]$ se tiene que el área A de ese recinto coincide con el valor de la integral definida, $A = \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx$

9. Calcular las siguientes integrales definidas y razonar si su valor coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de la función integrando, el eje OX y las rectas verticales determinadas por los extremos de integración.

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx$ **b)** $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx$ **d)** $\int_{0}^{3}(\sqrt{1+x}-x)dx$

a) $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \left[x+\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{4} = 4+\dfrac{4^3}{3}-\left(-1+\dfrac{-1}{3}\right)=5+\dfrac{65}{3}=\dfrac{80}{3}$

El área del recinto es $\int_{-1}^{4}(1+x^2)\,dx = \dfrac{80}{3}$, ya que $f(x)=1+x^2 \geq 0 \quad \forall x\in[-1, 4]$

b) $\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

El área del recinto no puede ser igual a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ya que es un número negativo.

c) $\int_{-1}^{2}(3x+x^2)\,dx = \left[3\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}-\left(3\dfrac{(-1)^2}{2}+\dfrac{(-1)^3}{3}\right)=6+\dfrac{8}{3}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=9-\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{2}$

Para determinar si el valor calculado anteriormente coincide con el área del recinto indicado, es necesario estudiar el signo de $f(x) = 3x + x^2$.

Para ello se factoriza el polinomio, obteniéndose $f(x) = x\,(3 + x)$, de donde se puede deducir el signo según los intervalos determinados por las raíces $x = 0$, $x = -3$. En los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$ la función es positiva y en $(-3, 0)$ es negativa.

Por tanto, en el intervalo de integración $[-1, 2]$ la función toma valores negativos y positivos, en consecuencia el área del recinto no coincide con el valor de la integral definida.

d) $\int_{0}^{3}(\sqrt{1+x}-x)dx = \left[\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3/2}-\dfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = \left[\dfrac{2(1+x)\sqrt{1+x}}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = \dfrac{2\cdot 4\sqrt{4}}{3}-\dfrac{3^2}{2}-\dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{3}-\dfrac{9}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$

El área del recinto no coincide con el valor de la integral definida, ya que $f(x)=\sqrt{1+x}-x$ toma valores positivos y negativos en $[0, 3]$

10. Calcular el área del recinto finito limitado por:

a) el eje OX, las rectas $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de $f(x)= e^{-x}$

b) el eje OX y la gráfica de $f(x)= -x^2-5x-6$

c) el eje OX y la gráfica de $f(x)= x^2-6x+5$

d) el eje OX, las rectas $x=-1$, $x=3$ y la gráfica de $f(x)= x + x^3$

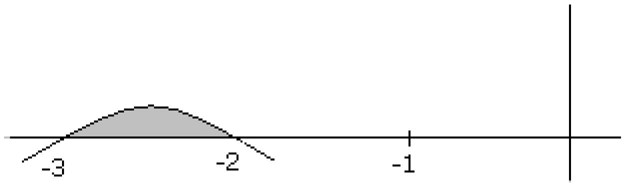
e) la recta $y = x$ y la gráfica de $f(x)= 3x - x^2$

Solución

a) Como $f(x)= e^{-x} \geq 0$ en $[-1, 1]$ se tiene que $A = \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = -e^{-1}-(-e^{1}) = e-\dfrac{1}{e}$

b) La gráfica de $f(x)= -x^2-5x-6$ es una parábola con vértice en el punto $\left(\dfrac{-5}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $-x^2-5x-6=0$:

$$-x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x=-2,\ x=-3$$

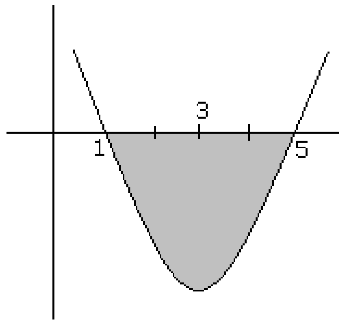


Como el recinto está por encima del eje de abscisas, se tiene

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(-x^2 - 5x - 6 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^{-2} = -\frac{(-2)^3}{3} - 5\frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - 5\frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) \right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 - 9 + \frac{45}{2} - 18 = -25 + \frac{16+135}{6} = \frac{-150+151}{6} = \frac{1}{6}$$

c) La gráfica de $f(x)= x^2 - 6x + 5$ es una parábola con vértice en el punto (3, -4) y que corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. Dichas soluciones son x=1, x=5.

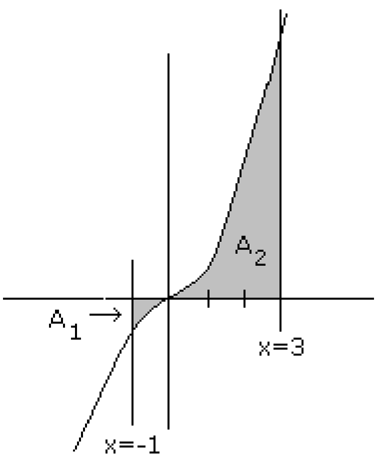


Como el recinto está por debajo del eje de abscisas, se tiene

$$A = \int_{1}^{5} -\left(x^2 - 6x + 5 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x \right]_{1}^{5} = -\frac{5^3}{3} + 6\frac{5^2}{2} - 5\cdot 5 - \left(-\frac{1^3}{3} + 6\frac{1^2}{2} - 5 \right) =$$

$$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{32}{3}$$

d) Se representan la función $f(x)= x + x^3$ y las rectas x =-1, x =3 para determinar el recinto.



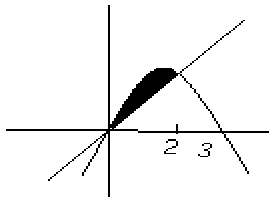
En este caso tiene una parte por debajo del eje OX y otra por encima, por ello calcularemos el área total como suma de A_1 y A_2

$$A_1 = \int_{-1}^{0} -\left(x + x^3 \right) dx = \left[\frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} = -\left(\frac{-(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} \left(x + x^3 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{3} = \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = \frac{99}{4}$$

De donde se deduce $A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4} + \frac{99}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$

e) Se representan la recta $y = x$ y la parábola $f(x) = 3x - x^2$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



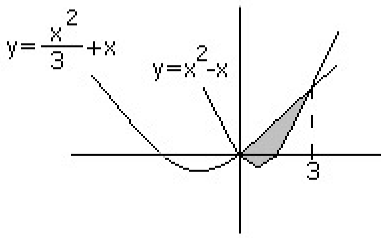
Para determinar los extremos de integración es necesario calcular los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema
$\begin{cases} y = x \\ y = 3x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 0.$

Por tanto, $A = \int_0^2 (3x - x^2 - x)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

11. Calcular el área del recinto finito limitado por las curvas: $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$

Solución

Se representan las parábolas $y = x^2 - x$, $y = \frac{x^2}{3} + x$ para dibujar el recinto limitado por dichas curvas.



Para calcular los puntos de intersección de las parábolas, se resuelve el sistema $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = \dfrac{x^2}{3} + x \end{cases}$.

$$x^2 - x = \frac{x^2}{3} + x \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\ ,\ x = 0$$

El área viene dada por la integral definida de la diferencia de las funciones $y = \frac{x^2}{3} + x$, $y = x^2 - x$, tomado como límites de integración $x = 0$ y $x = 3$:

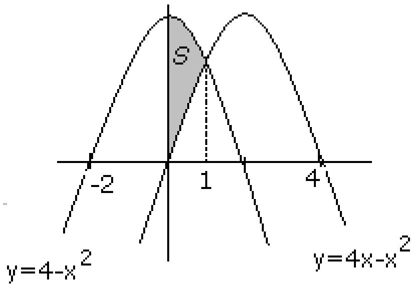
$$A = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + x - (x^2 - x) \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-2x^2}{3} + 2x \right) dx = \left[\frac{-2x^3}{9} + x^2 \right]_0^3 = -6 + 9 = 3$$

12. Calcular el área de los recintos: $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 4x - x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$ y $T = \{(x, y) \mid y \geq 0,\ y \leq 4x - x^2,\ y \leq 4 - x^2\}$

Solución

Ambos recintos están limitados por las parábolas $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x^2$ que se cortan en los puntos solución del sistema $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow\ 4x - x^2 = 4 - x^2 \ \Rightarrow\ 4x = 4 \Rightarrow\ x = 1$

Dibujamos el recinto *S*

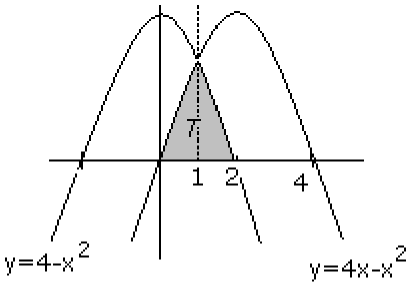


Por tanto su área es

$$A(S)=\int_0^1 \left(4 - x^2 - (4x - x^2)\ \right) dx = \int_0^1 \left(4 - 4x\right) dx =$$

$$= \left[4x - 2x^2\right]_0^1 = 4 - 2 = 2$$

Dibujamos el recinto *T* y se observa que su área se ha de calcular como suma de dos integrales definidas.



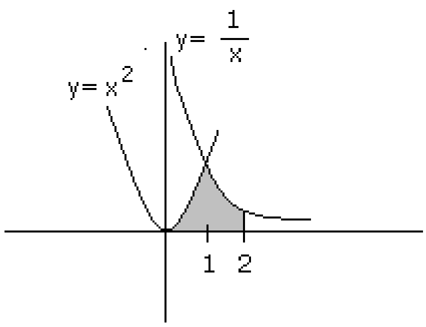
$$A(T) = \int_0^1 \left(4x - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(4 - x^2\right) dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

13. Calcular el área del recinto finito limitado las curvas $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$ y las rectas $y=0$, $x=2$.

Solución

Para dibujar el recinto considerado se representan las curvas $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$.



Para calcular los puntos de corte de ambas curvas, se resuelve el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$x^2 = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ x^3 = 1 \ \Rightarrow\ x = 1$$

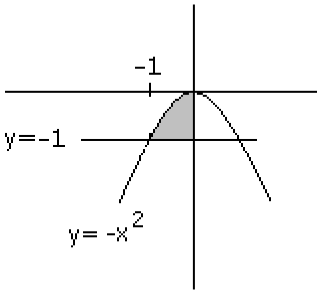
El área se calcula mediante la suma de dos integrales definidas.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - 0 + \ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{3} + \ln 2$$

14. Calcular el área del recinto $T = \{(x,\ y) \mid x \le 0,\ \ -1 \le y \le -x^2\}$

Solución

Para dibujar el recinto se representan la parábola $y = -x^2$ y la recta horizontal $y = -1$.



Para calcular el extremo de integración inferior se resuelve el sistema $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

A la vista del dibujo, el extremo inferior es $x = -1$ y el extremo superior es $x = 0$, por tanto

$$A = \int_{-1}^{0} (-x^2 - (-1))\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{-(-1)^3}{3} + (-1)\right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$