EJERCICIOS PARA RESOLVER

1. Determinar la función primitiva de la función $f(x) = x - \frac{1}{x}$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

2. Calcular las siguientes integrales utilizando la tabla de integrales inmediatas:

a) $\int \left(x - \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx$ **b)** $\int \frac{x^2}{4x^3+5} dx$ **c)** $\int e^{x^3} x^2 dx$

Solución

a) $\int \left(x - \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + x + C$

b) $\int \frac{x^2}{4x^3+5} dx = \frac{1}{12} \ln(4x^3+5) + C$

c) $\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

3. Resuelva la siguiente integral, utilizando el cambio de variable indicado: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^x} dx$ con $e^x = t$ se puede dejar con + en el denominador

Solución

a) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx = 2\sqrt{(1+x)} - \ln\left(\sqrt{1+x}+1\right) + \ln\left(\sqrt{1+x}-1\right) + C = 2\sqrt{(1+x)} + \ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} + C$

b $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^x} dx = \frac{1}{2} \ln(e^x - 1) + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C = \frac{1}{2} \ln\left((e^x-1)(e^x+1)\right) + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 1) + C$

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (5x-4)^7 dx$ **b)** $\int \frac{x^3}{3-5x^4} dx$ **c)** $\int 5e^{4x} dx$

d) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$ **e)** $\int \left(2\,\text{sen}\, 3x + 3\cos\frac{x}{2} \right) dx$

Solución

a) $\int (5x-4)^7 dx = \frac{(5x-4)^8}{40} + C$

b) $\int \frac{x^3}{3-5x^4}\,dx = -\frac{1}{20}\ln(3-5x^4)+C$

c) $\int 5e^{4x}dx = \frac{5}{4}e^{4x}+C$

d) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx = \ln(e^x+x)+C$

e) $\int\left(2\,\text{sen}\,3x + 3\cos\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{2}{3}\cos 3x + 6\,\text{sen}\frac{x}{2}+C$

5. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (-x^3-x^2+2)\,dx$ **b)** $\int_{-3}^{3}\left(2x^2+x-\frac{4}{x+4}\right)dx$ **c)** $\int_0^2 (x-1)^3\,dx$

d) $\int_0^1 x^2e^{x^3}\,dx$ **e)** $\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 3x)\,dx$ **f)** $\int_{-1}^{2}\left(e^{x+1}-e^{-1-x}\right)dx$

Solución

a) $\frac{17}{12}$ **b)** 36 – 4 ln7 **c)** 0 **d)** $\frac{e-1}{3}$ **e)** 2π **f)** $e^3+\frac{1}{e^3}-2$

6. Calcular $\int_1^{64}\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\,dx$ utilizando el cambio de variable $t=\sqrt[6]{x}$

Solución

6(1 - arctg2 + arctg1) = 6(1 - arctg2 + $\frac{\pi}{4}$)

7. Calcular $\int_0^3\left(4-x^2\right)dx$ y decir si su valor coincide con el área del recinto limitado por la función integrando, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=3$.

Solución

$\int_0^3\left(4-x^2\right)dx=3$

Al tomar la función $f(x)$ = 4 - x^2 valores positivos y negativos en el intervalo [0, 3], el valor de la integral no coincide con el área del recinto.

8. Calcular el área del recinto limitado por el eje OX, la hipérbola $yx=25$ y las rectas $x=4$, $x=8$.

Solución

Área = $\int_4^8 \frac{25}{x}\,dx$ = 25(ln8 – ln4) = 25 ln2

9. Calcular el área del recinto finito limitado por el eje OY, la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y la bisectriz del primer cuadrante.

Solución

Área $= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx = 5/6$

10. Calcular el área del recinto $T = \{(x,\ y) \mid y \geq 0,\ x \leq 0,\ x^2 \leq y \leq 2 - x\}$

Solución

Área $= \int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)\, dx = \dfrac{10}{3}$

11. Calcular el área del recinto finito limitado por el eje OX y las curvas $y = 2 - 2x^2$, $y = 1 + x$.

Solución

$A = \int_{-1}^{1/2} (1 + x)\, dx + \int_{1/2}^{1} (2 - 2x^2)\, dx = \dfrac{37}{24}$

12. Dada $f(x) = 10 - x + x^2$, calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=1$, $x=2$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución

$A = \int_1^2 (10 - x + x^2)\, dx = \dfrac{65}{6}$

13. Calcular el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$.

Solución

$A = \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx + \int_0^2 -(x^3 + x^2 - 6x)\, dx = \dfrac{253}{12}$

14. Calcular el área del recinto finito limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y la recta $y = 5$.

Solución

$A = \int_{-2}^{2} (9 - x^2 - 5)\, dx = \dfrac{32}{3}$

15. Calcular los valores de m para que:

a) $\int_1^m (x - x^2)\, dx = \dfrac{-1}{6}$ **b)** $\int_1^4 \left(\dfrac{m}{\sqrt{x}} + 5 \right) dx = 11$

Solución

a) $m = 0,\ m = \dfrac{3}{2}$ **b)** $m = -2$