Tema 5: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. MATRICES

5.1.1. Definiciones

Se llama **matriz** de orden (dimensión) $m \times n$ a un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Se representa por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y de forma abreviada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ o $A = (a_{ij})$, siendo a_{ij} el elemento que se encuentra en la fila i y en la columna j.

Dos matrices son **iguales** si son del mismo orden y los elementos situados en el mismo lugar coinciden.

Tipos de matrices

• *Según el orden*

- **Matriz rectangular**: si el número de filas y el de columnas no coincide, es decir, $m \neq n$.

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz rectangular de orden 3×2

- **Matriz cuadrada** de orden n: si el número de filas y el de columnas coincide, es decir, $m = n$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la **diagonal principal** de A.

Ejemplo 2: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2 y su diagonal principal está formada por los elementos 3 y -7.

- **Matriz fila**: si sólo tiene una fila, es decir, $m = 1$.

Ejemplo 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- **Matriz columna**: si sólo tiene una columna, es decir, $n = 1$.

Ejemplo 4: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix}$

• *Según sus elementos*

- **Matriz nula**: si todos los elementos son 0. Se representa por $O_{m \times n}$ o simplemente por O.

Ejemplo 5: $O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz escalonada**: si al principio de cada fila (columna) hay al menos un elemento nulo más que en la fila (columna) anterior.

Ejemplo 6: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por filas y $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por columnas.

- **Matriz triangular superior**: si es cuadrada y todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son 0.

Ejemplo 7: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

- **Matriz triangular inferior**: si es cuadrada y todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son 0.

Ejemplo 8: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

- **Matriz diagonal**: si es cuadrada y todos los elementos que no están en la diagonal principal son 0.

Ejemplo 9: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

- **Matriz escalar**: si es diagonal y todos los elementos que están en la diagonal principal coinciden.

Ejemplo 10: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar.

- **Matriz identidad o matriz unidad**: matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. La matriz identidad de orden n se representa por I_n.

Ejemplo 11: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.

5.1.2. Operaciones con matrices. Propiedades

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz suma $A + B$**, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición.
Así, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ejemplo 12: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 4+(-4) & 2+5 \\ 0+(-7) & -2+3 & \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Propiedades

1. *Asociativa*: $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. *Elemento neutro*: es la matriz nula O, ya que $A + O = O + A = A$

3. *Elemento simétrico*: el elemento simétrico de A es su matriz opuesta $-A = (-a_{ij})$ ya que se verifica $A + (-A) = (-A) + A = O$

4. *Conmutativa*: $A + B = B + A$

Producto de un número real por una matriz

Dados una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m{\times}n$ y un número real t, la **matriz producto** $\boldsymbol{t.A}$, es otra matriz de orden $m{\times}n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por t. Así, $t.A = (t\ a_{ij})$.

Ejemplo 13: $5 . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-1) & 5.3 \\ 5.4 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades

1. $t.(A + B) = t.A + t.B$

2. $(t + s).A = t.A + s.A$

3. $1.A = A$

4. $t.(s.A) = (t\ s).A$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m{\times}p$ y $B = (b_{ij})$ de orden $p{\times}n$, la **matriz producto** $\boldsymbol{AB}$, es otra matriz de orden $m{\times}n$ en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matiz B de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \dots + a_{ip}\ b_{pj}$$

Ejemplo14: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+(-1)(-1) & 2.1+(-1)2 \\ 0.3+3(-1) & 0.1+3.2 \\ -4.3+6(-1) & -4.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$

Observaciones

1. Para calcular AB es necesario que se verifique: "nº de columnas de A" = "nº de filas de B"

2. "nº de filas de AB"= "nº de filas de A"   "nº de columnas de AB" = "nº de columnas de B"

Propiedades

1. *Asociativa*: $(AB)C = A(BC)$

2. *Distributiva del producto respecto a la suma*: $(A + B)C = AC + BC$; $A(B + C) = AB + AC$

3. Si A es una matriz de orden $m{\times}n$ se verifica: $I_m\ A = A$ y $A\ I_n = A$.

   En particular, en el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, la matriz I_n es el elemento neutro.

El producto de matrices *no verifica la propiedad conmutativa*.

Dada una matriz cuadrada A de orden n se dice que es **regular (inversible)** o que tiene **matriz inversa** si existe otra matriz del mismo orden, llamada $\boldsymbol{A^{-1}}$, verificando $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ejemplo 15: La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2+3.1 & -1.3+3.1 \\ 1.2+(-2).1 & 1.3+(-2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)+3.1 & 2.3+3(-2) \\ 1(-1)+1.1 & 1.3+1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. La matriz inversa de una matriz, si existe, es única

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(t\,.\,A)^{-1} = t^{-1}\,.\,A^{-1}$, con t un número real distinto de cero

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Trasposición de matrices

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m\times n$, la **matriz traspuesta $\boldsymbol{A^t}$**, es una matriz de orden $n\times m$ que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.

Ejemplo 16: La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$.

Propiedades

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

3. $(s\,.\,A)^t = s\,.\,A^t$

4. $(AB)^t = B^t\,A^t$

5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

5.1.3. Operaciones elementales. Rango de una matriz

Se llama **operación elemental** realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes:

a) Cambiar entre sí dos filas (columnas).

Se puede representar por $F_i \leftrightarrow F_j$, siendo F_i y F_j dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_j$, siendo C_i y C_j dos columnas de la matriz)

b) Multiplicar una fila (columna) por un número real distinto de cero.

Se puede representar por $F_i \to t\ F_i$ ($C_i \to t\ C_i$)

c) Sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real.

Se puede representar por $F_i \to F_i + t\ F_j$ ($C_i \to C_i + t\ C_j$)

Dos matrices *A* y *B* son **equivalentes** si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales. Se puede representar por $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$.

Ejemplo 17:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_2 \to -3C_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Cualquier matriz mediante operaciones elementales, bien por filas o por columnas, se puede convertir en una matriz escalonada equivalente. En este resultado se basa las dos aplicaciones siguientes.

El **rango** de una matriz *A* es el número de filas (columnas) no nulas de cualquier matriz escalonada por filas (columnas) equivalente a *A*. Se representa por **rg *A***.

Ejemplo 18: Se calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2+4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz escalonada por filas que se ha obtenido tiene dos filas no nulas, se tiene que rg $A = 2$.

5.1.4. Cálculo de la matriz inversa por el Método de Gauss

Para obtener la matriz inversa de *A* se considera la matriz $(A|I_n)$ y se realizan aquellas operaciones elementales por filas que consigan transformar la matriz *A* en la matriz I_n, de esta forma la matriz I_n se habrá transformado en A^{-1}. Es decir, se han de realizar operaciones elementales por filas de forma que $(A|I_n) \approx ... \approx (I_n|A^{-1})$.

También es posible obtener la matriz inversa de *A* mediante operaciones elementales por columnas de forma que $\left(\frac{A}{I_n}\right) \approx ... \approx \left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right)$.

Ejemplo 19: Se calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to -F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.2. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

5.2.1. Definiciones

A cualquier matriz cuadrada A de orden n se le puede asociar un número real, que se denomina **determinante** de A. Este número se suele simbolizar $|A|$ o det(A) y para los casos n=1, 2, 3 se calcula como se explica a continuación .

• Determinante de **orden 1**: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

Ejemplo 20: $|3| = 3$, $|-3| = -3$ (No confundir el determinante de orden uno con el valor absoluto de un número real)

• Determinante de **orden 2**: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Ejemplo 21: $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - (-1)5 = 32 + 5 = 37$

• Determinante de **orden 3** (Regla de Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

Ejemplo 22: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-5)(-2) + 2.6.4 + 3.0(-1) - 3(-5)4 - 2.0(-2) - 1.6(-1) = 10 + 48 + 0 + 60 - 0 + 6 = 124$

Propiedades

1. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.

2. Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número.

3. Si en una matriz se suma a una fila (columna) el producto de otra fila (columna) por un número real, el determinante no varía.

4. El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo.

5. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo.

6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo.

7. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $|AB| = |A|.|B|$

8. $|A^t| = |A|$

9. Si A es una matriz cuadrada de orden n y t es un número real entonces $|tA| = t^n|A|$

10. Si A es una matriz regular entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

El cálculo de determinantes se simplifica utilizando algunas de las propiedades anteriores, con el objeto de obtener el máximo número de ceros en la fila (columna) elegida para desarrollar el determinante.

Ejemplo 23:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1+F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\text{Pr.2}}{=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \underset{\text{Pr.11}}{=} (a+2)(a-1)^2$$

5.2.2. Cálculo de la matriz inversa

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular, además del ya expuesto en el apartado anterior de Matrices.

En primer lugar, señalar que este concepto permite dar la siguiente caracterización de matrices regulares: A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los conceptos:

- **Menor complementario** del elemento a_{ij} de una matriz A es el determinante de la matriz que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A.

- **Adjunto** del elemento a de una matriz A es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del elemento a_{ij}. Se simboliza A_{ij}.

- **Matriz adjunta** de A es la matriz cuyo elemento ij es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A y se representa, Adj(A). Es decir, Adj(A) = (A_{ij}).

Se puede demostrar que la **matriz inversa** de una matriz regular A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$

Ejemplo 24: Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

En primer lugar calculamos su determinante para comprobar si es regular

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 12 = 10 \neq 0$, por tanto A es regular.

Ahora calculamos los adjuntos de todos los elementos

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$

Por tanto, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

5.2.3. Cálculo del rango de una matriz mediante menores

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo del rango de una matriz, además del ya expuestos en el apartado anterior de Matrices.

Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los siguientes conceptos:

- Menor de orden *p* de una matriz *A* es el determinante de una matriz que se obtiene considerando únicamente *p* filas y *p* columnas de *A*.

- **Orlar un menor de orden *p*** de una matriz *A* es considerar un menor de orden $p+1$ obtenido al agregarle, a dicho menor de orden *p*, otra fila y otra columna de la matriz *A*.

Además, se verifica que si *M* es una matriz cuadrada de orden *p* entonces:

$$\text{rg } M = p \iff |M| \neq 0$$
$$\text{rg } M < p \iff |M| = 0$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede calcular el rango de cualquier matriz *A* de orden mxn mediante los pasos del siguiente procedimiento:

1) Se busca un menor de orden 1 no nulo,
   - si no existe entonces rg $A = 0$ y se termina el procedimiento.
   - si existe entonces rg $A \geq 1$, y se continúa en el paso siguiente.

2) Se calculan los menores de orden 2 que se obtienen orlando el menor de orden 1 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 1$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 2$, y se continúa en el paso siguiente.

3) Se calculan los menores de orden 3 que se obtienen orlando el menor de orden 2 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 2$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 3$, y se continúa en el paso siguiente.

4) Se repite el proceso como en los pasos anteriores, orlando el menor no nulo obtenido.

Este procedimiento finaliza cuando se obtiene un menor de orden *r* no nulo y los menores de orden $r+1$ obtenidos al orlar dicho menor o bien no existen o son cero. En este caso se tiene rg $A = r$.

Observar que: rg $A \leq$ "nº de filas de *A*" y rg $A \leq$ "nº de columnas de *A*".

Ejemplo 25: Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ siguiendo los pasos del procedimiento anterior.

1º) El menor de orden 1 formado por la primera fila y primera columna es $|2| = 2 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 1$. Veamos qué ocurre con los de orden 2 que se obtienen al orlar este menor.

2º) Se orla con la 2ª fila y 2ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 2$. Veamos qué ocurre con los de orden 3 que se obtienen al orlar este menor.

3º) Se orla con la 3ª fila y 3ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 24 + 16 - 24 = 48 - 48 = 0$. Al ser nulo se orla el menor de orden 2 con la 3ª fila y 4ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 48 = 0$. Al ser nulo y haber considerado todas las filas y columnas de A se tiene que rg $A = 2$.

5.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.3.1. Definiciones

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

siendo: $a_{ij} \in \mathbb{R}$ los coeficientes, $b_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes y $x_j \in \mathbb{R}$ las incógnitas.

Se llama **solución** del sistema a cualquier conjunto de n valores reales que sustituidos en las incógnitas hacen que se cumplan todas las ecuaciones del sistema.

La expresión matricial del sistema anterior es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$, o de forma abreviada $AX = B$

siendo A la matriz de los coeficientes, X la matriz columna de las incógnitas y B la matriz columna de los términos independientes.

Se llama **matriz ampliada** del sistema a la matriz de m filas y n+1 columnas definida de la siguiente forma:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se dice que $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es solución del sistema $AX = B$ si se cumple que $AC = B$.

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 26: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

Su expresión matricial es $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada del sistema $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$

Tipos de sistemas

• *Según la existencia y la unicidad de soluciones*

- Sistema **incompatible**, cuando el sistema no tiene solución.

- Sistema **compatible**, cuando el sistema tiene solución, éste a su vez puede ser:

  - determinado si la solución es única.

  - **indeterminado** si tiene más de una solución. En este caso, tendrá infinitas soluciones.

• *Según los términos independientes*

- Sistema **homogéneo**, cuando todos los términos independientes son nulos; es decir, $AX = O$.

- Sistema **completo**, cuando el sistema no es homogéneo; es decir, $AX = B$ con $B \neq O$.

5.3.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Discutir un sistema es determinar si tiene o no solución y en caso afirmativo, cuántas tiene. Para ello se utiliza el **Teorema de Rouché-Frobenius**, que se enuncia a continuación.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$ se tiene:

$AX = B$ es un sistema compatible $\Leftrightarrow$ rg A = rg$(A|B) = p$

Además: $p = n \Leftrightarrow$ el sistema es determinado (tiene una única solución)

$p < n \Leftrightarrow$ el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones)

En el caso que el sistema sea compatible indeterminado, se llama **grados de libertad** o **grado de indeterminación** del sistema al número de incógnitas menos el rango de A, es decir $n - p$.

Aplicando este teorema al caso de un **sistema homogéneo** $AX = O$ se obtiene:

- Siempre es compatible, ya que rg A = rg$(A|O)$
- La solución nula o trivial, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, es siempre solución de dicho sistema .
- Si rg $A = n$, el sistema homogéneo es compatible determinado y la única solución es la nula.
- Si rg $A < n$, el sistema homogéneo es compatible indeterminado y en este caso tiene infinitas soluciones además de la solución nula.

Ejemplo 27: Discutamos el sistema del ejemplo 26, cuya matriz ampliada es $(A|B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 5 & -2 & | & -1 \end{pmatrix}$

En primer lugar se realizan operaciones elementales con las filas hasta escalonar $(A|B)$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 5 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2 \to 5F_1 + 2F_2}{=} \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Observar que al escalonar $(A|B)$ también se ha escalonado A por lo que se puede determinar el rango de ambas matrices, y utilizando el teorema de Rouché- Frobenius, discutir el sistema.

Se tiene rg A = 2 y rg$(A|B)$ = 2. Además rg A = rg$(A|B)$ = nº de incógnitas = 2, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

5.3.3. Métodos de resolución de los sistemas lineales

Método de Gauss

Consiste en escalonar la matriz ampliada realizando operaciones elementales por filas de manera que el sistema representado por la matriz escalonada (equivalente al inicial) es fácilmente resoluble.

Para hallar la solución de este último sistema, se escriben sus ecuaciones y se comienza a despejar las incógnitas partiendo de la última ecuación y sustituyendo en las anteriores, siguiendo un proceso ascendente.

Sólo se pueden realizar operaciones elementales con las filas ya que si se hacen con las columnas el sistema obtenido no es equivalente al dado.

Ejemplo 28: Resolvamos el sistema del ejemplo 26, cuya matriz ampliada se escalonó en el ejemplo 27, obteniéndose $(A|B) \approx \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$

El sistema representado por esta nueva matriz es equivalente al inicial y sus ecuaciones son $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ y &= 8 \end{aligned}\right\}$

Se resuelve fácilmente despejando y de la segunda ecuación $y = 8$, que sustituida en la primera nos permite calcular x, luego , $-2x + 8 = 2 \Rightarrow -2x = 2 - 8 \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$. Por tanto la solución es $x = 3$, $y = 8$.

Regla de Cramer

Se dice que un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas es de **Cramer** si:

i) Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es decir $m = n$

ii) $|A| \neq 0$, es decir, rg $A = n$

Discusión: Todo sistema de Cramer es compatible determinado ya que rg A = rg$(A|B) = n$.

Resolución: Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1}, lo que permite despejar X:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ única solución del sistema.}$$

Esta misma solución se puede calcular de otra forma, utilizando lo que se conoce como **regla de Cramer**:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Observar que la matriz cuyo determinante aparece en el numerador se obtiene cambiando en la matriz A la columna i-ésima por la columna de los términos independientes.

Ejemplo 29: Vamos a comprobar que el sistema resuelto por el método de Gauss en el ejemplo 28 es un sistema de Cramer y lo resolveremos por cálculo matricial y aplicando la regla de Cramer.

El sistema $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ 5x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$ tiene dos ecuaciones con dos incógnitas y el determinante de su matriz de coeficientes es

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\,(-2) - 1.5 = -1 \neq 0$, luego es un sistema de Cramer.

Vamos a calcular su solución.

Cálculo matricial

$X = A^{-1} B$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to -1/2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y la solución del sistema es

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + 1.(-1) \\ 5.2 + 2.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ por tanto, $x = 3$, $y = 8$

Regla de Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-8}{-1} = 8$