EJERCICIOS RESUELTOS DE MATRICES

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) $A + B$ **b)** AC **c)** CB y C^tB **d)** $(2A+B)C$

Solución

a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+1 \\ 3+4 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+(-1)2 & 2.3+(-1)(-1) & 2.5+(-1)1 \\ 3.1+2.2 & 3.3+2(-1) & 3.5+2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 17 \end{pmatrix}$

c) El producto CB no se puede efectuar porque el número de columnas de C y el número de filas de B no coinciden.

En cambio, el producto C^tB si que se puede realizar porque el número de columnas de C^t y el número de filas de B es el mismo.

En primer lugar se calcula la matriz traspuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas,

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, $C^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+2.4 & 1.1+2(-2) \\ 3.0+(-1)4 & 3.1+(-1)(-2) \\ 5.0+1.4 & 5.1+1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) Para calcular $(2A+B)C$ se realiza en primer lugar la operación del paréntesis:

$$2A+B = \begin{pmatrix} 2.2 & 2(-1) \\ 2.3 & 2.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & (-2)+1 \\ 6+4 & 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, $(2A+B)C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1+(-1)2 & 4.3+(-1)(-1) & 4.5+(-1)1 \\ 10.1+2.2 & 10.3+2(-1) & 10.5+2.1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 13 & 19 \\ 14 & 28 & 52 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) ABC **b)** $C^t\left(\frac{1}{2}B-A\right)$ **c)** A^2, B^2 y C^2

Solución

a) Para calcular ABC, se calcula primero el producto AB y el resultado se multiplica a la derecha por la matriz C.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0+(-1)4 & 2.1+(-1)(-2) \\ 3.0+2.4 & 3.1+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4).1+4.2 & (-4)3+4(-1) & (-4).5+4.1 \\ 8.1+(-1)2 & 8.3+(-1)(-1) & 8.5+(-1)1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -16 & -16 \\ 6 & 25 & 39 \end{pmatrix}$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices, el resultado sería el mismo si primero se calculase BC y el resultado se multiplicara a la izquierda por A.

b) En primer lugar se calcula la matriz traspuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas,

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se calcula $\frac{1}{2}B-A$,

$$\frac{1}{2}B-A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}(-2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & \frac{1}{2}-(-1) \\ 2-3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Así, $C^t\left(\frac{1}{2}B-A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+2(-1) & 1\frac{3}{2}+2(-3) \\ 3(-2)+(-1)(-1) & 3\frac{3}{2}+(-1)(-3) \\ 5(-2)+1(-1) & 5\frac{3}{2}+1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{-9}{2} \\ -5 & \frac{15}{2} \\ -11 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

c) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+(-1)3 & 2(-1)+(-1)2 \\ 3.2+2.3 & 3(-1)+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.4 & 0.1+1(-2) \\ 4.0+(-2)4 & 4.1+(-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

No se puede calcular $C^2 = CC$, ya que C no es una matriz cuadrada.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular AB y BA, ¿coinciden los resultados?.

b) Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$, ¿coinciden los resultados?.

c) Calcular $A^2 - B^2$ y $(A + B)(A - B)$, ¿coinciden los resultados?.

Solución

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+6.2+3.3 & 2.1+6(-4)+3.5 & 2.1+6.2+3.7 \\ 0.1+9.2+5.3 & 0.1+9(-4)+5.5 & 0.1+9.2+5.7 \\ -6.1+2.2+1.3 & -6.1+2.(-4)+1.5 & -6.1+2.2+1.7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+1.0+1(-6) & 1.6+1.9+1.2 & 1.3+1.5+1.1 \\ 2.2+(-4)0+2(-6) & 2.6+(-4)9+2.2 & 2.3+(-4).5+2.1 \\ 3.2+5.0+7(-6) & 3.6+5.9+7.2 & 3.3+5.5+7.1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -4 & 17 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ -36 & 77 & 41 \end{pmatrix}$

No coinciden los resultados, es decir, $AB \neq BA$, lo que significa que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 6+1 & 3+1 \\ 0+2 & 9+(-4) & 5+2 \\ -6+3 & 2+5 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3.3+7.2+4(-3) & 3.7+7.5+4.7 & 3.4+7.7+4.8 \\ 2.3+5.2+7(-3) & 2.7+5.5+7.7 & 2.4+5.7+7.8 \\ (-3)3+7.2+8(-3) & (-3)7+7.5+8.7 & (-3)4+7.7+8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 84 & 93 \\ -5 & 88 & 99 \\ -19 & 70 & 101 \end{pmatrix}$

A continuación, se calcula $A^2 + 2AB + B^2$,

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+6.0+3(-6) & 2.6+6.9+3.2 & 2.3+6.5+3.1 \\ 0.2+9.0+5(-6) & 0.6+9.9+5.2 & 0.3+9.5+5.1 \\ -6.2+2.0+1(-6) & -6.6+2.9+1.2 & -6.3+2.5+1.1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix}$

La matriz AB se ha calculado en el apartado a), así

$2AB = 2\begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23 & 2(-7) & 2.35 \\ 2.33 & 2(-11) & 2.53 \\ 2.1 & 2(-9) & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix}$

$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.2+1.3 & 1.1+1(-4)+1.5 & 1.1+1.2+1.7 \\ 2.1+(-4)2+2.3 & 2.1+(-4)(-4)+2.5 & 2.1+(-4)2+2.7 \\ 3.1+5.2+7.3 & 3.1+5(-4)+7.5 & 3.1+5.2+7.7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix}$

Por tanto, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -14+46+6 & 72+(-14)+2 & 39+70+10 \\ -30+66+0 & 91+(-22)+28 & 50+106+8 \\ -18+2+34 & -16+(-18)+18 & -7+10+62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 60 & 119 \\ 36 & 97 & 164 \\ 18 & -16 & 65 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$, y sólo en aquellos casos en los que se verifique que $AB = BA$, se cumplirá que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) En el apartado b) se han calculado A^2 y B^2, por tanto,

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-6 & 72-2 & 39-10 \\ -30-0 & 91-28 & 50-8 \\ -18-34 & -16-18 & -7-62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 70 & 29 \\ -30 & 63 & 42 \\ -52 & -34 & -69 \end{pmatrix}$$

Para calcular $(A + B)(A - B)$, se ha de calcular cada uno de los factores, el primero se ha calculado en el apartado b) y el segundo es,

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 6-1 & 3-1 \\ 0-2 & 9-(-4) & 5-2 \\ -6-3 & 2-5 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3.1+7(-2)+4(-9) & 3.5+7.13+4(-3) & 3.2+7.3+4(-6) \\ 2.1+5(-2)+7(-9) & 2.5+5.13+7(-3) & 2.2+5.3+7(-6) \\ (-3).1+7(-2)+8(-9) & (-3).5+7.13+8(-3) & (-3).2+7.3+8(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 & 94 & 3 \\ -71 & 54 & -23 \\ -89 & 52 & -33 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$, y al ser $AB \neq BA$, como se ha comprobado en el apartado a), no se verifica $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4. Mediante operaciones elementales transformar A en una matriz escalonada equivalente y calcular el rango de A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

No existe un solo conjunto de operaciones elementales con las que escalonar una matriz. Por tanto, para cada matriz, la matriz escalonada equivalente que se obtiene no es única, aunque todas han de tener el mismo número de filas nulas ya que el rango de una matriz es único.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, intercambiar la primera y segunda fila, tiene como objetivo obtener como “elemento pivote” el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to (1/2)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$, tiene como objetivo obtener como “elemento pivote” el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

Otra manera de escalonar la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to 2F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

d) La matriz A se puede escalonar haciendo operaciones elementales por filas y por columnas, como se muestra a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & -7 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 7 & -4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene tres filas no nulas, por tanto, rg A = 3.

5. Mediante operaciones elementales, determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real a.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Solución

a) Escalonamos la matriz A mediante operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & a-12 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a A que se ha obtenido depende de que la expresión a - 12 sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 12$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $A = 1$
- si $a \neq 12$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $A = 2$

b) Escalonamos la matriz B mediante operaciones elementales por filas:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 3-3a & 1 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a B que se ha obtenido es 2 independientemente de lo que valga el parámetro a. Así, rg $B = 2$ para cualquier valor de a.

c) Escalonamos la matriz C mediante operaciones elementales por filas:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 6-2a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to (4-2a)F_3 - (6-2a)F_2} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a C que se ha obtenido depende de que la expresión 4 - 2a sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 2$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $C = 1$
- si $a \neq 2$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $C = 2$

d) Escalonamos la matriz D mediante operaciones elementales por filas:

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a D que se ha obtenido depende de que las expresiones 1 - a y 2 - a - a^2 sean nulas o no lo sean. Teniendo en cuenta que

$$2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

se distinguen los siguientes casos:

- si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces la matriz escalonada tiene tres filas no nulas y, por tanto, rg $D = 3$
- si $a = -2$ entonces la matriz escalonada tiene dos filas no nulas y, por tanto, rg $D = 2$
- si $a = 1$ entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $D = 1$

6. Sabiendo que las siguientes matrices tienen inversa, calcularla mediante operaciones elementales.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Solución

Se coloca la matriz identidad a la derecha de A obteniéndose la nueva matriz $(A|I_n)$ sobre la que se realizan operaciones elementales por filas hasta que en el lugar de A queda la matriz identidad.

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/5)F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to (5/2)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Se puede obtener el mismo resultado con otras operaciones elementales, por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to 5F_2 - 7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 15 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/5)F_1,\ F_2 \to (1/2)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to (1/5)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - F_2,\ F_3 \to F_3 + F_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-9}{5} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_3 \to (1/3)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-3}{5} \end{array}\right)$

Observar que el proceso seguido para obtener la matriz identidad en el lugar de B consiste en conseguir, mediante operaciones elementales por filas, que en cada columna sean ceros todos los elementos excepto el correspondiente a la diagonal principal que es el que se considera como "elemento pivote". Así, con la primera equivalencia se consigue que el "elemento pivote" de la primera columna sea 1, lo que facilita las posteriores operaciones elementales. En la segunda se consigue hacer 0 los dos elementos de la primera columna que no están en la diagonal principal. En la tercera equivalencia se consigue que el "elemento pivote" de la segunda columna sea 1. En la cuarta se hacen 0 los dos elementos de la segunda columna que no están en la diagonal principal. Finalmente, en la quinta equivalencia se hace 1 el elemento de la tercera columna que está en la diagonal principal y, como los otros dos elementos de esta columna ya son cero, se termina el proceso puesto que se ha obtenido la matiz identidad en el lugar que estaba *B*.

Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$

c) En este caso, en lugar de seguir el mismo proceso que en el apartado anterior, primero se triangulariza la matiz *C* superiormente (se hacen ceros por debajo de la diagonal principal) y después inferiormente (se hacen ceros por encima de la diagonal principal) obteniéndose la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/2)F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 4F_1,\ F_3 \to F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_3 \to (1/4)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 3F_3,\ F_2 \to F_2 + 11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & -7 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to (-1/7)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{56} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Por tanto, $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{56} \\ \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

EJERCICIOS RESUELTOS DE DETERMINANTES

1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

Solución

a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-5)(-3) - 4.13 = 15 - 52 = -37$

b) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8(-1)(-4) + 1(-1)1 + 0 - 0 - 1.3(-4) - 8.3(-1) = 32 - 1 + 12 + 24 = 67$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

a) El menor complementario del elemento a_{21}

b) El adjunto del elemento a_{32}

Solución

a) Para calcular el menor complementario del elemento a_{21}, se escribe el determinante de la matriz eliminando la segunda fila y la primera columna, $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

3. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\,\frac{1}{2}\,4 + 3(-1)(-2) + 0 - (-1)\,\frac{1}{2}\,(-2) - 0 - (-2) = 4 + 6 - 1 + 2 = 11$$

4. Escribir las propiedades de los determinantes que nos permiten asegurar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ **f)** $\begin{vmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 4 & 20 & -1 \\ -3 & -15 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Solución

a) "Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número".

Se observa que en este caso la segunda columna de la matriz inicial se multiplica por 1/2 para obtener la segunda columna de la otra matriz.

b) "$|A^t| = |A|$"

c) "El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo".

d) "Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo".

Se observa que se han intercambiado F_1 y F_3.

e) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo".

Se observa que $F_1 = F_3$.

f) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo".

Se observa que $C_2 = 5\, C_1$.

5. Decir si las siguientes matrices son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa mediante adjuntos.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) Al ser una matriz 2X3 no es cuadrada y, por lo tanto no tiene inversa

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 54 + 0 -18 + 0 - 36 - 0 = 0$

Al ser el determinante igual a cero la matriz no tiene inversa.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 6 -1 - 0 + 2 + 2 = 9 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero la matriz tiene inversa. Para calcular A^{-1}, en primer lugar hallaremos los adjuntos de todos los elementos.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

La matriz adjunta de A es $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 10 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

6. Mediante adjuntos, calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, para aquellos valores del parámetro real a que sea posible.

Solución

Calculamos el determinante de A para hallar los valores del parámetro a que hacen que la matriz sea regular.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 4a - 2a = 5a$, si el determinante es cero, la matriz no será regular

Como la ecuación $5a = 0$ tiene por solución $a = 0$, esta matriz tiene matriz inversa para valores de a distintos de 0. Para estos valores de a, los adjuntos son:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-2a) = 2a$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2a$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 2a - a = a$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$

Por tanto, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3a & 2a & -2a \\ -6 & 1 & 4 \\ a & -a & a \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{5a}\begin{pmatrix} 3a & -6 & a \\ 2a & 1 & -a \\ -2a & 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5a} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5a} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

7. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

El menor de orden 1 considerando F_1 y C_1 es $|2| \neq 0$, por tanto, rg $A \geq 1$.

Orlando el anterior menor con F_2 y C_2 se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$, por tanto, y al no haber más menores de orden 2, se concluye que rg $A = 1$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 no nulo.

Considerando F_1F_2 y C_1C_2, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_1C_3, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$.

Considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$.

Al no existir ningún menor de orden 2 distinto de cero se tiene que rg $A \leq 1$ y al no ser A la matriz nula, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$.

Al ser distinto de cero lo orlamos con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 20 + 12 + 8 + 2 - 45 = 0$

Como este menor es nulo y no existen más menores de orden 3, se tiene rg $A = 2$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como A es una matriz de orden 4×3, no existen menores de orden 4 y, por tanto, rg $A \leq 3$.

El menor de orden 2 considerando F_1F_2 y C_1C_2 es $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 20 = -21 \neq 0$

Al ser este menor de orden 2 distinto de cero, buscamos un menor de orden 3 no nulo.

Orlando con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 13 & -11 & 19 \end{vmatrix} = -19 + 156 + 275 - 65 - 380 + 33 = 0$

Al ser igual a cero volvemos a orlar el menor de orden 2 no nulo, esta vez, con F_4 y C_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 60 + 25 - 25 - 40 + 3 = 21 \neq 0$$

Por tanto, rg A = 3.

8. Calcular, mediante menores, el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro real a. **a)** $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Para saber si rango de $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ es 1 o 2 es necesario calcular los valores del parámetro a para los que el determinante de A (único menor de orden 2 que existe) es nulo.

$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 6 = 0 \Rightarrow a = -6$

Si $a = -6$ entonces $|A| = 0$ y por tanto rg $A < 2$, es decir, rg $A = 1$.
Si $a \neq -6$ entonces $|A| \neq 0$ y por tanto rg $A = 2$.

b) Elegimos en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 3 & a & -1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 1 no nulo, por ejemplo el formado por F_2 y C_1 : $|3| = 3 \neq 0$.

Lo orlamos con F_1 y C_2 : $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3, -3$.

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -3$, entonces rg $A = 2$, ya que existe un menor de orden 2 no nulo.
- Si $a = 3$ o $a = -3$, seguimos buscando un menor de orden 2 no nulo, para ello, orlamos el menor de orden 1 no nulo con F_1 y C_3 (únicas fila y columna restantes):

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -a - 3$

En consecuencia: Si $a = 3$, este último menor es $-6 \neq 0$ y, por tanto, rg $A = 2$.
Si $a = -3$, este último menor es cero y, por tanto, rg $A = 1$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

En los casos en los que la matriz es cuadrada es conveniente calcular el determinante para saber si el rango coincide o no con el orden de la matriz, es decir, para saber si el rango es el máximo posible.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 16 + 2a - 2 - 12a - 8 = -10a + 12$

La ecuación $|A| = -10a + 12 = 0$, tiene por solución a $= \frac{6}{5}$, por tanto:

- Si $a \neq \frac{6}{5}$ se tiene rg $A = 3$.

• Si $a = \frac{6}{5}$ entonces rg $A < 3$. Como en la matriz A existen menores de orden 2 no nulos, por ejemplo, considerando F_1F_2 y C_2C_3, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 2 = 14 \neq 0$, se tiene que rg $A = 2$.

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS LINEALES

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{array}\right\}$

a) Escribir la expresión matricial del sistema.

b) Discutir el sistema.

c) Resolver el sistema por el método de Gauss.

d) Estudiar si el sistema es de Cramer, y en caso afirmativo, calcular su solución matricialmente y por la regla de Cramer.

Solución

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) Escribimos la matriz ampliada del sistema dado y la escalonamos mediante operaciones elementales por filas. Observar que en este proceso también se escalona *A*.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg } A = 2 = \text{rg}(A|B) = \text{nº de incógnitas}$$

Aplicando el teorema de Rouche-Frobenius se deduce que el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

c) Teniendo en cuenta que $(A|B) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$, el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+3y = 3 \\ -y = 0 \end{array}\right\}$ es equivalente al inicial.

De la segunda ecuación se obtiene $y = 0$, y sustituyendo en la primera $2x + 3.0 = 3$, por tanto, $x = \frac{3}{2}$

Luego la solución del sistema es $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$

d) Como *A* es cuadrada y $|A| = 10-12 = -2 \neq 0$, el sistema dado es un sistema de Cramer y lo podemos resolver bien por cálculo matricial o bien por la regla de Cramer.

Cálculo matricial

$X = A^{-1}B$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to 1/2\, F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5/2).3+(3/2).6 \\ 2.3 + (-1).6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solución del sistema es $x = \dfrac{3}{2}$, $y = 0$.

Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\ , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

2. Discutir y resolver el sistema homogéneo: $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Solución

Por ser un sistema homogéneo es compatible. Calculamos el rango de A para determinar el número de soluciones que posee.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, rg$A$ = 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. El grado de indeterminación de sistema es 3 – rg$A$ = 3 - 2 = 1, por lo que la solución dependerá de un parámetro .

Para calcular la solución del sistema dado se resuelve el sistema equivalente asociado a la matriz escalonada que es $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

De la última ecuación se obtiene $3y = 2z$, luego, $y = \dfrac{2z}{3}$

Sustituyendo en la primera, $x + \dfrac{2z}{3} - z = x - \dfrac{z}{3} = 0$, luego $x = \dfrac{z}{3}$

Por lo tanto, las soluciones del sistema es $x = \dfrac{z}{3}$, $y = \dfrac{2z}{3}$, z un número real cualquiera.

3. Dado el sistema lineal $\left.\begin{array}{r} x+y+2z+3t=-1 \\ -x-2y-3z-4t=0 \\ 2x+3y+5z+7t=1 \\ 2x+2y+4z+6t=2 \end{array}\right\}$, indicar si tiene solución y calcularla en este caso.

Solución

Escalonamos la matriz ampliada para determinar el rango de A y de $(A|B)$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & | & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & | & 2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1,\ F_4 \to F_4 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_4 \to F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

rg$A$ = 2 $\neq$ rg $(A|B)$ = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

4. Hallar para qué valores de a el siguiente sistema es compatible determinado y calcular su solución para esos valores: $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y+z=7 \\ -x+y+z=3 \\ 2x+ay-4z=a \end{array}\right\}$

Solución

Estudiamos los rangos de A y de $(A|B)$, escalonando la matriz ampliada .

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ -1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & a & -4 & | & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 + F_1,\ F_4 \to F_4 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & a-2 & -2 & | & a-2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2,\ F_4 \to 2F_4 + (a-2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 2(a-4) & | & 8(a-2) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\approx}{F_4 \to F_4 - (a-4)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2a+24 \end{pmatrix}$$

En este caso rg$A$ = 3 independientemente del valor de a y como el número de incógnitas es también 3 para que el sistema sea compatible determinado debe ocurrir que rg$(A|B)$ sea 3.

rg $(A|B) = 3$ si $-2a + 24 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-24}{-2} = 12$

Resolvamos el sistema para $a = 12$ por el método de Gauss.

$(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ luego el sistema a resolver es $\left.\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ -2y+2z&=6 \\ 2z&=10 \end{aligned}\right\}$ despejando

$2z = 10 \Rightarrow z = 5$

$-2y + 2z = 6 \Rightarrow -2y = 6 - 2z = 6 - 2.5 = -4 \Rightarrow y = 2$

$x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - y + z = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow x = 4$

Por tanto, la solución para $a = 12$ es $x = 4$, $y = 2$, $z = 5$.

5. Determinar los valores reales de a, para que el siguiente sistema tenga: solución única, infinitas soluciones y ninguna. Resolverlo en los casos en que sea posible.

$$\left.\begin{aligned} x + ay + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Para estudiar los rangos de A y $(A|B)$, escalonamos la matriz ampliada

$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} F_2 \to F_2 - F_1, \underset{\approx}{F_3} \to F_3 - 2F_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} F_3 \to F_3 \underset{\approx}{+} (1-a)\, F_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & | & 2-a \end{pmatrix}$

La primera operación elemental ($\underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2}$) tiene por objeto que el parámetro a figure en una fila inferior lo que facilita los cálculos.

El rango de A depende de si es nula o no la expresión $-a^2 - a + 6$

$-a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a = 2$ y $a = -3$

Casos:

• $a \neq 2, -3 \Rightarrow -a^2 - a + 6 \neq 0 \Rightarrow$ rgA = rg (A|B) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución para cada valor de a distinto de 2 y de -3.

Vamos a hallar la solución resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada comenzando a despejar z en la última ecuación y sustituyendo en las anteriores:

$(-a^2-a+6)\ z = 2-a \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{2-a}{-a^2-a+6} = \dfrac{-(a-2)}{-(a-2)(a+3)} = \dfrac{1}{a+3}$

$y + (a+2)\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - (a+2)z = 1 - \dfrac{(a+2)}{(a+3)} = \dfrac{a+3-a-2}{a+3} = \dfrac{1}{a+3}$

$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y + z = 1 - \dfrac{1}{a+3} + \dfrac{1}{a+3} = 1$

La solución es $x = 1$, $y = \dfrac{1}{a+3}$, $z = \dfrac{1}{a+3}$

- $a = 2$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A$ = rg $(A|B) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones que vamos a calcular resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada

$y + 4z = 1 \ \Rightarrow \ y = 1 - 4z$

$x + y - z = 1 \Rightarrow \ x = 1 - 1 + 4z + z = 5z$

Las soluciones son $x = 5z$, $y = 1 - 4z$, $z \in$ ○

- $a = -3$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A = 2 \neq$ rg $(A|B) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

6. Estudiar según los valores de a si el siguiente sistema es de Cramer y calcula en estos casos su solución. $\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 3 \\ 5x - y + az &= 10 \\ x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$

Solución

Como el número de ecuaciones del sistema coincide con el de incógnitas, será un sistema de Cramer si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - a + 20 + 4 - 2a + 15 = -3a + 33 = -3(a - 11)$$

Por lo tanto, si $a \neq 11 \ \Rightarrow \ |A| \neq 0$ y el sistema es un sistema de Cramer y por ello compatible determinado, es decir, con solución única para cada valor de a distinto de 11.

Para resolverlo utilizaremos la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 10 & -1 & a \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{-9-4a+40+16-3a+30}{-3(a-11)} = \frac{-7a+77}{-3(a-11)} = \frac{-7(a-11)}{-3(a-11)} = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & a \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{60+3a+80-40-8a-45}{-3(a-11)} = \frac{-5a+55}{-3(a-11)} = \frac{-5(a-11)}{-3(a-11)} = \frac{5}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{-8-10+15+3-20+20}{-3(a-11)} = \frac{0}{-3(a-11)} = 0$$

Observar que en este caso el valor de x, y, z es independiente de a.