ANÁLISIS DIMENSIONAL.

1. Dimensiones generalizadas.

De acuerdo con un convenio propuesto por Maxwell, las dimensiones genéricas de cada magnitud física ϕ se representan mediante el símbolo $[\phi]$. Así, partiendo del SI se tiene que las dimensiones genéricas de longitud, masa, tiempo, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia, corriente eléctrica e intensidad luminosa se representan por: $[L]$, $[M]$, $[T]$, $[\Theta]$, $[N]$, $[I]$ e $[I_v]$, respectivamente. Téngase en cuenta que en mecánica se trabaja con $[L]$, $[M]$ y $[T]$; en termodinámica hay que añadir $[\Theta]$ y $[N]$; en electromagnetismo, $[I]$; y, para problemas relacionados con la intensidad luminosa, $[I_v]$.

2. Homegeneidad dimensional.

La primera propiedad importante que debe cumplir cualquier ley física cuando se analizan las dimensiones en las que está expresada se llama homogeneidad dimensional. Esta propiedad establece que las dimensiones de toda magnitud física han de ser expresables como un monomio con respecto a las dimensiones establecidas como básicas por el SI. Es decir, que las dimensiones de toda magnitud física serán expresables como:

$$[\phi] = [L]^a[M]^b[T]^c[\Theta]^d[N]^e[I]^f[I_v]^g \tag{1}$$

donde (a, b, c, d, e, f, g) son constantes.

Además, toda ley física ha de ser dimensionalmente consistente, es decir debe comparar magnitudes con las mismas dimensiones.

3. Teorema π de Buckingham.

Sirve para simplificar el estudio de un problema al reducir el número de variables realmente necesarias.

Se puede enunciar diciendo que todo problema en el que intervengan n variables relevantes que dependen de r dimensiones físicas elementales, se puede reducir al estudio de un problema equivalente en el que únicamente se tengan en cuentan $n - r$ agrupaciones de las variables originales que constituyan grupos adimensionales. Es decir, las variables relevantes se agrupan de forma que sus dimensiones se cancelen mutuamente.

Además, existe un método sistemático de construir grupos adimensionales. Si en el problema intervienen r dimensiones físicas elementales, se pueden escoger r variables relevantes, cuyas dimensiones sean independientes entre sí (las de una de ellas no se puedan obtener como combinación de las otras), y construir los grupos adimensionales, de modo sistemático, multiplicando cada una de las $n - r$ variables restantes por un producto de las r variables relevantes, cada una de ellas elevada a un exponente que debe ser despejado para que el producto total forme un grupo adimensional.

Sin embargo, este teorema no dice ni qué grupos adimensionales hay que construir, ni qué variables tomar como relevantes, ni cuál es la forma de la dependencia funcional entre distintos grupos adimensionales. Es un teorema que ayuda a simplificar los problemas, pero que no da su solución.

4. Ejemplo: Determinación de la energía liberada por una explosión atómica. Experimento "Trinity".

La primera prueba nuclear de una bomba atómica se realizó en el desierto de Nuevo Mexico en 1945. Los americanos publicaron una serie de fotos para asustar a sus posibles rivales como "información desclasificada", pero consideraron que la energía total liberada por la bomba era información secreta, ya que podría servir como pista sobre su diseño; más en concreto sobre la cantidad total de material fisible necesaria para construir la bomba. Sin embargo, en las fotos publicadas había información sobre el radio en función del tiempo, lo que bastó para descifrar que la energía liberada rondaba los 20 kilotones.

Tras una explosión atómica hay una primera fase en la que la energía se propaga fundamentalmente a través de la radiación producida. Se trata de la fase durante la cual tiene lugar la explosión atómica propiamente dicha: el material atómico reacciona en cadena, liberando una gran cantidad de energía. Sin embargo, esa fase termina muy pronto y se entra en la fase hidrodinámica durante la cual la onda explosiva generada se propaga como una onda esférica de alta presión y temperatura avanzando hacia la atmósfera

libre, en cuyo interior se conserva la totalidad de la energía liberada por la explosión. Se trata de una fase en la que el gas caliente expandiéndose se comporta de modo muy similar a como lo haría si la liberación inicial de energía se hubiese debido a una bomba incendiaria. Finalmente, se entra en una fase disipativa en la que los intercambios energéticos entre el medio dentro de la zona barrida por la onda explosiva y el medio externo ya no se pueden despreciar.

Durante la fase hidrodinámica, el problema se puede idealizar suponiendo que, dentro de la onda de explosión, se tiene una esfera de gas de radio R cuyas dimensiones crecen según transcurre el tiempo t, conservando la energía total inicialmente liberada por la explosión, E.

La esfera en cuestión se supone que tiene una presión y una temperatura mucho mayor que la de la atmósfera no perturbada, hasta el punto de que esta última es despreciable. Sin embargo, la variación entre la densidad del aire dentro y fuera de la onda de explosión no es lo bastante fuerte como para que se pueda despreciar la densidad del aire de la atmósfera libre.

Si se recuerda la ecuación de estado de los gases ideales ($pV = nRT$), se puede sustituir el número de moles, n, por la masa de aire, divida por su masa molecular; es decir, por m/M_m. Si ahora se pasa el volumen dividiendo al lado izquierdo y se recuerda que el cociente entre la masa y el volumen es la densidad, la ecuación de los gases ideales es expresable como

$$p = \rho RT/M_m,$$

donde ρ es la densidad, p la presión, T la temperatura, M_m la masa molecular del aire y R la constante universal de los gases. En última instancia, aunque haya un cambio muy fuerte de presión y temperatura entre el medio externo a la zona afectada por la explosión y la zona externa; el cociente de ambas magnitudes se puede expresar en función de la densidad, que no experimenta una variación tan intensa [1]:

$$p/T = \rho R/M_m.$$

De aquí se extrae la idea de que los parámetros relevantes para estudiar el problema son: la energía, el radio de la onda de explosión, el tiempo desde el inicio de la explosión y la densidad del aire. Se puede considerar un problema de análisis dimensional con $n = 4$, mientras que $r = 3$ (las dimensiones físicas elementales que intervienen son la masa, la longitud y el tiempo). Esto quiere decir que solamente tiene un grupo adimensional, igualable a una constante desconocida como solución.

[1] El cociente entre la densidad interna y la externa, supuestas discontinuas en la superficie de contacto, viene dado por $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ que toma un valor 6 para $\gamma = 1,4$.

Tomando como variables relevantes, el radio, el tiempo de expansión y la densidad, se puede aplicar el teorema π para construir el siguiente grupo adimensional junto con la energía liberada.

$$[E][R]^a[T]^b[\rho]^c \tag{2}$$

Las dimensiones de las magnitudes involucradas son:

$$[E] = [M][L]^2[T]^{-2}, [R] = [L], [t] = [T], [\rho] = [M][L]^{-3}, \tag{3}$$

Sustituyendo, quedará:

$$[M][L]^2[T]^{-2}[R]^a[T]^b([M][L]^{-3})^c = [M]^0[L]^0[T]^0 \tag{4}$$

Igualando los exponentes a cada lado, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Exponentes de la masa: } c + 1 = 0 \tag{5}$$

$$\text{Exponentes de la longitud: } a - 3c + 2 = 0 \tag{6}$$

$$\text{Exponentes del tiempo: } b - 2 = 0 \tag{7}$$

cuya solución es $a = -5$, $b = 2$ y $c = -1$.

Es decir, que aplicando el análisis dimensional se puede deducir que la energía contenida dentro de la onda de explosión (que es igual a la energía liberada por la bomba) cumplirá

$$Et^2/(\rho R^5) = K; \qquad E = K\rho R^5/t^2 \tag{8}$$

donde K es una constante adimensional.

Hasta aquí llega el análisis dimensional. Analizando las fotos publicadas se puede computar el valor de R^5/t^2. Sabiendo que la primera prueba atómica tuvo lugar en el desierto de Nuevo México a unos $1500m$ de altura, se puede saber que la densidad de la atmósfera no perturbada a esa altura es de $1,19kg \cdot m^{-3}$. Sin embargo, no se tiene información sobre el valor de K, por lo que el problema de determinar el valor la energía liberada, E, no queda completamente resuelto; aunque sí muy simplificado: basta con estimar el valor de una constante a partir de un estudio más detallado del problema.

El científico británico G. I. Taylor [2] fue el primero que desarrolló este análisis y pensó que $K = 0,851$ sería un valor sensato por comparación

[2]Probablemente, el mejor científico en el área de la Mecánica de Fluidos del siglo XX: estudio de ondas de choque, diseño de aviones durante la Primera Guerra Mundial, oceanografía, meteorología, turbulencia, deformación de materiales plásticos, colaborador británico en el proyecto Manhattan, desarrollo de aeronaves supersónicas tras la Segunda Guerra Mundial, estudio de las tormentas eléctricas, ...

con un modelo matemático simplificado que había construido para representar el comportamiento de ondas intensas de explosión [Taylor(1941)]. En una semana, tras la publicación de las fotos, fue capaz de deducir la energía liberada por la explosión de Nuevo México con menos de un 10 por ciento de error. Por razones de seguridad nacional, se le prohibió la publicación de sus resultados hasta 1950 [Taylor(1950a), Taylor(1950b)]. Von Neumann [3], de modo independiente, también había llegado a resultados muy similares [von Neumann(1941)] sobre el comportamiento de una explosión intensa, sin llegar a analizar el caso concreto del "experimento Trinidad"; aunque sus resultados solamente se hicieron públicos [von Neumann(1963)] tras su muerte en 1957. Un científico soviético, L. I. Sedov [4], acabó llegando a las mismas conclusiones [Sedov(1946)] y fue el primero en publicarlas en una revista científica soviética.

Este problema se conoce como la onda de explosión de Taylor-von Neumann-Sedov por los tres científicos que lo resolvieron de forma autónoma.

5. Para saber más.

Una buena explicación sobre análisis dimensional y el comportamiento de una onda de explosión intensa, empleada como ejemplo de aplicación y con detalles sobre el papel de Taylor, von Neumann y Sedov en el desarrollo del modelo, se puede encontrar en [Barenblatt(1996), Landau y Lifshitz(1987)].

El análisis matemático riguroso empleado por los autores originales no se quedó en el análisis dimensional, sino que planteó una versión simplificada unidimensional de las ecuaciones de Euler que regulan la mecánica de fluidos, con simetría esférica, bajo la suposición de tener una esfera muy caliente y a alta presión propagándose en el interior de una atmósfera sin perturbar y de que los fenómenos difusivos son despreciables. Como condiciones de contorno en el contacto entre atmósfera libre y medio interno caliente se emplearon las condiciones de Rankine-Hugoniot, conocidas desde finales del siglo XIX, para representar el comportamiento unidimensional de una onda de choque.

El resultado es, en una primera aproximación, un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, ecuaciones 9, 10 y 11, con el tiempo y el

[3] Quien había sido el principal científico encargado de diseñar el método de implosión del material fisible, previo a su posterior explosión, en las primeras bombas atómicas.

[4] Quien acabaría siendo el principal responsable del desarrollo de los Sputnik.

radio como variables con respecto a las que se deriva.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial (p/\rho^{\gamma})}{\partial t} + v\frac{\partial (p/\rho^{\gamma})}{\partial r} = 0 \tag{11}$$

donde ρ es la densidad, t el tiempo, v la velocidad, r la distancia desde cada punto del espacio al origen de la explosión, p es la presión y γ la constante adiabática del gas en expansión ($1,4$ para la atmósfera). Todas las ecuaciones están expresadas en coordenadas esféricas bajo la suposición de que la solución tiene simetría esférica y, por lo tanto, solo puede depender de r, sin variables angulares en el análisis. La ecuación 9 es la ecuación de continuidad que indica que la masa ni se crea, ni se destruye (en la fase hidrodinámica ha cesado el intercambio masa-energía típico de una reacción nuclear) pero se puede transportar de punto a punto (cambiando la densidad en el proceso). La ecuación 10 es la segunda ley de Newton (expresada en función del momento lineal) aplicada a sistemas continuos y de la que se ha simplificado la dependencia con la densidad (que aparece en la definición de densidad de momento lineal) a través de la ecuación de continuidad [5]. La ecuación 11 expresa que, durante la fase hidrodinámica al no haber ni intercambios significativos de energía con el medio externo, ni procesos disipativos internos, se puede suponer que la entropía total [6] contenida dentro de la esfera de gas caliente en expansión se conserva $\partial s/\partial t + v\partial s/\partial r = 0$.

Tras adimensionalizar las ecuaciones, el sistema de puede convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de un único parámetro (el cociente entre el radio como coordenada de cada punto y el radio de la posición de la onda de choque donde se produce la transición entre medio caliente y medio no perturbado) cuya solución, bajo la condición de que se respeten las condiciones de contorno y de que la energía total se conserve, conduce al valor de la constante que relaciona la energía con $\rho R^5/t^2$.

Aunque las ideas generales del planteamiento del problema no son muy complicadas: conservación de masa, segunda ley de Newton y proceso isentrópico, la obtención de la solución matemática de las ecuaciones resultantes sí que resulta bastante compleja [Barenblatt(1996)].

[5] La ecuación original es $\partial(\rho v)/\partial t + \partial(\rho v^2)/\partial r + 2\rho v^2/r + \partial p/\partial r = 0$; donde la densidad de fuerza externa viene dada por $-\partial p/\partial r$ y los otros sumandos son la variación de la densidad de momento lineal, teniendo en cuenta su transporte debido a v.

[6] Para un gas ideal la densidad de entropía se define como $s = c_v \ln(p/\rho^{\gamma})$, donde c_v es la capacidad calorífica a volumen constante y el término $c_v/(p/\rho^{\gamma})$ se ha extraído como factor común, tras sustituir s de un gas ideal en $\partial s/\partial t + v\partial s/\partial r = 0$, para llegar a 11.

A. Solución numérica del problema de la onda de explosión.

A.1. Teoría.

El material contenido en este apéndice se puede obviar perfectamente en una primera lectura del texto. Se trata de seguir el resultado del problema la onda explosiva de Taylor-von Neumann-Sedov tal y como aparece en la sección 106 de [Landau y Lifshitz(1987)]. Para poder seguir el razonamiento se necesitan conocimientos básicos de termodinámica y mecánica de fluidos, expresión de operadores diferenciales en coordenadas esféricas y ecuaciones diferenciales lineales. No hacen falta conocimientos avanzados, pero los cálculos detallados para resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen son bastante tediosos.

Se comienza por definir el radio de la onda de choque mediante

$$R = \beta(Et^2/\rho_1)^{1/5} \tag{12}$$

que se puede comparar con la ecuación 8 para llegar a la conclusión de que $K = 1/\beta^5$ y de que ρ_1 hace referencia a la densidad en el aire sin perturbar por la explosión. La derivada con respecto al tiempo de R da la velocidad de propagación de la onda de choque con respecto a la atmósfera

$$v_1 = dR/dt = (2/5)\beta(E/(\rho_1 t^3))^{1/5} = (2R/5t)$$

Las condiciones de contorno de Rankine-Hugoniot quedan

$$v_2 = 2v_1/(\gamma+1); \quad \rho_2 = \rho_1(\gamma+1)/(\gamma-1); \quad p_2 = 2\rho_1 v_1^2/(\gamma+1) \tag{13}$$

donde los subíndices 2 hacen referencia al valor que toman las variables inmediatamente detrás de la onda de choque, por el lado de la esfera caliente expandiéndose; los subíndices 1 hacen referencia a los valores inmediatamente por delante de la onda de choque, que actúa como superficie de discontinuidad. Cabe señalar que, en la atmósfera terrestre, el valor típico de γ es $1,4$ lo que se corresponde con un cociente de densidades, a través de la onda de choque, de valor $\rho_2/\rho_1 = 6$.

En un siguiente paso, se aplica la definición de la velocidad del sonido para expresar la presión como: $p_2 = \rho_2 c_2^2/\gamma$, donde c_2 es la velocidad del sonido inmediatamente detrás de la onda de choque. Esto permite sustituir

$$c_2^2 = 2\gamma(\gamma-1)v_1^2/(\gamma+1)^2$$

en lugar de la última de las expresiones que aparecen en la ecuación 13.

A continuación se introducen las siguientes variables adimensionales, que reemplazan a la posición, el tiempo, la velocidad, la densidad y la velocidad del sonido (que reemplaza a la presión en la ecuación 11).

$$\xi = r/R(t); \quad V = 5vt/(2r); \quad G = \rho/\rho_1; \quad Z = (25t^2/4r^2)c^2 \tag{14}$$

y las condiciones de contorno, correspondientes a la onda de choque, tienen lugar en el punto $\xi = 1$ con valores adimensionales $V(1) = 2/(\gamma+1)$, $G(1) = (\gamma+1)/(\gamma-1)$ y $Z(1) = 2\gamma(\gamma-1)/(\gamma+1)^2$.

Debido a la dimensionalidad del problema, solo hay una variable de la cual puedan depender las demás y como tal se toma ξ, el cociente entre la distancia al origen y el radio de la onda de explosión.

Analizando la transmisión de energía, se puede llegar a la conclusión de que su transmisión es autosimilar: para toda esfera de radio $\xi \leq 1$ (dentro de la zona caliente) la energía en su interior se conserva conforme el radio aumenta. La autosimilaridad consiste en que esta propiedad es válida para todo ξ y no solamente en el contorno, donde $\xi = 1$. Esto significa que al expandirse una esfera de radio $r \leq R$, la energía acumulada en la corteza esférica comprendida entre el radio nuevo y el radio antiguo habrá de ser igual al flujo de energía total a través del radio antiguo más el trabajo que haya podido realizar la presión en el proceso. Al cabo de un intervalo dt, la energía acumulada en una corteza esférica se puede estimar como la densidad de energía, interna más cinética [7], por el volumen que haya adquirido en ese dt, $4\pi r^2 v_{onda} dt$, donde $v_{onda} = 2r/(5t)$ es proporcional a la velocidad de propagación la onda de choque [8]; por su parte el flujo de energía depende de la velocidad de propagación del fluido, $v = 2Vr/(5t)$, a través de una superficie de radio r, pero a este término hay que añadirle el trabajo realizado por la presión, por lo que la cantidad que fluye (energía más trabajo de presión) se puede sustituir por una densidad de entalpía [9] más la energía cinética.

[7] Bajo condiciones adiabáticas, implicadas por la conservación de la entropía, la densidad de energía interna vale $e = c^2/(\gamma(\gamma-1))$.

[8] Recuérdese que $v_{choque} = v_1 = 2R/(5t)$.

[9] Bajo condiciones adiabáticas, implicadas por la conservación de la entropía, la densidad de entalpía vale $h = c^2/(\gamma-1)$.

Matemáticamente

$$4\pi r^2 v_{onda}(e + v^2/2)\,dt = 4\pi r^2 v(h + v^2/2)\,dt$$
$$(2r/5t)\Big(\frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)} + v^2/2\Big) = (2r/5t)V\Big(\frac{c^2}{\gamma-1} + v^2/2\Big)$$
$$(2r/5t)^3\Big(\frac{Z}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{V^2}{2}\Big) = (2r/5t)^3 V\Big(\frac{Z}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2}\Big)$$
$$\frac{Z}{\gamma-1}\frac{\gamma V - 1}{\gamma} = \frac{V^2(1-V)}{2}$$

Y se puede despejar, finalmente, la siguiente relación entre los parámetros adimensionales Z y V

$$Z = \frac{\gamma(\gamma-1)(1-V)V^2}{2(\gamma V - 1)} \tag{15}$$

que permite eliminar la ecuación de Newton, ecuación 10, del estudio del problema. Las otras dos ecuaciones se pueden expresar en función de ξ como

$$\frac{dV}{d\ln(\xi)} - (1-V)\frac{d\ln(G)}{d\ln(\xi)} = -3V \tag{16}$$
$$\frac{d\ln(Z)}{d\ln(\xi)} - (\gamma-1)\frac{d\ln(G)}{d\ln(\xi)} = -\frac{5-2V}{1-V} \tag{17}$$

cuya solución, debido a que a la derecha aparece V, se expresa de modo más natural haciendo un cambio de variable de ξ a V

$$\Big(1 - (1-V)\frac{d\ln(G)}{dV}\Big) = -3V\frac{d\ln(\xi)}{dV}$$
$$\Big(\frac{d\ln(Z)}{dV} - (\gamma-1)\frac{d\ln(G)}{dV}\Big) = -\frac{5-2V}{1-V}\frac{d\ln(\xi)}{dV}$$

donde se sustituye $d\ln(Z)/dV$ por $(dZ/dV)/Z$ con Z dado por la expresión 15 y, tras unos cálculos laboriosos, se puede llegar a la siguiente solución para ξ y G como funciones de V

$$\xi^5 = \Big(\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\Big)^{\nu_1}\frac{[(\gamma+1)(\gamma V-1)/(\gamma-1)]^{\nu_2}}{[(\gamma+1)V/2]^2} \tag{18}$$
$$G = \Big(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big)^{\nu_3+\nu_5+1}(\gamma V-1)^{\nu_3}\Big(\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\Big)^{\nu_4}(1-V)^{\nu_5} \tag{19}$$
$$\nu_1 = \frac{-13\gamma^2+7\gamma-12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)}; \nu_2 = \frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}; \nu_3 = \frac{3}{2\gamma+1}; \nu_4 = \frac{-\nu_1}{2-\gamma}; \nu_5 = \frac{-2}{2-\gamma}$$

y la condición de energía total constante se convierte en la ligadura

$$\int_0^R \rho[v^2/2 + c^2/(\gamma(\gamma-1))]4\pi r^2\, dr = E$$

que, en variables adimensionales queda

$$\beta^5 \frac{16\pi}{25} \int_0^1 G(V^2/2 + Z/(\gamma(\gamma-1)))\xi^4\, d\xi = 1 \tag{20}$$

Ahora bien, tanto Z, como ξ^5, como V se han obtenido como funciones de V. Interesa efectuar un cambio de variable desde ξ hasta V en la integral dada por la expresión 20. Para ello, Z y G se sustituyen, simplemente, por las expresiones 15 y 19, respectivamente. En cuanto a $\xi^4 d\xi$, bajo el cambio de variable se convierte en $(d\xi^5/dV)dV/5$, con ξ^5 dado por la expresión 18. En cuanto a los límites de integración, analizando la expresión 18 se puede ver que $\xi = 0$ se corresponde con $V = 1/\gamma$, valor que anula el numerador de ξ^5; por su parte, $\xi = 1$ se corresponde con $V(1) = 2/(\gamma+1)$, el valor de la condición de contorno sobre la onda de choque. La integral 20 en función de la variable V quedará

$$(1/K)\frac{16\pi}{125} \int_{1/\gamma}^{2/(\gamma+1)} G(V)\left(V^2/2 + \frac{Z(V)}{\gamma(\gamma-1)}\right)(d\xi^5/dV)\, dV = 1 \tag{21}$$

donde se ha aplicado que $\beta^5 = 1/K$.

La integral contenida en la ecuación 21 es lo bastante complicada, después de efectuar todas las sustituciones requeridas, como para que no tenga solución analítica; hay que calcularla por métodos numéricos.

A.2. Cálculo de la constante K.

Se puede emplear el paquete de cálculo [Maxima(1998)]. Tras iniciar una sesión de *Maxima*, se teclean los siguientes comandos para introducir las funciones dadas por las ecuaciones 15, 18 y 19. Nótese que, en lugar de Z dada por la ecuación 15, se introduce directamente $Z/(\gamma(\gamma-1))$.

```
(%i1) nu1(x):=(-13*x**2 + 7*x - 12)/((3*x-1)*(2*x+1));
(%i2) nu2(x):=5*(x-1)/(2*x+1);
(%i3) nu3(x):=3/(2*x+1);
(%i4) nu4(x):=-nu1(x)/(2-x);
(%i5) nu5(x):=-2/(2-x);
(%i6) Z(V,x):=(1-V)*V**2 / (2*(x*V-1));
(%i7) G(V,x):=((x+1)/(x-1))**(nu3(x)+nu5(x)+1) * (x*V-1)**nu3(x) *
      ((x+1)*(5-(3*x-1)*V)/(7-x))**nu4(x) * (1-V)**nu5(x);
(%i8) xi5(V,x):=((x+1)*(5-(3*x-1)*V)/(7-x))**nu1(x) *
      ((x+1)*(x*V-1)/(x-1))**nu2(x) / ((x+1)*V/2)**2;
```

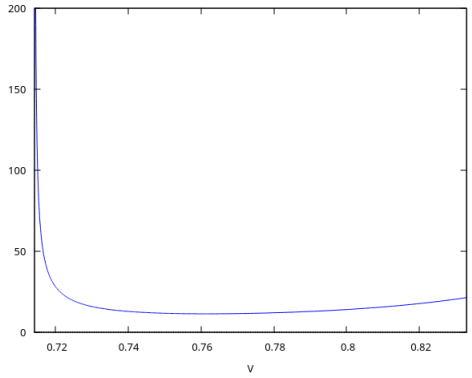


Figura 1: Integrando que aparece en 21, para el intervalo $[1/\gamma, 2/(1+\gamma)]$. Diverge para $V \to (1/\gamma)$, como $(\gamma V - 1)^{\nu 2+\nu 3-2} \approx (\gamma V - 1)^{-0{,}684}$. $\gamma = 1,4$.

A continuación, se particularizan las expresiones previas para $\gamma = 1,4$, se calcula simbólicamente $d\xi^5/dV$ y se computa el integrando de la expresión 21, que se puede ver representado en la figura 1.

```
(%i9) ZZ(V):=Z(V,1.4);
(%i10) GG(V):=G(V,1.4);
(%i10) xxi5(V):=xi5(V,1.4);
(%i11) define(diferencialxi(V), diff(xxi5(V),V));
(%i12) integrando(V):=GG(V) * (V**2 / 2 + ZZ(V)) * diferencialxi(V);
```

Solamente queda fijar los límites de integración y elegir un método numérico para realizar la integración. Se eligió el algoritmo *quad_qag*. En el límite de integración inferior hay que tener cuidado con los términos $(\gamma V - 1)$ elevados a un exponente. Si se hacen negativos, aunque sea de forma residual, su elevación a un exponente genera un número complejo y el algoritmo da error. Para evitar esto, se toma el límite inferior como $(1/\gamma) + 10^{-16}$.

```
(%i13) lim_inf(x):=1/x + 1d-16;
(%i14) lim_sup(x):=2/(x+1);
(%i15) lim_i:lim_inf(1.4);
(%i16) lim_s:lim_sup(1.4);
(%i17) quad_qag(integrando(V), V, lim_i, lim_s, 6);
```

El valor de la integral viene dado por el primer número de la lista de cuatro que se obtiene como salida: 2,11642, con error en la quinta cifra decimal. Ese número se puede sustituir en la expresión 21 para, finalmente, obtener el valor de la constante K

$$K = 2,11642\frac{16\pi}{125} = 0,85106 \approx 0,851 \tag{22}$$

que equivale a un valor $\beta = (1/K)^{1/5} = 1,03278 \approx 1,033$.

Referencias

[Barenblatt(1996)] Barenblatt, G. (1996). *Scaling, self-similarity, and intermediate asympotics*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Landau y Lifshitz(1987)] Landau, L. y Lifshitz, E. (1987). *Fuid Mechanics. 2nd Edition. Course of Theoretical Physics, Vol. 6*. Elsevier, London.

[Maxima(1998)] Maxima (1998). Maxima A Computer Algebra System. `https://maxima.sourceforge.io/`.

[Sedov(1946)] Sedov, L. (1946). Propagation of strong shock waves. *Prikl. Mat. Mekh. (Pergamon translations, No. 1223)*, 9:241–250.

[Taylor(1941)] Taylor, G. (1941). The formation of a blast wave by a very intense explision. Informe técnico, Civil Defence Res. Committee Report RC-210.

[Taylor(1950a)] Taylor, G. (1950a). The formation of a blast wave by a very intense explosion. I, theoretical discussion. *Proc. Roy. Soc. A*, 201:159–174.

[Taylor(1950b)] Taylor, G. (1950b). The formation of a blast wave by a very intense explosion. II, the atomic explosion of 1945. *Proc. Roy. Soc. A*, 201:175–186.

[von Neumann(1941)] von Neumann, J. (1941). The point source solution. Informe técnico, Ntl. Defence Res. Committee, Div. B. Report AM-9.

[von Neumann(1963)] von Neumann, J. (1963). The point source solution. En *Collected Works, Vol. VI*. Pergamon press, Oxford.