CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA.

1. Sistemas de coordenadas.

La Cinemática pretende describir el movimiento de un sistema, en este Tema el sistema será una única partícula, entendida como cuerpo de dimensiones despreciables frente al resto de variables características del problema.

La descripción del movimiento se puede hacer o mediante las ecuaciones horarias que dan la evolución de la posición de la partícula en función del tiempo, o mediante la ecuación de la trayectoria que no da información temporal y simplemente describe el camino seguido por la trayectoria como una línea curva en el espacio formada por la unión de las sucesivas posiciones que ha ido ocupando la partícula. A partir de las ecuaciones horarias es posible despejar la trayectoria: se despeja el tiempo en función de una variable espacial en una ecuación horaria y se sustituye en las demás ecuaciones horarias; sin embargo, es imposible el camino inverso: obtener las ecuaciones horarias a partir de la ecuación de la trayectoria, si no se tiene conocimiento sobre la evolución temporal de al menos una de las variables.

En todo caso, las distintas posiciones ocupadas por la partícula se pueden describir haciendo uso de coordenadas extrínsecas, con puntos de referencia y ejes externos a la propia trayectoria que se analiza desde fuera, o intrínsecas, asociadas a la trayectoria a través de las direcciones tangentes y perpendiculares a la misma, en cada punto.

Dentro de las coordenadas extrínsecas, se pueden considerar unas coordenadas Cartesianas asociadas a unos vectores fijos o unas coordenadas polares en las que el radio indica el vector que une el origen con el punto estudiado en cada instante de tiempo y las variables angulares (en dos dimensiones bastaría con un azimut) se toman en perpendicular al radio.

Conviene analizar con más detalle las coordenadas intrínsecas. Una vez que se tiene una trayectoria considerada como una línea curva en el espacio, definir la tangente a dicha curva no tiene mayor problema que el de calcular la derivada primera de la curva en cuestión: la tangente en cada punto se define, precisamente, como aquella línea recta que coincide con la curva original en ese punto y cuya derivada primera (constante sobre toda la recta)

coincide con la de la curva original en dicho punto (variable a lo largo de la curva, solo se puede garantizar la coincidencia de las derivadas en el punto de tangencia). En dos dimensiones, la perpendicular a la dirección tangente es la dirección normal (forma un ángulo de 90^0 con la tangente) y la construcción de un sistema de referencia intrínseco estaría acabada sin más que añadir un criterio de signos: tangente positiva en el sentido de avance temporal de la partícula sobre la trayectoria (el sentido de la velocidad instantánea) y normal positiva en el sentido en el cual se va recurvando la tangente al avanzar sobre la trayectoria. Sin embargo, en tres dimensiones, la normal a la dirección tangente define un plano en lugar de una línea recta, ¿cómo se elige la dirección normal y que significado tiene la tercera dirección en ese caso? El criterio que se toma es el de calcular la derivada segunda de la curva. Físicamente, esto se corresponde con la derivada de la velocidad con la que se avanza sobre la curva; es decir, la aceleración. Dicha aceleración es un vector que, como todo vector, se puede proyectar sobre la línea tangente (aun cuando dicha proyección pueda ser nula, eso solamente significaría que el vector en cuestión es perpendicular a la dirección tangente). La dirección normal se toma como la dirección en la que apunta la aceleración menos su proyección sobre la dirección tangente; en otras palabras: la aceleración (derivada segunda) tiene una componente alineada con la velocidad (derivada primera), la dirección normal se toma como aquella componente de la aceleración que pertenece al plano perpendicular a la tangente. La tercera dimensión, en este caso, pertenece también al plano perpendicular, pero se correspondería a lo sumo con la derivada tercera (que no interviene en las leyes de Newton) y se puede obtener como el producto vectorial de la tangente por la normal; recibe el nombre de binormal. Geométricamente, conviene visualizar un alambre de cuaderno: la tangente sería la dirección que sigue al alambre en cada punto, la normal sería la línea que apunta hacia la zona interior del alambre (como si este estuviese recubriendo un cilindro, la normal apuntaría hacia el eje de ese cilindro) y, finalmente, la binormal, coincidiría con el eje paralelo al lomo del cuaderno a lo largo del cual se va torsionando (cambiando el plano definido en cada punto por la tangente y la normal, que recibe el nombre de plano osculador) el alambre.

En la figura 1 se pueden ver esos tres sistemas de referencia asociados a un punto P sobre una trayectoria, con un vector de posición que vale $\overrightarrow{OP}$ y trabajando en dos dimensiones.

En la figura 2 se pueden ver unos ejes extrínsecos cartesianos y unos ejes intrínsecos para una trayectoria espiral en tres dimensiones.

En un sistema Cartesiano extrínseco, la posición del punto P se expresa

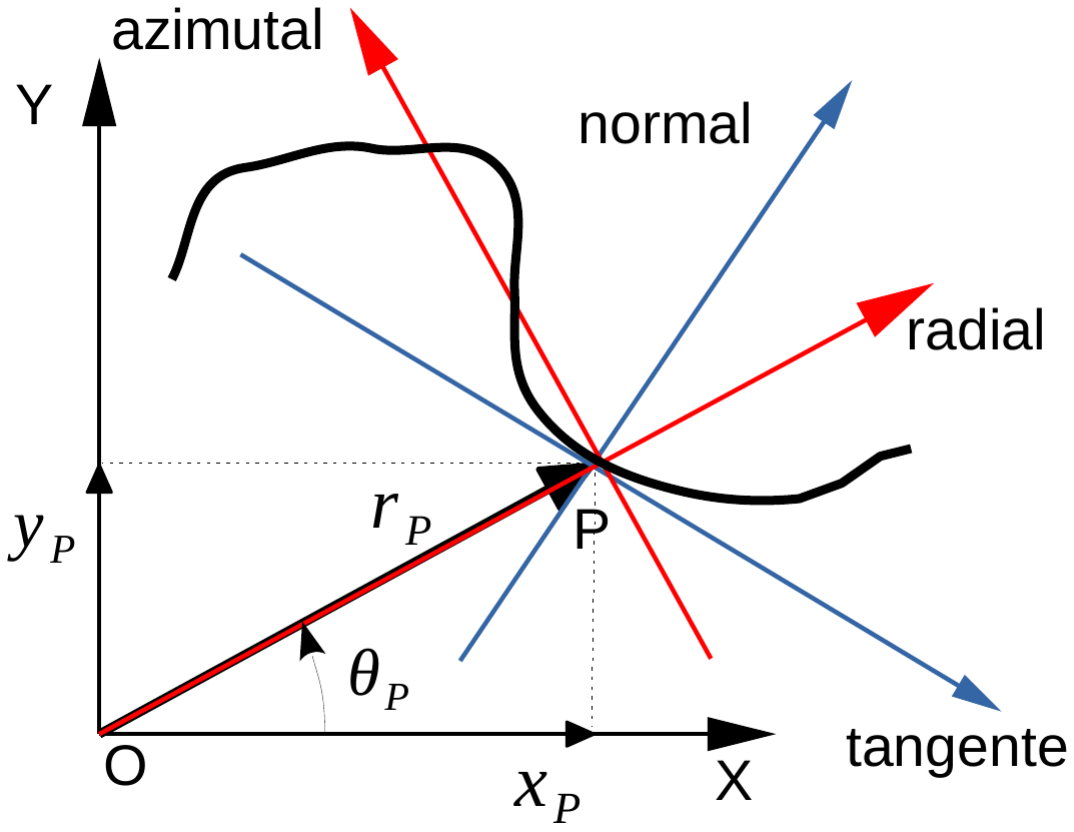


Figura 1: Sistemas de referencia en 2D: Cartesiano extrínseco (OXY, en negro), polar extrínseco (O-radial-azimutal, en rojo) e intrínseco (O-tangente-normal, en azul).

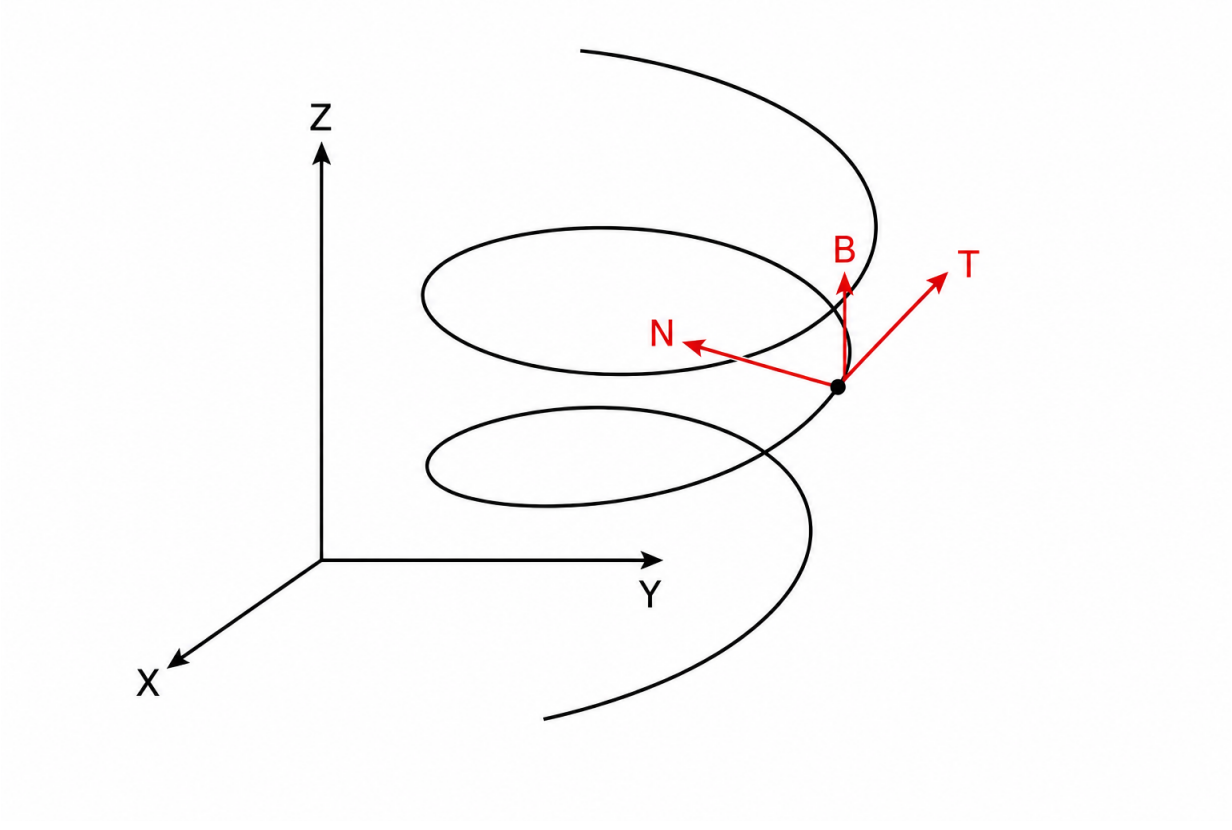


Figura 2: Sistemas de referencia dextrógiros en 3D: Cartesiano extrínseco (XYZ) e intrínseco ($\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$; tangente, normal y binormal).

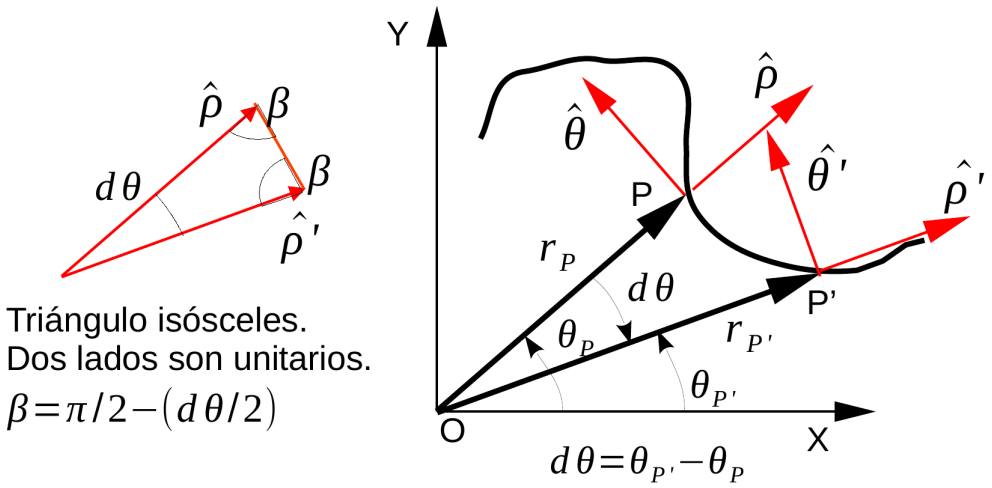


Figura 3: A la derecha, dos puntos sucesivos, P y P' con sus respectivos vectores unitarios polares. A la izquierda, detalle del cambio del vector unitario radial, al pasar de P a P'. Los respectivos vectores unitarios constituyen los dos lados iguales de un triángulo isósceles, con ángulo de apertura $d\theta$ que tiende a cero conforme $P' \to P$.

por:

$$\vec{r}_P = x_p\hat{\imath} + y_p\hat{\jmath} + z_p\hat{k} \tag{1}$$

donde los vectores unitarios se mantienen constantes, pero las coordenadas pueden cambiar.

En dos dimensiones, la posición en coordenadas polares del punto P se expresa por:

$$\vec{r}_P = r_p\hat{\rho} \tag{2}$$

donde el vector unitario $\hat{\rho}$ indica la dirección radial, con sentido desde el origen O hacia el punto P. Dicho vector unitario, ya no es constante, sino que cambia al ir desplazándose el punto P sobre la trayectoria. En la figura 3 se puede ver un esquema de cómo cambia el vector $\hat{\rho}$ radial y el vector $\hat{\theta}$ azimutal, al desplazarse de un punto P a otro P' sobre la trayectoria. La diferencia entre los vectores radiales en los puntos P y P', $\hat{\rho}$ y $\hat{\rho}'$, forma un ángulo β con ambos vectores radiales que tiende a un ángulo recto conforme $d\theta \to 0$. Esto significa que la diferencia entre ambos vectores tiende a apuntar en la dirección perpendicular a los mismos, la dirección azimutal. Trabajando en componentes

$$\vec{r}_P = x_p\hat{\imath} + y_p\hat{\jmath} = r_p\hat{\rho}$$

por lo que se cumplirá que

$$\hat{\rho} = \frac{x_p}{r_p}\hat{\imath} + \frac{y_p}{r_p}\hat{\jmath} = \cos(\theta_p)\hat{\imath} + \text{sen}(\theta_p)\hat{\jmath} \tag{3}$$

y su derivada se podrá expresar como

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \Big(-\text{sen}(\theta_p)\hat{\imath} + \cos(\theta_p)\hat{\jmath}\Big)\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{d\theta_p}{dt}\hat{\theta} \tag{4}$$

ya que, repasando la figura 3, se puede comprobar como el vector polar unitario azimutal, $\hat{\theta}$, que forma un ángulo recto con el radial tiene, precisamente, coordenadas $\hat{\theta} = -\text{sen}(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$, cuando se expresa en cartesianas.

A su vez, la derivada del vector unitario azimutal quedará

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \Big(-\cos(\theta_p)\hat{\imath} - \text{sen}(\theta_p)\hat{\jmath}\Big)\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{d\theta_p}{dt}\hat{\rho} \tag{5}$$

En cuanto a las coordenadas en ejes cartesianos y polares, se puede pasar de un sistema a otro mediante las relaciones

$$x = r\cos(\theta) \tag{6}$$

$$y = r\text{sen}(\theta) \tag{7}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8}$$

$$\theta = \text{arctg}(y/x) \tag{9}$$

En un sistema de coordenadas intrínsecas, el comportamiento es muy similar al de las coordenadas polares; pero hay que tener cuidado con el hecho de que los ángulos no son los mismos. En efecto, en polares el ángulo relevante es el azimut formado entre el vector de posición y la horizontal; por el contrario, en intrínsecas, el ángulo relevante es la pendiente de la tangente, el ángulo entre la tangente a la trayectoria (que es paralela a la velocidad en lugar de a la posición) y la horizontal. Así, por ejemplo, en una línea recta el ángulo de la tangente no cambia ya que la propia línea es tangente a sí misma y, sin embargo, el ángulo de azimut del vector de posición sí que va cambiando al desplazarse sobre la línea recta el punto considerado, véase la figura 4.

Lo que se obtiene en el caso intrínseco es que

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{N} \tag{10}$$

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\hat{T} \tag{11}$$

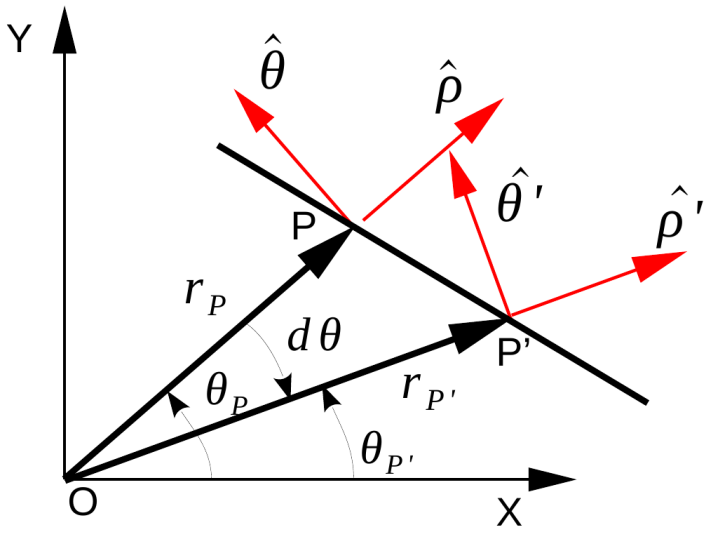


Figura 4: Trayectoria en línea recta. La tangente coincide en todo punto con la propia recta. Los vectores polares van variando conforme el punto considerado se desplaza a lo largo de la recta.

donde ϕ es el ángulo entre el vector unitario tangente, $\hat{T}$, y la horizontal Un esquema de cómo varían los ángulos intrínsecos en una situación bidimensional se puede ver en la figura 5. En el caso intrínseco, cabe destacar que se introduce el concepto de circunferencia osculatriz, como aquella circunferencia definida sobre el plano que contiene a la tangente y a la normal (el plano osculador) tal que coincide con la curva en el punto estudiado, es tangente a la misma (hasta aquí igual que una línea recta tangente) y, además, su derivada segunda también coincide con la derivada segunda de la curva. La importancia de introducir esta circunferencia viene dada porque, localmente, el movimiento de una partícula a lo largo de la trayectoria real es indistinguible (al coincidir la derivada segunda, coincide la aceleración y, por lo tanto, las fuerzas) en las proximidades de cada punto del de una trayectoria circular a lo largo de la osculatriz. Por supuesto, al cambiar de punto en el caso general, cambia la osculatriz; pero el que el análisis instantáneo punto a punto sea coincidente, es algo que se puede aplicar.

En un movimiento circular se sabe que existe una relación entre camino recorrido sobre un arco de circunferencia y ángulo en radianes que viene dada por $s = \phi R$, donde R es el radio de la circunferencia y s el camino recorrido sobre un arco. Puesto que, en primera aproximación, la trayectoria real es indistinguible de la circular a lo largo de una osculatriz (la diferencia iría con la derivada tercera); se puede suponer que el ángulo ϕ barrido por el vector

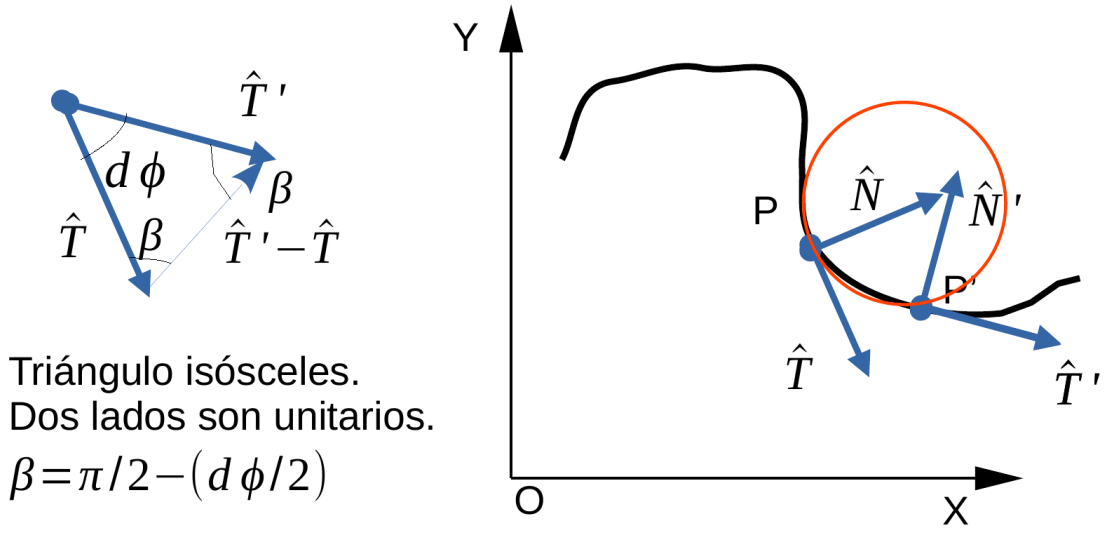


Figura 5: Variación de los vectores intrínsecos tangente y normal conforme un punto se traslada sobre una trayectoria. Aparece representada, en rojo, una circunferencia osculatriz: aquella que no solo es tangente sino que, además, su derivada segunda coincide con la de la curva. A la izquierda se ve en grande la variación del vector unitario tangente y como, conforme $P' \to P$, se cumple que $d\phi \to 0$ y que $d\hat{T}$ tiende a hacerse perpendicular al propio vector unitario tangente y, por lo tanto, sirve para definir la dirección normal.

unitario tangente al ir recorriendo la curva cumple la relación $ds = Rd\phi$, con R el radio de la circunferencia osculatriz, llamado radio de curvatura en el lenguaje del análisis diferencial de trayectorias. Tómese nota de que, puesto que el análisis solo es coincidente de manera instantánea, la expresión general $s = R\phi$ válida sobre toda circunferencia, solo seguirá siendo válida en forma infinitesimal $ds = Rd\phi$ cuando una curva cualquiera se aproxime a través de su osculatriz. En todo caso, al tomar derivadas con respecto al tiempo, se conserva en ambos casos la relación $(ds/dt) = R(d\phi/dt)$ que se puede reescribir como $d\phi/dt = v/R$, ya que la derivada de la distancia recorrida por unidad de tiempo es, por definición, el módulo de la velocidad.

En tres dimensiones, para las coordenadas cartesianas, simplemente hay que añadir un eje fijo OZ con vector unitario $\hat{k}$, que forme un triedro dextrógiro con $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, y que se mantenga fijo.

En intrínsecas, el vector unitario tangente no cambia, se define a partir de la dirección de la derivada primera de la trayectoria; el vector unitario normal se define a partir de la componente de la segunda derivada que no sea paralela a la primera derivada y su producto vectorial define la tercera dirección, la binormal.

Más complejo resulta la generalización en tres dimensiones, de las coordenadas polares extrínsecas en dos dimensiones. Existen múltiples sistemas de referencia posibles con coordenadas adaptadas a la geometría del problema de los que los más usuales son los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

En un sistema de coordenadas cilíndricas, el plano XY se representa en coordenadas polares mediante una variable radial y otra azimutal, mientras que el eje Z se añade como en cartesianas: es un eje que indica la dirección perpendicular al plano XY mediante un vector unitario $\hat{k}$ que forme una base dextrógira con $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ y que se mantiene constante. Se trata de la generalización obvia y más sencilla posible. La relación entre coordenadas cilíndricas y cartesianas viene dada por

$$x = r\cos(\theta) \tag{12}$$
$$y = r\mathrm{sen}(\theta) \tag{13}$$
$$z = z \tag{14}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{15}$$
$$\theta = \mathrm{arctg}(y/x) \tag{16}$$

En un sistema de coordenadas esféricas, véase la figura 6, las variables que se usan son, por un lado la distancia desde un punto cualquiera hasta el origen

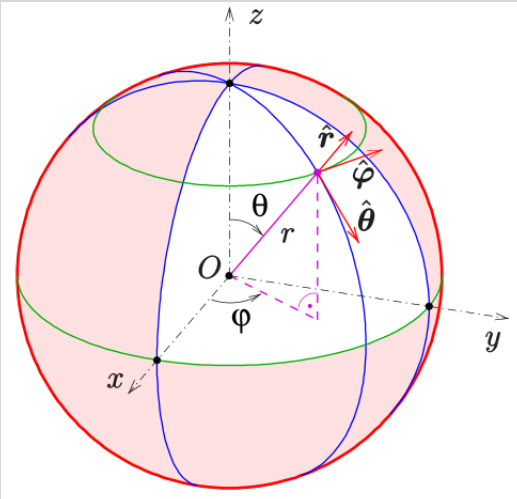


Figura 6: Sistema de referencia esférico con origen en el centro de la esfera, en comparación con unos ejes cartesianos con el mismo origen. Aparece representado el vector unitario radial, $\hat{r}$, y los dos vectores unitarios angulares, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$.

del sistema de referencia y, por otro lado, dos variables angulares [1] que sirven para fijar la posición de un punto sobre una superficie esférica definida como el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al origen del sistema de referencia es la misma que la del punto considerado. El paso de unas coordenadas a otras viene dado por

$$x = r\text{sen}(\theta)\cos(\phi) \tag{17}$$
$$y = r\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) \tag{18}$$
$$z = r\cos(\theta) \tag{19}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{20}$$
$$\theta = \text{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \tag{21}$$
$$\phi = \text{arctg}(y/x) \tag{22}$$

Conviene tener en cuenta que, el convenio más usual para definir los ángulos es tomar θ como la colatitud (empieza en 0 en el polo Norte y termina en π en el polo Sur, cuando la latitud va desde $-\pi/2$ en el polo Sur hasta $\pi/2$ en el polo Norte) y ϕ como la longitud desde 0 hasta 2π, cuando del convenio

[1] Piénsese por ejemplo en la latitud y la longitud para determinar una posición sobre la superficie terrestre.

geográfico va desde $-\pi$ hasta π, en la línea de cambio de fecha, pasando por el 0, en el meridiano de Greenwich.

2. Velocidad y aceleración de una partícula.

La velocidad es, por definición, la derivada primera de la posición con respecto al tiempo; mientras que la aceleración es, por definición la derivada primera de la velocidad con respecto al tiempo. Por lo tanto, la aceleración también se puede definir como la derivada segunda con respecto al tiempo dos veces de la posición.

En coordenadas extrínsecas cartesianas

$$\vec{v}_P = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{23}$$

$$\vec{a}_P = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \tag{24}$$

donde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$, $a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2$ y $a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2$.

En coordenadas extrínsecas cilíndricas (las polares se corresponderían con el plano XY

$$\vec{v}_P = \frac{dr}{dt}\hat{\rho} + \frac{d\theta}{dt}r\hat{\theta} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{25}$$

$$\vec{a}_P = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 r\right]\hat{\rho} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2}r\right]\hat{\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{26}$$

En coordenadas extrínsecas esféricas

$$\vec{v}_P = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\text{sen}(\theta)\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P = &\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 - r\text{sen}^2(\theta)\Big(\frac{d\phi}{dt}\Big)^2\right]\hat{\rho} \\ &+ \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\cos(\theta)\text{sen}(\theta)\Big(\frac{d\phi}{dt}\Big)^2\right]\hat{\theta} \\ &+ \left[r\text{sen}(\theta)\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\text{sen}(\theta)\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + 2r\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right]\hat{\phi}\end{aligned} \tag{28}$$

En un sistema intrínseco, la velocidad y la aceleración quedan

$$\vec{v}_P = v\hat{T} \tag{29}$$

$$\vec{a}_P = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\omega\hat{N} \tag{30}$$

donde $\omega = d\phi/dt$ es la velocidad con la que está cambiando el ángulo que forma el vector $\hat{u}_t$, conforme avanza el tiempo, con respecto a la dirección $\hat{u}_{t0}$ que tenía en el punto tomado para calcular las derivadas, recuérdese la figura 5. Si se recuerdan, además, los comentarios sobre la circunferencia osculatriz, se puede sustituir $\omega = v/R$ y la aceleración en intrínsecas quedaría

$$\vec{a}_P = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{N} \tag{31}$$

donde el primer término se llama aceleración tangencial (alineada con la velocidad) y el segundo aceleración normal (perpendicular a la velocidad). Por su origen físico, la aceleración tangencial está asociada a cambios en el módulo de la velocidad, mientras que la aceleración normal está asociada a cambios en el vector unitario tangente que indica la dirección local del movimiento.