TEMA 4. Mecánica de vuelo.

CUD de Zaragoza.

22 de noviembre de 2018

1. Introducción.

En este capítulo las referencias fundamentales son el capítulo 3 de Phillips (2010), las secciones 4.5, 4.12, 4.14, 4.16, 5.1 y 5.2.1.1 Cucharero (1995) y el capítulo 21 de Zarchan (2012) para el análisis basado en las leyes de Newton de la Mecánica de Vuelo. Los apartados dedicados al estudio de la estabilidad y la maniobrabilidad, al final del capítulo, toman como referencias fundamentales las secciones 4.3.2 y 4.3.3 del manual ACART-VA-011 (2009), así como las secciones 4.17, 4.18 y el apartado 5.2.13 de Cucharero (1995).

La mecánica de vuelo trata de estudiar la trayectoria de una aeronave como respuesta a las fuerzas a las que se ve sometida: peso, aerodinámicas y empuje. En principio, la aeronave se debería estudiar como un sólido rígido con seis grados de libertad en tres dimensiones: tres traslaciones y tres rotaciones.

Normalmente, la mecánica de vuelo se descompone en tres campos: simulación de vuelo, rendimiento de la aeronave y estabilidad y control de la misma. La simulación de vuelo requiere plantear las ecuaciones diferenciales completas correspondientes a los seis grados de libertad de la aeronave e integrarlas en el tiempo. El estudio del rendimiento se limita a plantear un análisis de las ecuaciones correspondientes a las traslaciones (fuerzas) para estimar rendimientos, gastos de combustible, alcances, velocidades máximas, maniobras óptimas de planeo, ... El estudio del control y la estabilidad se limita a considerar como afecta una pequeña perturbación con respecto a una situación previa al comportamiento de la aeronave. Resulta de interés desde el momento en que las acciones de guiado típicas para un misil tienen periodos del orden, como mucho, del segundo y, por lo tanto, tiene sentido estudiar el comportamiento del misil en ese rango temporal como una perturbación pequeña con respecto a una situación previa ya que, antes de que la perturbación haya crecido significativamente, se recibirá una nueva orden.

En este tema se estudiará únicamente el control y la estabilidad de una aeronave en vuelo bajo de la suposición de que los ángulos de ataque son lo bastante pequeños como para mantenerse en el rango en el que la fuerza de sustentación tiene una dependencia lineal con el ángulo de ataque, $\alpha \leq 15^o$, y de que la aeronave tiene dos o más planos de simetría. Es importante tener en cuenta que, siempre que haya que tomar un valor numérico, los ángulos entrarán en las ecuaciones como radianes.

2. Ecuaciones de movimiento de una aeronave.

Se supone que se trabaja con un sistema de referencia intrínseco a la aeronave: fuerzas axiales (Fx), laterales (Fy) y normales (Fz); ejes de balanceo (OX), de cabeceo (OY) y de guiñada (OZ).

2.1. Nomenclatura.

En lo que queda de este tema se usará el siguiente convenio para denominar a las variables con las que se trabaja

El vector velocidad lineal del centro de masas: $\vec{v} = (u, v, w)$.

El vector velocidad angular del misil en torno a su centro de masas: $\vec{\omega} = (p, q, r)$.

El vector fuerza aerodinámica: $\vec{F}_A = (X, Y, Z)$.

El vector empuje: $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$.

El vector fuerza total: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

El vector torque aerodinámico: $\vec{\tau}_A = (l, m, n)$.

El vector torque total: $\vec{\tau} = (L, M, N)$.

El vector de ángulos de gobierno: $\vec{\delta} = (\delta_l, \delta_m, \delta_n)$.

2.2. Leyes de Newton.

Para el movimiento de traslación, asignaturas de Física I y Mecánica,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

que es válida en un sistema de referencia inercial en el que se ha supuesto que el empuje, que en realidad es una seudofuerza debida a un flujo de momento lineal en un sistema abierto [1], es equivalente a una fuerza real en un sistema cerrado que, instantáneamente, coincide con el sistema abierto estudiado.

La aceleración inercial, que es la derivada temporal de la velocidad, se puede expresar en función de la aceleración medida en un sistema de referencia no inercial que está rotando con el propio misil (ejes intrínsecos) a través de la relación vista en la asignatura de Mecánica

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{inercial} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{intrinseco} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

que permite relacionar derivadas temporales en un sistema inercial con las derivadas temporales en un sistema que está rotando con velocidad angular $\vec{\omega}$.

Así que, la segunda ley de Newton empleando variables intrínsecas queda

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{u} + m(qw - rv) \\ F_y &= m\dot{v} + m(ru - pw) \\ F_z &= m\dot{w} + m(pv - qu) \end{aligned} \tag{1}$$

donde los segundos sumandos de cada una de las expresiones se han obtenido haciendo el producto vectorial $m\vec{\omega} \times \vec{v}$ con la nomenclatura utilizada en esta sección.

[1] El misil pierde masa y momento lineal a través de la tobera de salida.

En cuanto a la dinámica de rotación con respecto al centro de masas, repasando el teorema del momento angular en la asignatura de Mecánica se tiene

$$\vec{\tau} = \left.\frac{d(\mathbf{I}\vec{\omega})}{dt}\right|_{inercial} = \left.\frac{d(\mathbf{I}\vec{\omega})}{dt}\right|_{intrinseco} + \vec{\omega} \times (\mathbf{I}\vec{\omega})$$

Ahora bien, los misiles típicos presentan alta simetría y sus ejes principales de inercia coinciden con los de balanceo, cabeceo y guiñada. En una base intrínseca, los productos de inercia se anulan y los momentos de inercia según los ejes de cabeceo y de guiñada son iguales entre sí. Asimismo, en esa base intrínseca, el tensor de inercia se mantiene constante (su derivada es nula) ya que los ejes principales de inercia siempre siguen siendo los mismos en relación al propio misil(ejes de balanceo, cabeceo y guiñada, al margen de que estén rotando con respecto a una referencia inercial). Así que, el teorema del momento angular quedará

$$\begin{aligned} L &= I_{\parallel}\dot{p} \\ M &= I_{\perp}\dot{q} + (I_{\parallel} - I_{\perp})pr \\ N &= I_{\perp}\dot{r} + (I_{\perp} - I_{\parallel})pq \end{aligned} \tag{2}$$

donde se ha hecho uso del convenio de notación $I_{xx} = I_{\parallel}$ y $I_{\perp} = I_{zz} = I_{\perp}$ para representar los momentos de inercia con respecto al eje longitudinal del misil y con respecto a un eje perpendicular al anterior.

El sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) es un sistema de seis ecuaciones diferenciales acopladas que permite calcular seis grados de libertad: tres velocidades lineales y tres velocidades angulares. Si se supone que el misil tiene balanceo estabilizado, se cumple que $p = \dot{p} = 0$, lo cual simplifica sobremanera el sistema previo.

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{u} + m(qw - rv) \\ F_y &= m\dot{v} + mru \\ F_z &= m\dot{w} - mqu \\ L &= 0 \\ M &= I_{\perp}\dot{q} \\ N &= I_{\perp}\dot{r} \end{aligned} \tag{3}$$

Comparando el sistema (3) con las seis ecuaciones originales es inmediato comprobar que los sistemas con balanceo estabilizado tienen una cadena general de pilotado más sencilla que la se tiene cuando $p \neq 0$, tal y como se dijo en el Tema 3. No sólo se ha suprimido el grado de libertad correspondiente a los giros en balanceo (la ecuación $L = 0$ es redundante una vez que la cadena de control asegura el que $p = \dot{p} = 0$) sino que, además, la dinámica descrita por el sistema (3) se puede descomponer en dinámica sobre el plano de guiñada (ecuaciones de F_x, F_y y N) y dinámica sobre el plano de cabeceo (F_x, F_z y M). Ambos movimientos sólo están acoplados a través de la ecuación en F_x que regula como varía la velocidad axial del misil cuando éste efectúa una maniobra. Una maniobra pura de cabeceo que sólo modificase, en primer orden, las variables w y q se acaba traduciendo, debido a la ecuación de F_x en un cambio de la velocidad [2] axial u que, a través de la ecuación en

[2]Desde el punto de vista físico estudiado en el Tema 3, una maniobra que modifique el ángulo de ataque va acompañada de un cambio en la fuerza de arrastre, casi alineada con el eje axial y, por lo tanto, en una variación de la velocidad axial.

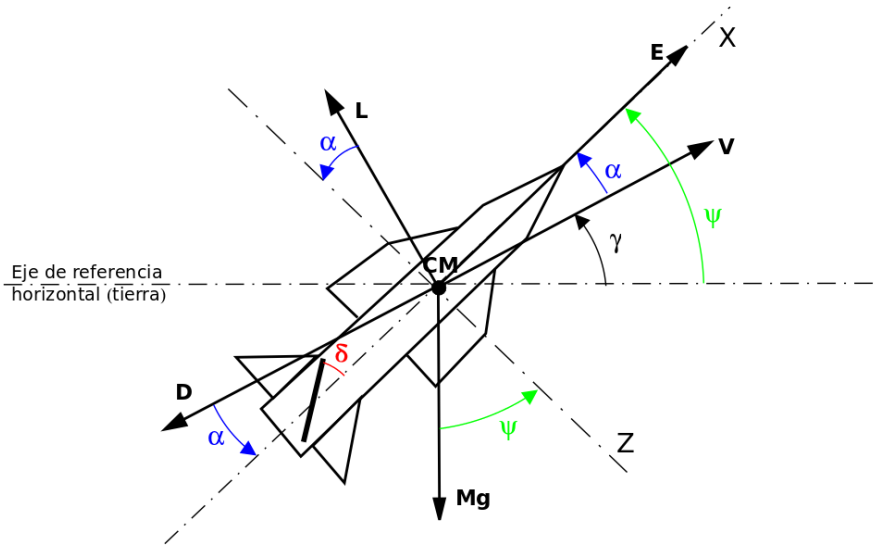


Figura 1: Ejes intrínsecos a un misil sobre el plano de cabeceo: X y Z, con origen en el centro de masas, CM. Se representan los distintos tipos de fuerza que actúan sobre el misil (sustentación, L, arrastre, D, peso, mg, y empuje, E), supuestas actuando sobre el CM por simplicidad, y el vector velocidad del misil, V. También aparecen los distintos ángulos relevantes en el análisis de sus orientaciones relativas: ataque (α), pendiente (γ), actitud (ψ) y gobierno (δ).

F_y y de la dependencia de las fuerzas aerodinámicas con la velocidad, se acaba traduciendo en una perturbación en las variables típicas para determinar la guiñada: v y r.

Sin embargo, como ya se comentó en el Tema 2 al estudiar la fugoide, los cambios en el módulo de la velocidad están asociados a través del acoplamiento con el campo gravitatorio a cambios en la elevación de la trayectoria. Si estos cambios son de periodo largo en comparación con el periodo de actuación del interprete de órdenes responsable del pilotado, se pueden despreciar en el estudio del sistema de control (aunque no en el estudio del guiado como un todo). Además, la hipótesis de que sólo se trabaja para ángulos de ataque pequeños implica que $u = |\vec{v}|\cos(\alpha) \approx |\vec{v}|$ y la componente axial de la velocidad también se puede considerar como si fuese constante e igual al módulo de la velocidad total en el estudio de perturbaciones pequeñas. El uso simultáneo de las dos aproximaciones anteriores conduce a que se pueda prescindir de la ecuación en F_x en el estudio subsiguiente y, por lo tanto, al desacoplamiento entre las maniobras de cabeceo y de guiñado. Ambas maniobras se pueden estudiar por separado y, en lo que sigue, sólo se analizará la respuesta del misil en el plano de cabeceo con dos grados de libertad correspondientes a las rotaciones de cabeceo y a las traslaciones en perpendicular al eje axial:

$$\begin{aligned} F_z &= m\dot{w} - mqu \\ M &= I_\perp \dot{q} \end{aligned} \tag{4}$$

La componente z de la aceleración en una base intrínseca, $\dot{w}$, se puede reexpresar de otro modo más útil si se tiene en cuenta que $\mathrm{tg}\,\alpha = w/u$, como se puede apreciar en la figura 1. Bajo la aproximación de ángulo pequeño $\mathrm{tg}(\alpha) \approx \alpha$ y se cumple que $w = u\alpha$ por lo que $\dot{w} = \dot{u}\alpha + u\dot{\alpha}$ por aplicación de la regla de la cadena. Además, con α pequeño, el módulo del vector $\vec{v}$ se puede aproximar por su componente u. También conviene recordar que, una de las aproximaciones hechas era la de despreciar las variaciones en el módulo de la velocidad; con esa aproximación $\dot{u}\alpha << u\dot{\alpha}$

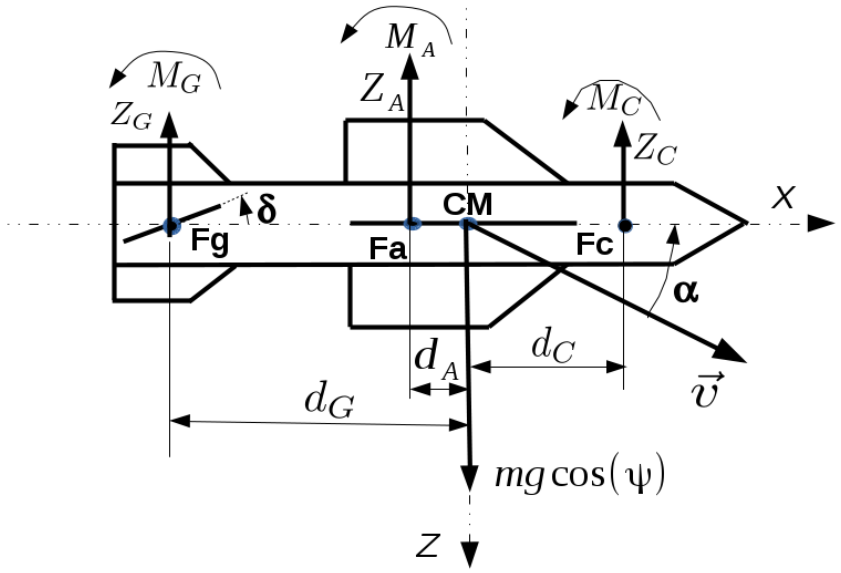


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre de un misil clásico para el estudio de su comportamiento dinámico. Criterio de signos: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo, Y positivo hacia fuera del plano de trabajo, giros antihorarios sobre el plano positivos.

y se puede suponer que $\dot{w} = u\dot{\alpha}$ es una buena aproximación.

Una vez acabado el estudio de las aceleraciones y antes de proseguir con el de las fuerzas y momentos conviene escribir la forma que toma el sistema de dos ecuaciones diferencias acopladas que se continuará analizando

$$\begin{aligned} F_z &= mu(\dot{\alpha} - q) \\ M &= I_\perp \dot{q} \end{aligned} \tag{5}$$

Es interesante reseñar que q, la componente de cabeceo de la velocidad angular del misil, mide la rotación de su eje longitudinal con respecto a una referencia fija que bien puede ser la horizontal en tierra. Es decir: $q = \dot{\psi} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$.

3. Estudio de un misil clásico.

Se considerará únicamente la dinámica en el plano de cabeceo y se comienza por un diagrama de cuerpo libre, figura 2, en el que sólo se consideran las fuerzas normales, correspondientes a la primera de las ecuaciones del sistema (5) y los pares de cabeceo, correspondientes a la segunda de las ecuaciones del sistema (5).

En la figura 2 se representan las siguientes magnitudes: CM es la posición del centro de masas, F_C es la posición del foco aerodinámico del cuerpo desnudo del misil, F_A es la posición del foco aerodinámico de las alas fijas, F_G es la posición del foco aerodinámico de la timonería de gobierno (el timón trasero por tratarse de una configuración clásica), d_C, d_A y d_G son las distancias entre los respectivos focos y el centro de masas, Z_C, Z_A y Z_G son las componentes normales de las fuerzas aerodinámicas sobre el cuerpo, sobre las alas y sobre los elementos de gobierno, M_C, M_A y M_G son las componentes de cabeceo de las partes par de los sistemas equivalentes fuerzas-par aplicados sobre los respectivos focos aerodinámicos (cuerpo, alas y gobierno), $mg\cos(\psi)$ es la componente

normal del peso donde ψ es el ángulo de actitud y la proyección del peso se ha hecho de acuerdo a la figura 1, $\vec{v}$ es la velocidad, α es el ángulo de ataque y δ el ángulo de gobierno.

3.1. Perturbaciones pequeñas con respecto a una situación de vuelo equilibrado.

En una situación de vuelo equilibrado, las componentes normales del peso, de las fuerzas aerodinámicas y del empuje darán, a lo sumo, una resultante correspondiente a la ejecución exacta de la última orden recibida desde el elaborador de órdenes, manteniendo constantes los ángulos de gobierno y de ataque. Puesto que las órdenes recibidas por el elaborador se corresponden con aceleraciones normales a ejecutar por la trayectoria, esto quiere decir que la situación equilibrada, de acuerdo a lo estudiado en las asignaturas de Física I y Mecánica, se corresponde con una trayectoria circular con una aceleración normal $a_n = \omega^2 R_{radiogiro} = \omega u$, donde se ha supuesto que la velocidad lineal es aproximadamente constante e igual a $\omega R_{radiogiro}$. La ω relevante a efectos de trayectorias es la que indica los cambios en la tangente a la propia trayectoria. Con la nomenclatura de este tema: $\omega = \dot{\gamma}$. Puesto que el ángulo de ataque, α, se mantiene constante en situación de equilibrio, se tiene que $\omega = \dot{\gamma} = \dot{\psi} = q$ con un valor constante correspondiente a la ejecución de la orden previamente recibida. Por tanto, $\dot{q} = 0$, y las ecuaciones correspondientes a una situación de equilibrio en la que se esté ejecutando exactamente la maniobra previamente ordenada quedan

$$\begin{aligned} mg\cos(\psi) - Z_C - Z_A - Z_G &= -muq_{eq} \\ M_C + M_A + M_G + d_C Z_C - d_A Z_A - d_G Z_G &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

donde se ha supuesto gobierno aerodinámico (empuje axial sin componente normal) y representación de cada célula aerodinámica por su sistema fuerza-par equivalente supuesto aplicado en el respectivo foco aerodinámico.

Para estudiar un pequeño cambio con respecto a la situación previa, habría que considerar cómo cambian todas las fuerzas frente a pequeños cambios en todas las variables de que dependen. Se trataría de hacer un desarrollo en serie de Taylor, con respecto a la situación de equilibrio, truncado a primer orden. Así habría que calcular las derivadas primeras de cada variable frente a cambios en los ángulos de ataque, de gobierno, de actitud, cambios en la velocidad, ...

Sin embargo, los cambios en el módulo de la velocidad se acoplan con el efecto de los cambios en el ángulo de actitud al proyectar el peso sobre el eje normal para dar lugar a las oscilaciones de periodo largo debidas al intercambio entre la energía cinética y la potencial conocidas como fugoide y que se pueden compensar con el sistema de guiado. Si sólo interesa el comportamiento en primer orden de aproximación del sistema de control, se puede suprimir tanto el efecto debido a los cambios en el módulo de la velocidad, como el efecto de los cambios de orientación del misil en la descomposición del peso según los ejes axial y normal. El estudio de la nueva situación se corresponde con una situación en la que las partes par del sistema fuerza-par equivalente no han cambiado, por estar calculadas sobre el foco aerodinámico, y la proyección normal del peso tampoco lo ha hecho, por no considerarse el efecto de la fugoide que también requeriría incluir el efecto de los cambios en el módulo de la velocidad. En cambio las fuerzas aerodinámicas normales pasan de valer Z_{eq} a valer $Z_{eq} + (dZ/d\alpha)\alpha$, con una aproximación en serie de Taylor de primer orden.

Restando a las ecuaciones correspondientes a la nueva situación, las correspondientes a la situación de equilibrio previa, se puede estudiar como evoluciona la perturbación que acaba conduciendo desde una situación de equilibrio previa (dada por una trayectoria con un cierto radio de giro) a

otra nueva (con un radio de giro distinto). De este modo, desaparecen lo términos constantes del estudio y la finalidad del sistema de control es estudiar los transitorios a que da lugar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\frac{dZ_C}{d\alpha_C}\alpha_C - \frac{dZ_A}{d\alpha_A}\alpha_A - \frac{dZ_G}{d\alpha_G}\alpha_G &= mu(\dot{\alpha} - q) \\ d_C\frac{dZ_C}{d\alpha_C}\alpha_C - d_A\frac{dZ_A}{d\alpha_A}\alpha_A - d_G\frac{dZ_G}{d\alpha_G}\alpha_G &= I_\perp \dot{q} \end{aligned} \tag{7}$$

y los métodos que se pueden emplear para amortiguarlos. Por ahorro de notación, hay que sobreentender que todas las variables angulares y sus respectivas velocidades se corresponden, en realidad, con su valor real menos el valor que tuviesen en la situación equilibrada inicial. Así por ejemplo, la q que aparece en el sistema 7 y que se usará de ahora en adelante se corresponde, en realidad, con la variable $q - q_{eq}$; es decir, con la variación de la velocidad angular de cabeceo con respecto a la situación equilibrada previa en la que tenía un valor constante. Lo mismo ocurrirá cuando se hable de ángulos de ataque, α, y de gobierno, δ. Los signos corresponden al criterio representado en la figura 2: α y δ son antihorarios y positivos, las fuerzas apuntan hacia arriba y son negativas, sus torques horarios son negativos, los antihorarios son positivos. De ese modo, un cambio en los signos de α o δ se traduce en un cambio correcto de la contribución correspondiente tanto al sumatorio de fuerzas, como al de momentos.

A continuación, se determinarán $dZ_C/d\alpha_C$, $dZ_A/d\alpha_A$ y $dZ_G/d\alpha_G$ a partir de las relaciones aerodinámicas vistas en el Tema 3. Las fuerzas aerodinámicas se calculan de modo natural en un sistema de referencia ligado a la velocidad de la aeronave; sin embargo, la mecánica de vuelo se expresa de modo natural en un sistema de referencia ligado a los ejes de simetría de la propia aeronave. En todo caso, trabajando sólo con el plano de cabeceo, el cambio entre un sistema y otro es fácil: el ángulo de ataque, α, es el ángulo entre los respectivos ejes X y Z de los dos sistemas. La fuerza aerodinámica normal vendrá dada por

$$-Z = -D\,\mathrm{sen}(\alpha) - L\cos(\alpha) \tag{8}$$

donde los signos negativos indican que, de acuerdo a las figuras 1 y 2 todas las componentes de la ecuación (8) apuntan hacia arriba. Si se opera con ángulos de ataque pequeños, tales que $\mathrm{sen}(\alpha) \approx \alpha$ y $\cos(\alpha) \approx 1$, la ecuación (8) quedará:

$$-Z = -D\alpha - L \tag{9}$$

que se puede normalizar a través de la presión dinámica multiplicada por el área de referencia y suprimiendo el signo negativo a izquierda y derecha se obtiene

$$C_Z = C_D\alpha + C_L \tag{10}$$

y tomando derivadas primeras con respecto a α

$$\frac{dC_Z}{d\alpha} = C_{D0} + C_{L,\alpha} \tag{11}$$

donde se han usado las definiciones dadas en el Tema 3 y la suposición de que se está trabajando en el rango de dependencia lineal de la sustentación con el ángulo de ataque: $C_L = C_{L,\alpha}\alpha$. C_{D0} es el coeficiente de arrastre para ángulo de ataque nulo. La expresión 11 permite trabajar indistintamente

con información que venga dada tanto sobre el coeficiente de fuerza normal (en cuyo caso no es necesario efectuar ninguna proyección, simplemente derivar para $\alpha = 0$) como que venga dada en forma de coeficientes de arrastre y de sustentación (en cuyo caso, la pendiente del rango lineal de la sustentación se suma con el arrastre para ángulo de ataque nulo).

En este punto conviene considerar cuáles son los valores de los ángulos efectivos de ataque sobre el cuerpo desnudo, α_C, sobre las alas fijas, α_A, y sobre las aletas traseras de gobierno, α_G. Sobre el cuerpo y sobre las alas fijas, el chorro de aire incidente lo hace con el mismo ángulo que mantiene la velocidad con el eje longitudinal del misil, se desprecia la perturbación que la incidencia sobre el cuerpo desnudo crea sobre el chorro de aire incidente sobre las alas, por lo que $\alpha_C = \alpha_A = \alpha$. Analizando la figura 2, se podría pensar, a priori, que el ángulo de incidencia efectivo sobre las aletas traseras tiene lugar con un ángulo $\alpha_G = \alpha + \delta$. Sin embargo, cuando se aplica un ángulo de gobierno δ su eficacia no es total desde el primer momento en la generación de fuerzas y momentos; se incluye un factor de eficacia [3], k, multiplicando el ángulo δ. Por otra parte, el chorro de aire que incide sobre las aletas traseras ha sufrido una perturbación sobre las alas fijas que desvían el chorro de aire a su salida en una cuantía que se estima como $-h\alpha_A = -h\alpha$ con respecto al ángulo de ataque de incidencia sobre el ala fija; esto provoca que el ángulo de ataque sobre las aletas traseras de gobierno, al margen del efecto debido al cambio dado por $k\delta$, no sea el original sino el valor correspondiente al chorro desviado a la salida del ala fija que valdrá $(1-h)\alpha$. En el caso de los misiles clásicos, se puede trabajar con $h \approx 0,5$ salvo en el régimen transónico en el que $h \approx 1$. En este curso se trabajará únicamente con misiles supersónicos, como es típico en los SAM, y valores de h para misiles clásicos que, salvo indicación en contrario, valdrán $0,5$.

Suponiendo que se dispone de datos sobre los coeficientes de fuerza normal, usando los valores dados en el párrafo previo para los ángulos de ataque y recordando los factores de normalización de fuerzas y momentos que se dieron en el Tema 3, las ecuaciones (7) quedarán

$$\begin{aligned} -z_\alpha \alpha - z_\delta \delta &= \dot{\alpha} - q \\ -m_\alpha \alpha - m_\delta \delta &= \dot{q} \end{aligned} \tag{12}$$

donde se han reagrupado todas las dependencias de las fuerzas y momentos como dependencias lineales en el ángulo de ataque del misil como un todo, α, y en el de gobierno, δ. Nótese que las expresiones originales para las fuerzas se expresan como constantes que multiplican a los ángulos efectivos de ataque sobre cada célula aerodinámica; pero que cada uno de esos ángulos de ataque efectivos se puede expresar como una función del ángulo de ataque global y del ángulo de gobierno: $\alpha_C = \alpha_A = \alpha$ y $\alpha_G = (1-h)\alpha + k\delta$, para un misil clásico.

Las constantes z_α y z_δ vienen dadas por

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{\rho u A}{2m}\left[C_{ZC} + \frac{A_A}{A}C_{ZA} + (1-h)\frac{A_G}{A}C_{ZG}\right] \\ z_\delta &= \frac{\rho u A}{2m} k \frac{A_G}{A} C_{ZG} \end{aligned} \tag{13}$$

donde se ha tenido en cuenta que el área empleada para normalizar la fuerza sobre el cuerpo desnudo es su sección transversal, A, mientras que sobre las alas y las aletas se emplea su área en planta, A_A y A_G respectivamente. Habría que tener en cuenta en este punto que, en un misil típico, tanto

[3] Las eficacias típicas oscilan en torno a $0,7$. Si no se especifican como dato, se puede tomar $k = 0,7$.

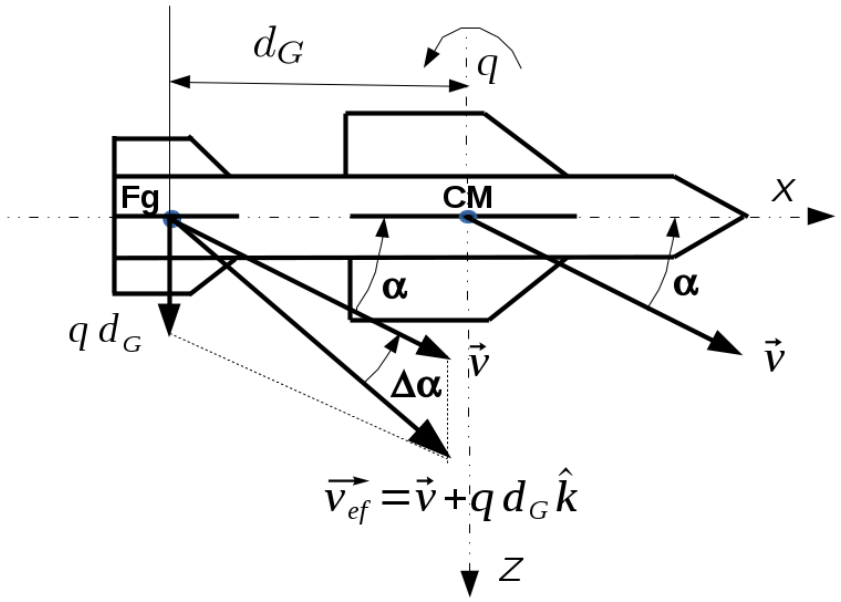


Figura 3: Efecto del cabeceo sobre la velocidad realmente experimentada en la cola de un misil, con respecto a la velocidad de su centro de masas. Modificación correspondiente del ángulo de ataque definido como ángulo entre la velocidad real actuando sobre una célula aerodinámica y el eje longitudinal de la célula.

alas como aletas van por parejas de células (semialas o semialetas) y que tanto A_A como A_G se corresponden con las áreas de las alas o aletas completas.

Las constantes m_α y m_δ vienen dadas por

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp}\Big[-\frac{d_C}{L}C_{ZC} + \frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA} + (1-h)\frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \\ m_\delta &= k\frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp}\frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG} \end{aligned} \tag{14}$$

donde la normalización global de los momentos incluye como escala relevante la longitud total del misil, L. Nuevamente habría que tener en cuenta el comentario previamente hecho sobre la presencia de alas y aletas formadas por pares de células aerodinámicas a la hora de calcular las áreas.

A partir de las ecuaciones (12), (13) y (14) ya se puede hacer un estudio simplificado sobre la respuesta de una aeronave a una cierta maniobra de gobierno. No obstante, hay que tener en cuenta que un buen número de efectos que no se han tenido en cuenta. En el caso de trabajar con misiles, la modificación mínima necesaria surge cuando la velocidad angular de cabeceo no es nula. En efecto, se sabe que el ángulo de ataque es el ángulo entre el vector velocidad y el eje de simetría de la célula aerodinámica considerada. Si el misil está cabeceando, la velocidad en la cola ya no será igual que la velocidad en el centro de masas sino que habrá que añadirle una contribución debida al producto vectorial de la velocidad angular de cabeceo, q, por la posición relativa del foco de gobierno con respecto al centro de masas; es decir, sobre la posición de la aleta de gobierno, la velocidad efectiva vendría dada por $\vec{v}_{ef} = \vec{v}_{CM} + qd_G\hat{k}$ de acuerdo al esquema de la figura 3. El resultado es que valor del ángulo de ataque efectivo sobre las aletas de gobierno necesita una corrección pequeña $\Delta\alpha$ que se puede aproximar por su tangente que, a su vez, se puede aproximar como qd_G/u. Se trata, en todo caso, de un efecto débil y despreciable como contribución a la fuerza neta; pero que puede

ejercer una contribución importante al momento neto si actúa a través de un brazo de palanca largo como ocurre en el caso de un misil con configuración clásica. Esta corrección se tiene en cuenta sustituyendo la ecuación de momentos que aparece en (12) por

$$-m_\alpha \alpha - m_\delta \delta - m_q q = \dot{q} \tag{15}$$

donde el coeficiente m_q viene dado por una contribución al momento debida a la timonería trasera con el mismo signo que la contribución debida a α

$$m_q = \frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp} \frac{d_G}{L} \frac{A_G}{A} C_{ZG} \frac{d_G}{u} = \frac{\rho u AL^2}{2I_\perp} \frac{d_G^2}{L^2} \frac{A_G}{A} C_{ZG} \tag{16}$$

Hay también una corrección adicional debida al retraso con el que la perturbación inducida por la variación del ángulo de ataque sobre las alas delanteras acaba afectando a la aletas de gobierno traseras; este retraso tiene un tiempo característico estimable como el tiempo que tarda en recorrer el aire externo desplazándose con la velocidad axial, u, la distancia entre ambas células aerodinámicas. Si se incluyera está corrección, habría un término adicional $-m_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$ a la izquierda de la ecuación 15. Sin embargo, cuando se trabaja con misiles y salvo en la configuración de tipo canard, las correcciones que dependen de $\dot{\alpha}$ son despreciables frente a los demás términos que intervienen tanto en la ecuación de fuerzas como en la de momentos y no resulta necesaria su inclusión.

4. Estudio de un misil canard.

En lugar de repetir todo el análisis efectuado para el misil clásico, se estudiarán únicamente las diferencias. Los cambios son: desaparecen las alas fijas, las aletas traseras pasan a ser fijas en lugar de ser dispositivos de gobierno, aparecen aletas delanteras móviles con misión de gobierno. En la figura 4 se puede ver como queda el diagrama de cuerpo libre.

Los cambios anteriores se traducen, en primer lugar, en que cambia el signo del torque de gobierno con respecto a la configuración clásica.

En cuanto a los chorros de aire sin perturbar y desviados; sobre la timonería de gobierno se tiene una incidencia directa del chorro de aire externo sin perturbar por la presencia del misil, por lo que $\alpha_G = \alpha + k\delta$, donde se ha conservado el factor de eficacia. En cambio, sobre el cuerpo desnudo y sobre las aletas traseras incide un chorro de aire desviado tras pasar por la timonería, por lo que $\alpha_C = \alpha_A = \alpha - h\alpha_G = \alpha(1-h) - kh\delta$, donde $h\alpha_G$ representa el efecto debido al desvío del chorro (técnicamente, se llama deflexión) producido por la timonería. Este es el cambio cualitativo más importante con respecto al misil clásico: debido a la deflexión del chorro en la timonería, surgen fuerzas que dependen del ángulo de gobierno también sobre las partes fijas del misil.

Las ecuaciones (12) corregidas mediante la incorporación de la dependencia de los torques con la velocidad angular de cabeceo, ecuación (15), siguen siendo válidas para analizar este caso. Solamente cambian los valores de las constantes que intervienen y la posibilidad, ya mencionada al hablar de los misiles clásicos, de que sea necesario añadir una corrección del tipo $-m_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$ a la izquierda de la ecuación (15). En el cálculo de las constantes z_α, z_δ, m_α y m_δ se opera como en el caso de un misil clásico: se parte del sistema (7) con fuerzas aerodinámicas supuestas lineales en los ángulos de ataque efectivos sobre cada célula, $\alpha_G = \alpha + k\delta$ y $\alpha_C = \alpha_A = \alpha(1-h) - kh\delta$, y se reagrupan los términos en función de α y δ.

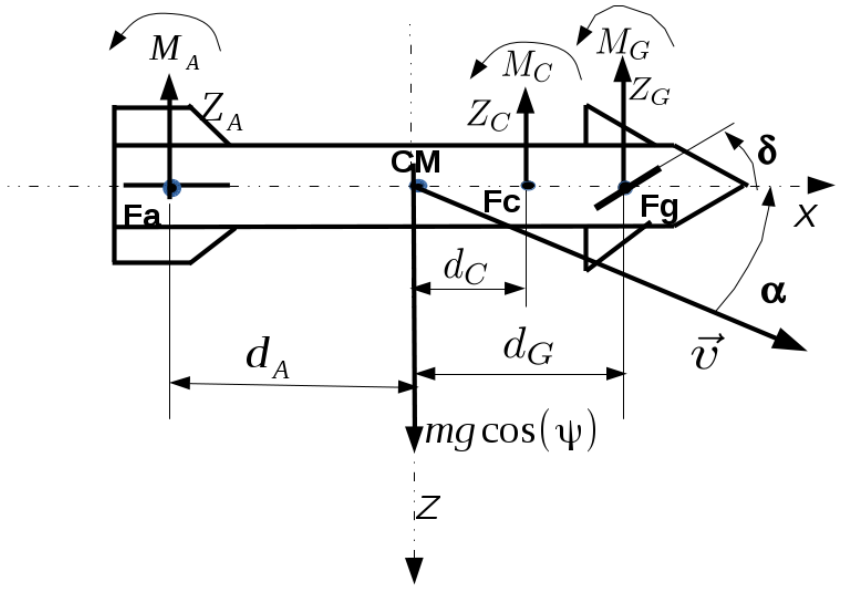


Figura 4: Diagrama de cuerpo libre de un misil canard para el estudio de su comportamiento dinámico. Criterio de signos: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo, Y positivo hacia fuera del plano de trabajo, giros antihorarios sobre el plano positivos.

Las constantes z_α y z_δ vienen dadas por

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{\rho u A}{2m}\Big[C_{ZC}(1-h) + \frac{A_A}{A}C_{ZA}(1-h) + \frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \\ z_\delta &= \frac{\rho u A}{2m}k\Big[-C_{ZC}h - \frac{A_A}{A}C_{ZA}h + \frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \end{aligned} \tag{17}$$

El diseño de un misil canard suele buscar una configuración en la que se anule el gobierno en fuerza, $z_\delta = 0$. En tal caso, los parámetros se ajustan de manera que

$$h = \frac{C_{ZG}A_G}{C_{ZC}A + C_{ZA}A_A} \tag{18}$$

donde h por estar físicamente ligado a la deflexión que experimenta el chorro de aire incidente sobre la timonería delantera no puede tomar un valor cualquiera. En los misiles clásicos con alas grandes, su valor era de orden $0,5$. En los misiles canard, con aletas móviles pequeñas como primer dispositivo sobre el que incide el chorro, su valor es menor, del orden de $0,3$.

En cuanto a las constantes m_α y m_δ vienen dadas por

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\rho u^2 A L}{2I_\perp}\Big[-\frac{d_C}{L}C_{ZC}(1-h) + \frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA}(1-h) - \frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \\ m_\delta &= \frac{\rho u^2 A L}{2I_\perp}k\Big[\frac{d_C}{L}C_{ZC}h - \frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA}h - \frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

En el cálculo debido a la velocidad angular de cabeceo, hay que tener en cuenta su contribución a la velocidad lineal total en los dos extremos del misil. En comparación con el caso clásico, se sigue teniendo una aleta, en este caso fija, en la parte trasera del misil por lo que la corrección del ángulo efectivo sobre la aleta se podrá estimar del mismo modo, $\Delta\alpha_A = qd_A/u$. Pero, además, sobre la parte delantera del misil se tiene ahora una aleta de gobierno en la que la velocidad efectiva vendrá

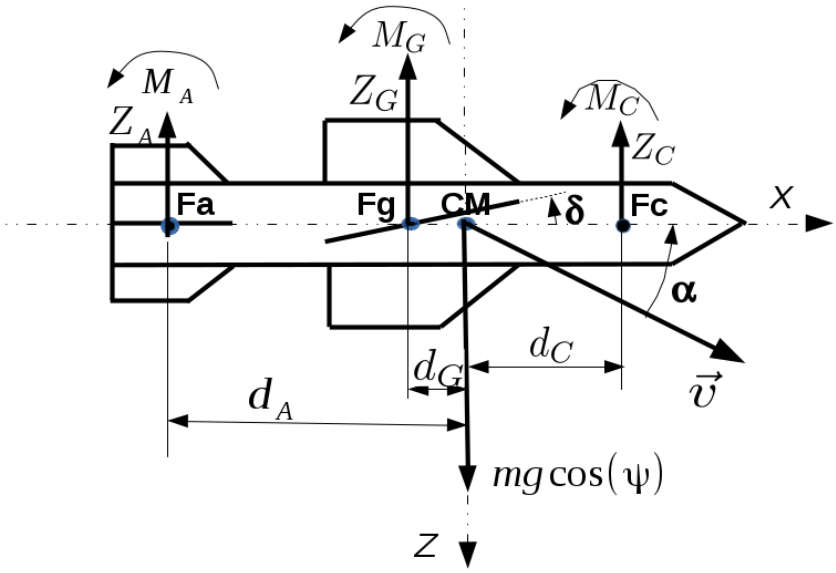


Figura 5: Diagrama de cuerpo libre de un misil de alas móviles para el estudio de su comportamiento dinámico. Criterio de signos: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo, Y positivo hacia fuera del plano de trabajo, giros antihorarios sobre el plano positivos.

dada por $\vec{v} - qd_G\hat{k}$, con una corrección de sentido contrario a la experimentada sobre la cola cuyo efecto se podrá estimar mediante $\Delta\alpha_G = -qd_G/u$. En el cálculo de m_q se trata de correcciones que, para la aleta, tienen el mismo signo que la contribución debida a α sobre la aleta; mientras que, para la timonería, tienen signo opuesto a su contribución debida a α. También hay que notar que este efecto no se ve afectado por la deflexión del chorro. El coeficiente m_q viene dado por

$$m_q = \frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp}\Big[\frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA}\frac{d_A}{u} + \frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\frac{d_G}{u}\Big] = \frac{\rho uAL^2}{2I_\perp}\Big[\frac{d_A^2}{L^2}\frac{A_A}{A}C_{ZA} + \frac{d_G^2}{L^2}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \tag{20}$$

Si se indica el valor de $m_{\dot\alpha}$ habrá que reemplazar la ecuación (15) por

$$-m_\alpha\alpha - m_\delta\delta - m_q q - m_{\dot\alpha}\dot\alpha = \dot q \tag{21}$$

5. Estudio de un misil de alas móviles.

Con respecto a un misil clásico el cambio fundamental es que se intercambian los papeles de alas y aletas. En el caso clásico, las alas eran fijas y las aletas traseras timonería de gobierno. En este caso, las alas son timonería de gobierno y las aletas traseras fijas. Comparando con un misil canard, la timonería se retrasa en su posición, pasa de la zona delantera del misil a la zona próxima a su centro de masas, e incrementa el área de la célula aerodinámica responsable, pasa de aleta a ala. En la figura 5 se puede ver un diagrama de cuerpo libre.

Sobre el cuerpo desnudo y la timonería (que ahora son las alas) incide el chorro de aire externo sin perturbar. Por lo tanto, $\alpha_C = \alpha$ y $\alpha_G = \alpha + k\delta$, con el factor de eficacia en el gobierno incluido. Sobre las aletas traseras fijas incide el chorro desviado tras haber pasado por las alas móviles de gobierno; por lo tanto $\alpha_A = \alpha - h\alpha_G = (1-h)\alpha - kh\delta$. Comparando con las expresiones similares obtenidas en caso de un misil clásico y de un misil canard y el análisis posterior se pueden extraer algunas conclusiones:

- Las ecuaciones básicas, (12) corregida por (15), son las mismas.

- El comportamiento frente al ángulo α es como el de un misil clásico en el que se hayan intercambiado los subíndices A y G.

- El comportamiento frente al ángulo δ es como un misil clásico en cuanto a su gobierno. Surge una contribución adicional debida a la deflexión sobre la aleta, subíndice A, de signo contrario a la de gobierno.

- El comportamiento frente a la velocidad angular de cabeceo q es como el de un misil clásico en el que la aleta de gobierno, G, se ha convertido en fija, A.

De este modo, los coeficientes z_α, z_δ, m_α, m_δ y m_q quedarán

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{\rho u A}{2m}\Big[C_{ZC} + \frac{A_G}{A}C_{ZG} + (1-h)\frac{A_A}{A}C_{ZA}\Big] \\ z_\delta &= \frac{\rho u A}{2m}k\Big[-\frac{A_A}{A}C_{ZA}h + \frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp}\Big[-\frac{d_C}{L}C_{ZC} + \frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG} + (1-h)\frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA}] \\ m_\delta &= k\frac{\rho u^2 AL}{2I_\perp}\Big[-\frac{d_A}{L}\frac{A_A}{A}C_{ZA}h + \frac{d_G}{L}\frac{A_G}{A}C_{ZG}\Big] \end{aligned} \tag{23}$$

$$m_q = \frac{\rho u A L^2}{2I_\perp}\frac{d_A^2}{L^2}\frac{A_A}{A}C_{ZA} \tag{24}$$

En este tipo de misiles interesa el gobierno PIF. Esto se consigue ajustando los valores de los distintos parámetros de tal modo que $m_\delta = 0$; para ello

$$h = \frac{d_G A_G C_{ZG}}{d_A A_A C_{ZA}} \tag{25}$$

con un valor de $h \approx 0,5$ como ocurría en el caso clásico en régimen supersónico: ala grande deflexionadora cerca del centro de masas, aleta pequeña sobre la que incide el chorro deflexionado cerca de la cola.

6. Valores de los parámetros aerodinámicos.

Bajo las hipótesis de que los ángulos tanto de ataque como de gobierno son pequeños, de manera que la aproximación de la fuerza aerodinámica normal como una constante multiplicada por el ángulo de ataque efectivo tenga sentido, de que la capa límite es turbulenta sin desprendimiento apreciable más allá del borde de salida, de que se está en el rango plenamente supersónico con números de Mach mayores que $1,7$ pero sin llegar al rango hipersónico y de que se trabaja con alas y aletas con alargamientos [4] comprendidos entre $0,8$ y 5, las constantes aerodinámicas empleadas en el estudio previo sobre las configuraciones clásica, canard y de ala móvil se pueden aproximar mediante expresiones sencillas.

Los coeficientes que dan la derivada primera de las fuerzas aerodinámicas normales para ángulo nulo toman el valor 2 para un cuerpo cilíndrico y alargado con ojiva en su punta [5] mientras que la

[4] Definido en el tema 3 como el cociente entre la envergadura y la cuerda media.

[5] Se define la ojiva como la parte delantera de un perfil aerodinámico, con simetría de revolución en torno a un eje longitudinal, en la que la distancia desde el perfil hasta el eje de simetría disminuye conforme en el sentido de acercarse hacia la punta del perfil. En un perfil cilíndrico, esa distancia se mantiene constante.

dependencia con el número de Mach dada por $4/\sqrt{\mathrm{Ma}^2-1}$ se puede usar para superficies planas como alas o aletas. Esto significa que se puede sustituir

$$C_{ZC}=2\,;\; C_{ZA}=C_{ZG}=\frac{4}{\sqrt{\mathrm{Ma}^2-1}} \tag{26}$$

en todas las fórmulas previas.

En cuanto a las posiciones de los focos aerodinámicos, se considera primero un cuerpo desnudo de forma ojival en la punta con una longitud total, L, cuya ojiva tiene una longitud, L_o, y se supone, también, que la ojiva es, como mínimo una semiesfera, siendo más habituales formas más apuntadas. En tal caso, la posición del foco aerodinámico del cuerpo desnudo se puede expresar, de acuerdo a Fleeman (2006), como

$$x_{Fc}=\{0,63+[0{,}5(L/L_o)-0,63]\,\mathrm{sen}(\alpha)^2\}L_o \tag{27}$$

donde las distancias se miden con respecto a la punta de la ojiva del misil y se ha conservado la dependencia no lineal en α para el caso en el que la constante $0{,}5(L/L_o)-0,63$ se haga mucho mayor que $0,63$. De todos modos, en este curso se supondrá salvo indicación en contrario que el término no lineal es suprimible y que el foco aerodinámico del cuerpo desnudo está situado a una distancia igual a $0,63$ veces la longitud de la ojiva; midiendo esa distancia desde la punta del misil, a lo largo de su eje longitudinal y hacia su interior.

Para determinar la posición del foco aerodinámico de un superficie plana (alas y aletas), hay que calcular primero su cuerda centroidal, $\bar{c}_c$, que se define mediante la siguiente integral tomada de la referencia Phillips (2010)

$$\bar{c}_c=(2/A)\int_0^{b/2}c(y)y\,dy \tag{28}$$

donde A es el área total del ala, $b/2$ es la mitad de su envergadura y $c(y)$ es el valor de la cuerda del ala en función de su posición en perpendicular al eje longitudinal del misil medida desde el encastre del ala con el cuerpo desnudo, coordenada y. A continuación se busca sobre qué punto de la superficie alar la cuerda, $c(y)$, es igual a la cuerda centroidal previamente calculada. El foco aerodinámico del ala estará sobre dicha cuerda a una distancia del borde de ataque dada por la siguiente expresión tomada de Fleeman (2006)

$$x_{Fa}=\frac{\mathrm{Al}\sqrt{\mathrm{Ma}^2-1}-0{,}667}{2\mathrm{Al}\sqrt{\mathrm{Ma}^2-1}-1}\bar{c}_c \tag{29}$$

donde $\mathrm{Al}=b/c_r=b^2/A$ es el alargamiento del ala definido en el Tema 3 como cociente entre la envergadura y la cuerda media [6] y Ma es el número de Mach. Para números de Mach grandes la expresión anterior tiende asintóticamente a $0,5\bar{c}_c$ y en diseños realistas de misiles en régimen supersónico se obtienen valores comprendidos entre $0,43\bar{c}_c$ y $0,49\bar{c}_c$. Hay que recordar que la ecuación (29) da la posición x_{Fa} del foco aerodinámico del ala, medida desde el borde de ataque del ala en la posición en la que su cuerda coincida con su cuerda centroidal, indicada como una fracción de la propia cuerda centroidal. Para situar ese foco con respecto al misil en conjunto, hay que sumar

[6] Puesto que el área total es el producto de la envergadura por la cuerda media, también se puede expresar como el cociente entre el cuadrado de la envergadura y el área.

la distancia desde la punta del misil hasta el borde de ataque del ala que se corresponda con una cuerda igual a la centroidal.

Una vez determinadas las posiciones de los focos aerodinámicos con respecto a la punta del misil, se necesita conocer como dato la posición del centro de masas del misil con respecto a la misma referencia, x_{CM}, ya que los valores que realmente se necesitan para el cálculo de momentos son las distancias entre el centro de masas y cada uno de los focos aerodinámicos. Nótese que, conforme se consume el combustible, va cambiando la posición del centro de masas.

Un apunte interesante para el caso en el cual interese el cálculo de posiciones de equilibrio, en las que se necesita conocer la parte par del sistema fuerza-par equivalente aplicado en el foco aerodinámico es que, en el régimen supersónico y en primera aproximación (despreciando los términos viscosos pero conservando los debidos a la compresibilidad y suponiendo ángulos de ataque pequeños), se puede demostrar, véase Phillips (2010), que el foco aerodinámico coincide con el centro de presiones para perfiles de ala simétricos (cuerda coincidente con la línea de curvatura media en la nomenclatura del Tema 3). La mayor parte de los misiles tienen, de hecho, alas y aletas simétricas; pero téngase en cuenta que la presencia de alerones es capaz de romper esa simetría. En cuanto al comportamiento del cuerpo desnudo, resulta lo bastante complicado como para necesitar de simulaciones numéricas y ensayos en túnel de viento que tengan en cuenta como los desvíos inducidos por las alas alas afectan a la distribución de presiones sobre el cuerpo; sin embargo, en una primera aproximación experimental tomada de Phillips (2010) se puede suponer que el coeficiente de par de cabeceo es proporcional al valor del ángulo de ataque para el que se tiene un mínimo de la fuerza de arrastre. Bajo esa aproximación experimental tomada de estudios sobre distintos tipos de fuselajes, los misiles con un cuerpo desnudo con simetría de revolución en torno a su eje longitudinal tienen el mínimo de la fuerza de arrastre para ángulo de ataque nulo y, por lo tanto, también se anula su coeficiente de par de cabeceo calculado en el foco aerodinámico. Es decir, el centro de presiones del cuerpo desnudo (punto en el que se anula la parte par del sistema fuerza-par equivalente) coincide con el foco aerodinámico bajo una aproximación que, en realidad, hay que tomar con reservas.

7. Estudio de un misil con desvío de chorro.

Su comportamiento es similar al de un misil con configuración clásica, en tanto en cuanto el misil se desplace en el interior de la atmósfera y sufra fuerzas y momentos de origen aerodinámico sobre sus partes fijas. El cambio principal viene dado porque las aletas de gobierno traseras de la configuración clásica son reemplazadas por un desvío del ángulo de salida del chorro de gases con respecto al eje longitudinal del misil que se corresponde con un desvío igual y de sentido contrario de la fuerza de empuje que pasa a tener una componente perpendicular al eje del misil, aplicada sobre el punto donde está la tobera que, al igual que en la configuración clásica, se corresponde con la parte trasera del misil.

En la figura 6 se puede ver un diagrama de cuerpo libre de un misil con desvío de chorro donde se han incluido unas alas con trazo discontinuo para indicar que pueden tanto estar presentes como no estarlo según cuáles sean las necesidades de sustentación que presente el misil. Analizando el comportamiento de estos misiles con respecto a las tipologías previas, algunas conclusiones son:

1) El comportamiento de sus partes fijas se debe a la interacción aerodinámica con un ángulo de ataque efectivo α.

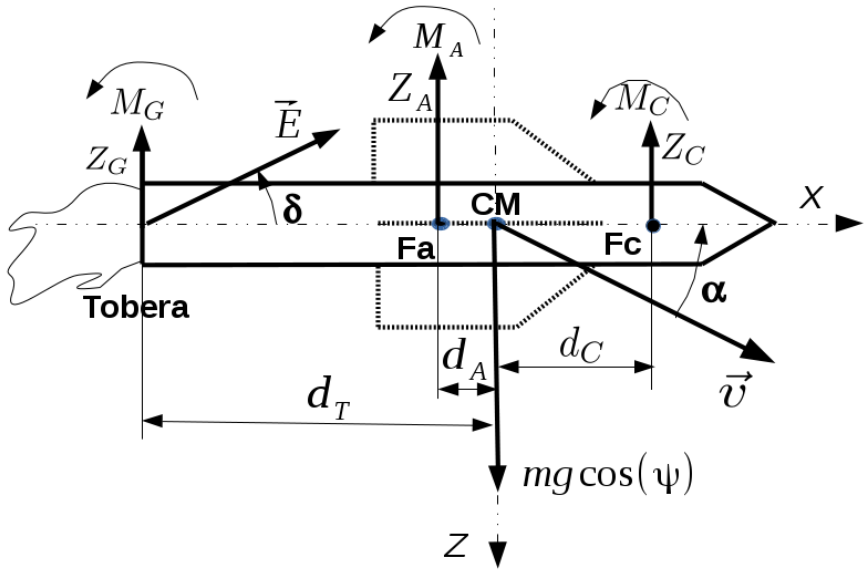


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre de un misil con desvío de chorro para el estudio de su comportamiento dinámico. Criterio de signos: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo, Y positivo hacia fuera del plano de trabajo, giros antihorarios sobre el plano positivos. La fuerza de gobierno, Z_G es $-E\,\mathrm{sen}(\delta)$, dado el criterio de signos previo.

2) La deflexión del chorro externo en un ala delantera apenas afecta al chorro de los gases de escape que salen por la tobera. Hay algo de efecto pero es mucho menor que el que se tiene con gobierno aerodinámico.

3) De acuerdo a las dos observaciones previas se calculan los valores de z_α y m_α sumando las contribuciones de las células aerodinámicas fijas que haya. Normalmente cuerpo desnudo y ala fija; pudiendo estar ausente ésta última.

4) Surge una fuerza de gobierno $Z_G = -E\,\mathrm{sen}\,\delta$ actuando sobre la posición de la tobera de salida que para ángulos de desvío del chorro pequeños se puede aproximar como $Z_G = -E\delta$ y el torque que ejerce por $-d_T E\delta$ donde d_T es la distancia entre el centro de masas y la tobera. No hay factor de eficacia $k \approx 0,7$ actuando sobre el ángulo de gobierno. Los valores de z_δ y m_δ quedan
$$z_\delta = \frac{E}{mu}\,;\; m_\delta = \frac{d_T E}{I_\perp} \tag{30}$$

5) Puede haber dependencias con q y $\dot{\alpha}$ caracterizadas a través de los correspondientes coeficientes m_q y $m_{\dot{\alpha}}$ cuando éstos sean datos.

8. Estudio de un misil con toberas laterales.

Su comportamiento es similar al de un misil con ala móvil ya que surge una fuerza de gobierno importante en una posición próxima al centro de masas; es decir con un gobierno que es, sobre todo, de tipo PIF. El cambio principal viene dado porque las alas móviles son reemplazadas por toberas laterales próximas al centro de masas [7] cuyos chorros de salida forman un ángulo fijo θ con respecto

[7] Idealmente, con la misma coordenada axial.

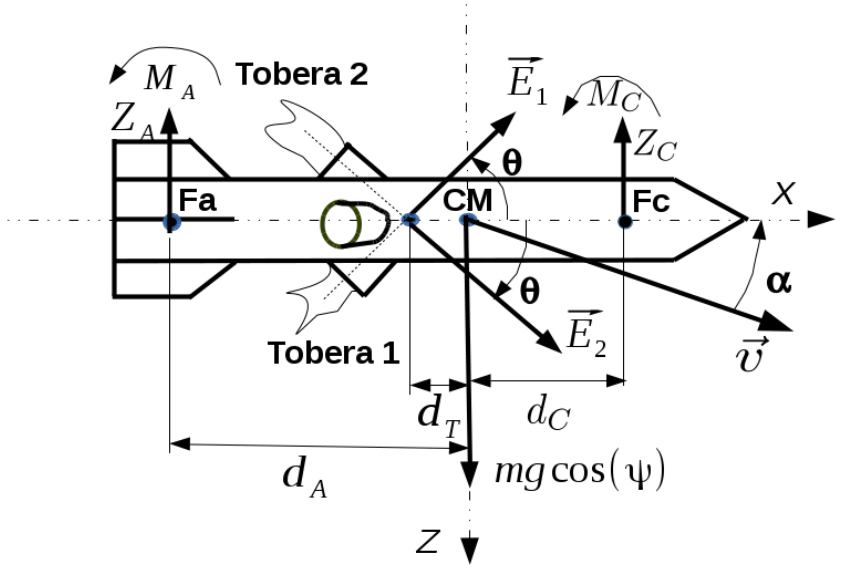


Figura 7: Diagrama de cuerpo libre de un misil con toberas laterales caladas a un ángulo fijo θ y situadas cerca de su centro de masas. Criterio de signos: X positivo hacia la derecha, Z positivo hacia abajo, Y positivo hacia fuera del plano de trabajo, giros antihorarios sobre el plano positivos. Las toberas con penacho dibujado, "Tobera 1" y "Tobera 2", controlan el cabeceo. El óvalo próximo al CM sobre el eje axial representa una tobera responsable de controlar la guiñada; habría otra, no representada, por el otro lado.

al eje longitudinal del misil. El gobierno se consigue regulando que fracción del chorro lateral total se desvía por cada tobera.

En la figura 7 se puede ver un diagrama de cuerpo libre de un misil con toberas laterales en el que se han incluido aletas traseras fijas con misión estabilizadora. Por comparación con las tipologías previas, las conclusiones más relevantes son:

1) Sus coeficientes z_α y m_α se deben, al igual que en el caso por desvío de chorro, al efecto de las fuerzas aerodinámicas sobre las partes fijas del misil. La presencia de chorros laterales saliendo de la zona central del misil sí que produce deflexiones significativas sobre los chorros finalmente incidentes sobre las aletas estabilizadoras. Se trata de un efecto que habría que calcular mediante simulaciones numéricas y medidas experimentales en túnel de viento, ya que presenta una clara dependencia tridimensional que hace que el desvío inducido sobre la parte trasera no resulte homogéneo sobre toda la aleta. Es un efecto difícil de calcular que no se tendrá en cuenta en este curso.

2) Surge una fuerza de gobierno $Z_G = (E_2 - E_1)\,\mathrm{sen}(\theta)$ que se controla a través de un parámetro de control δ que ya no es un ángulo en radianes sino una variable que oscila entre -1 y $+1$ e indica qué fracción del chorro total responsable del control del cabeceo se desvía por cada tobera lateral de acuerdo a $E_1 = E(1+\delta)/2$ y $E_2 = E(1-\delta)/2$. En las expresiones previas, E_1 y E_2 son los módulos del empuje por cada tobera lateral y E es el empuje total proporcionado por las toberas laterales, dado por $E_1 + E_2$. Así que la fuerza de gobierno se expresa en función del nuevo parámetro de control como $Z_G = -E\,\mathrm{sen}(\theta)\delta$ y el torque que induce mediante $-d_T E\,\mathrm{sen}(\theta)\delta$. Los valores de z_δ y m_δ quedan, con el convenio de signos de

la figura 7

$$z_\delta = \frac{E\,\mathrm{sen}(\theta)}{mu}\ ;\ m_\delta = \frac{d_T E\,\mathrm{sen}(\theta)}{I_\perp} \tag{31}$$

3) Puede haber dependencias con q y $\dot{\alpha}$ caracterizadas a través de los correspondientes coeficientes m_q y $m_{\dot{\alpha}}$ cuando éstos sean datos.

4) Al comparar los coeficientes de gobierno z_δ y m_δ obtenidos con esta configuración con los obtenidos con otras, hay que tener en cuenta que el parámetro de control, δ, tiene un rango de valores posibles, entre -1 y $+1$, mucho mayor que el que se tiene cuando δ se corresponde con un ángulo de gobierno pequeño en radianes. Eso significa que se pueden conseguir fuerzas de gobierno, pilotado PIF, intensas. Asimismo, interesa que d_T sea próximo a 0 para conseguir $m_\delta \to 0$; aun cuando esto sólo sea posible de forma exacta para un instante de tiempo, ya que la posición del CM cambia con el consumo de combustible.

9. Funciones de transferencia. Respuesta natural.

El estudio de todos los casos previos, se reduce al del siguiente sistema de dos ecuaciones, suponiendo que hay un $m_{\dot{\alpha}}$ no nulo

$$\begin{aligned} -z_\alpha\alpha - z_\delta\delta &= \dot{\alpha} - q \\ -m_\alpha\alpha - m_\delta\delta - m_q q - m_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} &= \dot{q} \end{aligned} \tag{32}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales con tres grados de libertad; por lo que, como mucho, se pueden obtener variables relativas como solución: se toma una de las tres como referencia y la razón entre cada una de las otras dos y la tomada como referencia sí que es despejable.

Resulta más cómodo trabajar en el espacio de Laplace, ya que al hacer la transformada de Laplace, las derivadas temporales con respecto a t de una función del tiempo se convierten en productos por el parámetro de Laplace, s, de la transformada de Laplace de la función original. Las razones entre las transformadas de Laplace de las variables originales del sistema estudiado se llaman funciones de transferencia. Al hacer la transformada de Laplace, el sistema de ecuaciones dado por (32) queda como un sistema de ecuaciones polinómicas en s

$$\begin{aligned} q &= (s + z_\alpha)\alpha + z_\delta\delta \\ (s + m_q)q &= -(m_\alpha + m_{\dot{\alpha}}s)\alpha - m_\delta\delta \end{aligned} \tag{33}$$

Multiplicando la primera ecuación por $s + m_q$ a izquierda y derecha, igualando los términos a la derecha de ambas ecuaciones y agrupando por un lado la dependencia con α y por otro lado con δ, se llega a la función de transferencia de α frente a δ que indica como evoluciona el ángulo de ataque, α, frente a una perturbación en la variable de gobierno, δ.

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{-(m_q z_\delta + m_\delta) - z_\delta s}{(m_\alpha + m_q z_\alpha) + (m_q + m_{\dot{\alpha}} + z_\alpha)s + s^2} = K_\alpha \frac{1 + \frac{z_\delta}{m_q z_\delta + m_\delta}s}{1 + 2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \tag{34}$$

donde K_α es la ganancia del ángulo de ataque frente a variaciones en el ángulo de gobierno y su valor es

$$K_\alpha = -\frac{m_q z_\delta + m_\delta}{\omega_n^2}$$

La constante que multiplica a s en el numerador se llama retraso del ángulo de ataque En cuanto a ζ_n es la constante de amortiguamiento natural del sistema y su valor es

$$\zeta_n = \frac{m_q + m_{\dot{\alpha}} + z_\alpha}{2\omega_n} \tag{35}$$

Por su parte, ω_n es la frecuencia de oscilación natural del sistema y su valor es

$$\omega_n = \sqrt{m_\alpha + m_q z_\alpha} \tag{36}$$

La función de transferencia q/δ se calcula de modo similar, sólo que ahora hay multiplicar la primera de las dos ecuaciones del sistema (33) por $(m_\alpha + m_{\dot{\alpha}} s)$, la segunda por $(z_\alpha + s)$ y sumarlas para eliminar la dependencia en α

$$\frac{q}{\delta} = K_q \frac{1 + \tau_n s}{1 + 2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \tag{37}$$

donde la ganancia viene dada por

$$K_q = \frac{m_\alpha z_\delta - m_\delta z_\alpha}{\omega_n^2}$$

y el retraso natural, τ_n, viene dado por

$$\tau_n = \frac{m_{\dot{\alpha}} z_\delta - m_\delta}{m_\alpha z_\delta - m_\delta z_\alpha} = \frac{m_{\dot{\alpha}} z_\delta - m_\delta}{K_q \omega_n^2}$$

Si se estudia la aceleración realmente ejecutada por el misil, bajo las aproximaciones usadas en este capítulo, se puede partir de la relación cinemática $a_{ej} = \dot{\gamma} v$ típica de la derivada temporal de un vector de módulo v constante que está rotando con velocidad angular $\dot{\gamma}$. Pero $\gamma = \psi - \alpha$; por lo que $\dot{\gamma} = \dot{\psi} - \dot{\alpha}$ con $\dot{\psi} = q$. De aquí se puede despejar la función de transferencia de la aceleración ejecutada frente a un giro en el ángulo de gobierno.

$$\frac{a_{ej}}{\delta} = v\Big(\frac{q}{\delta} - \frac{s\alpha}{\delta}\Big) = K_a \frac{1 + as + bs^2}{1 + 2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} = K_a \frac{1 + as + bs^2}{1 + 2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \tag{38}$$

donde la ganancia de la aceleración ejecutada frente a la variación en el ángulo de gobierno viene dada por

$$K_a = v \frac{m_\alpha z_\delta - m_\delta z_\alpha}{\omega_n^2} = v K_q$$

y las constantes a y b por

$$a = \frac{(m_{\dot{\alpha}} + m_q) z_\delta}{m_\alpha z_\delta - m_\delta z_\alpha} = \frac{(m_{\dot{\alpha}} + m_q) z_\delta}{k_q \omega_n^2}$$
$$b = \frac{z_\delta}{m_\alpha z_\delta - m_\delta z_\alpha} = \frac{z_\delta}{k_q \omega_n^2}$$

También resulta especialmente interesante la función de transferencia de la aceleración ejecutada frente a la ordenada. Idealmente debería valer uno; aunque en la práctica no ocurre así, surgen oscilaciones transitorias en la respuesta que se superponen a la ganancia unidad deseada para este par de variables

$$\frac{a_{ej}}{a_{co}} = \frac{1 + as + bs^2}{1 + 2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \tag{39}$$

Puesto que a_{ej}/a_{co} se puede expresar como

$$\frac{a_{ej}}{\delta}\frac{\delta}{a_{co}}$$

y a_{ej}/δ tiene una ganancia $K_q v$, se necesita que la variación del ángulo de gobierno, δ, venga dada por una ganancia $K = 1/(K_q v)$ con respecto a la aceleración ordenada. Dicho de otro modo, el elaborador de órdenes multiplica la aceleración que debería experimentar la trayectoria del misil por una ganancia $K = 1/(K_q v)$ para obtener cuánto debe girar el ángulo de timonería; se trataría de un ajuste final que hay que efectuar siempre y que depende de la velocidad del misil. Por su parte, el intérprete de órdenes, funcionando en régimen natural sin realimentación, convierte ese valor numérico de giro de la timonería en un pulso dirigido a los servomotores que la accionan.

9.1. Sentido físico de las funciones de transferencia.

Las funciones de transferencia ya se estudiaron en la asignatura del grado "Sistemas automáticos y de control". En este apartado se mencionan alguna de sus características relevantes para el caso de un misil.

1) El comportamiento asintótico para tiempos largos del cociente entre las dos variables cuya función de transferencia se analiza, su régimen permanente, viene dado por el límite cuando $s \to 0$ de la función de transferencia.

   Las funciones de transferencia del párrafo previo se desarrollaron como una ganancia multiplicada por el cociente de dos polinomios de, como mucho, segundo grado en s tales que sus términos constantes valiesen la unidad. Esa forma de escribir las funciones de transferencia pudo parecer un poco rebuscada en su momento; pero ahora se ve más clara la razón: la ganancia da el régimen permanente.

2) En el denominador se tiene un polinomio de segundo grado en s cuyos ceros se llaman los polos de la función de transferencia. El denominador controla como será la forma del régimen transitorio, la respuesta para tiempos cortos antes de que se haya alcanzado un régimen permanente.

   Para el caso de misiles, la respuesta natural debida a las fuerzas y momentos aerodinámicos que aparecen se caracteriza por un denominador de la forma $1+2\zeta_n s/\omega_n + s^2/\omega_n^2$ con dos polos complejos conjugados: $-\omega_n\zeta_n + i\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$ y $-\omega_n\zeta_n - i\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$, donde se ha supuesto que $\zeta_n < 1$.

   Si la aceleración ordenada se elaborase sin retrasos de ninguna clase, su comportamiento es el de una función escalón que pasa de valer 0 a tener el valor ordenado, a_{co}, de forma instantánea y se mantiene en dicho valor ordenado indefinidamente (hasta que se elabore una nueva orden distinta). Si además se supone que el numerador vale la unidad, la respuesta de la aceleración ejecutada viene dada por la función:

   $$a_{ej}(t) = a_{co}\Big\{1 - \exp(-\omega_n\zeta_n t)\big[\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}t) + (\zeta_n/\sqrt{1-\zeta_n^2})\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}t)\big]\Big\} \quad (40)$$

   que se puede describir como la superposición de un régimen permanente igual al ordenado más un régimen transitorio caracterizado por oscilaciones de frecuencia $\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$ que se amortiguan con una constante característica $\omega_n\zeta_n$.

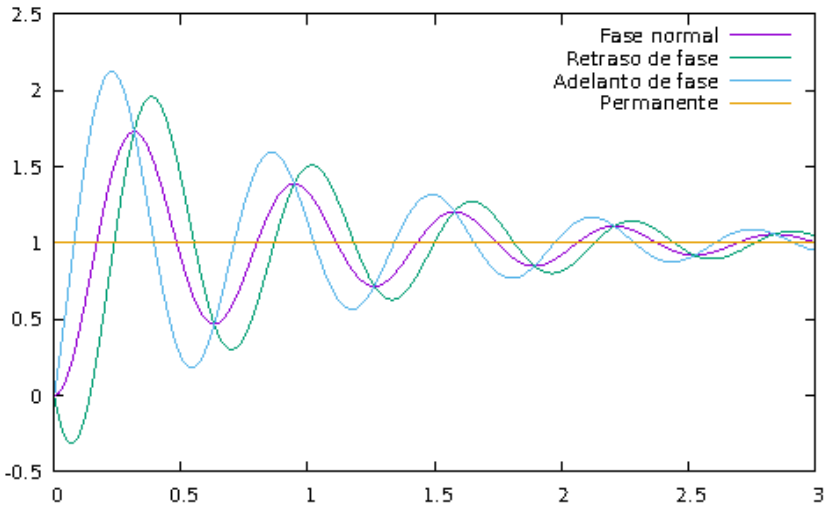


Figura 8: Respuesta natural con fase normal, $a = 0$ y $b = 0$, comparada con una respuesta con fase retrasada, $a < 0$ y $b = 0$, una respuesta con fase adelantada, $a > 0$ y $b = 0$, y la respuesta permanente, $t \to \infty$. Se supone que la excitación de entrada es del tipo función escalón.

3) En el numerador se tiene un polinomio que, a lo sumo, es de segundo orden en s. Sus ceros se llaman ceros de la función de transferencia.

   Cuando se estudia la respuesta del sistema frente a una orden del tipo función escalón, el efecto del numerador modifica las condiciones iniciales de la solución con respecto a la dada por la ecuación (40) pero no afecta a su comportamiento como la superposición de una respuesta igual a la ordenada más un transitorio que se amortigua con las mismas frecuencias y constantes de amortiguamiento que aparecían en la función (40).

   En concreto, la función (40) correspondía al caso en el que el numerador $1 + as + bs^2$ es igual a la unidad, $a = b = 0$. Con respecto a esa respuesta normal, se puede tener adelanto de fase (overshooting en inglés) cuando $a > 0$ y $b > 0$ y retraso de fase (undershooting en inglés) cuando $a < 0$ y $b < 0$. En la figura 8 se puede ver una representación gráfica del efecto del adelanto y del retraso de fase con respecto a una solución en la que $\omega_n = 10\text{s}^{-1}$, $\zeta_n = 0,1$ y $b = 0$; un valor no nulo de b modificaría el valor inicial de la respuesta en $t = 0$. Si en lugar de excitar con una función escalón, se excita, como suele ser más frecuente en la práctica, con una función trapezoidal (el cambio entre distintos valores de entrada no es brusco sino que sigue una rampa de pendiente finita) o con una función del tipo de trapecio con esquinas suavizadas (el cambio entre distintos valores de entrada sigue una curva suave que cerca de las esquinas del trapecio equivalente se aproximan por una curva parabólica), los parámetros a y b siguen regulando las condiciones iniciales de la respuesta en rapidez de cambio de la aceleración (frente a una rampa) o de la rapidez de la rapidez [8] (frente a una excitación que crezca parabólicamente).

   El estudio de los ceros también sirve para analizar las señales que no producen respuesta en el sistema. En efecto, si en vez de considerar una aceleración ordenada del tipo función escalón,

[8] La rapidez es la derivada primera con respecto al tiempo y la rapidez de la rapidez la derivada segunda. En este caso, se podría hablar de "velocidad de la aceleración" y "aceleración de la aceleración".

se considera una aceleración ordenada del tipo función periódica, interesa que la aceleración ejecutada sea lo más parecida posible a la ordenada, siguiendo su periodicidad. Ahora bien, si la frecuencia de la excitación se corresponde con un cero de la función de transferencia, el sistema no responderá. Esto se entiende mejor, pasando las funciones de transferencia al espacio ordinario como ecuaciones diferenciales:

$$a_{ej} + 2\frac{\zeta}{\omega}\dot{a}_{ej} + \frac{\ddot{a}_{ej}}{\omega^2} = a_{co} + a\dot{a}_{co} + b\ddot{a}_{co}$$

donde los ceros de la función de transferencia se corresponden con soluciones de la ecuación homogénea $a_{co} + a\dot{a}_{co} + b\ddot{a}_{co} = 0$ y, por lo tanto, una aceleración ordenada que consista en una señal igual a una solución de dicha ecuación homogénea es equivalente a una excitación nula (ausencia de orden) con respecto a la ecuación diferencial de la aceleración ejecutada.

10. Estabilidad.

Partiendo de una situación en la que una aeronave esté equilibrada, con sumatorio de fuerzas y de momentos que sean nulos, el estudio de la estabilidad es el estudio de su respuesta frente a un perturbación que modifique ligeramente su ángulo de ataque.

10.1. Estabilidad estática.

En el estudio de la estabilidad estática, se aplica una pequeña perturbación constante y se examina la respuesta. Si como consecuencia de la respuesta, se tiende a disminuir la perturbación aplicada, incluso en el caso de que no se anule por completo, se dice que el sistema tiene estabilidad estática. Si, por el contrario, la respuesta del sistema tiende a aumentar la perturbación aplicada, el sistema es estáticamente inestable. Si la respuesta del sistema no afecta a la perturbación aplicada se dice que es estáticamente neutro. Se puede considerar el símil de una pelota que se desplaza desde una posición de equilibrio: en la cima de una montaña el equilibrio es inestable y una vez perturbada sigue alejándose de la cima, en el fondo de un valle el equilibrio es estable y una vez perturbada tiene a retornar hacia el fondo del valle, en una superficie plana el equilibrio es neutro y la pelota se queda en su nueva posición.

La condición primordial para que exista estabilidad estática es que la posición del foco aerodinámico quede por detrás del centro de masas de la aeronave. Como criterio para definir qué se entiende por “detrás” y “delante” se considera una orientación positiva (hacia adelante) en el sentido de avance de la aeronave, indicado mediante la proyección del vector velocidad sobre su eje axial. Véanse las figuras 12, 13 y 14 del tema 4 del manual ACART-VA-011 (2009). Si las fuerzas aerodinámicas se reemplazan por un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el foco aerodinámico, en situación de equilibrio, los torques de las fuerzas aplicadas en el foco con respecto al centro de masas se compensan con el par equivalente. En el estudio de la estabilidad, una perturbación que afecte al ángulo de ataque no modificará la parte par del sistema equivalente calculado en el foco; mientras que la parte fuerza del sistema equivalente sí que cambiará. Descomponiendo las nuevas fuerzas como contribución de equilibrio más perturbación; el torque debido a la contribución de equilibrio se seguirá compensando con el par de equilibrio y el estudio de la estabilidad se podrá reducir al del efecto causado por el torque de la modificación inducida en la parte fuerza del sistema fuerza-par equivalente.

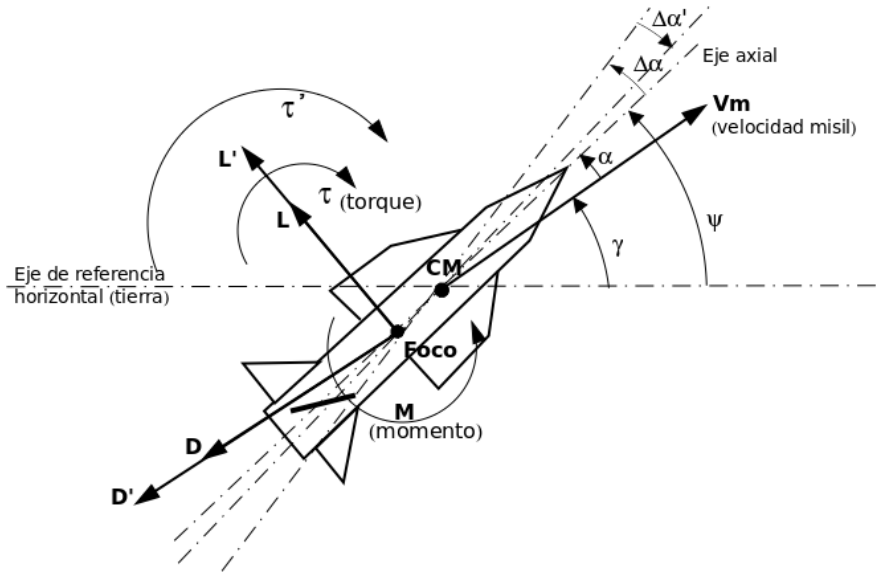


Figura 9: Misil estáticamente estable.

En la figura 9 se encuentra un esquema simplificado de un misil en equilibrio estable estático. En la situación de equilibrio sin perturbar, el sumatorio de fuerzas incluyendo el peso y el empuje, que no se han representado en la figura 9 para no sobrecargarla, se anularía. Por su parte, el par aerodinámico, $\vec{M}$, calculado en el foco se compensa con el torque, con respecto al centro de masas, de las fuerzas aerodinámicas, $\vec{\tau}$. Como resultado, se tiene un ángulo de ataque, α, de equilibrio. Si sobre esa situación se aplica un incremento positivo, $\Delta\alpha$, al ángulo de ataque, el par aerodinámico calculado en el foco no cambia; sin embargo, las fuerzas aerodinámicas se incrementan, $\vec{L} \to \vec{L}'$ y $\vec{D} \to \vec{D}'$. Por lo tanto, su torque con respecto al centro de masas se ve modificado, $\vec{\tau} \to \vec{\tau}'$, donde la diferencia entre el nuevo torque y el de equilibrio (que se compensaba con el par aerodinámico) induce un giro, $\Delta\alpha'$, con sentido opuesto al de la perturbación inicial en el ángulo de ataque, el equilibrio es estable.

En la situación neutra, el foco aerodinámico, el centro de presiones y el centro de masas son el mismo punto. En tal caso el equilibrio se reduce a un balance de fuerzas ya que todos los torques y pares con respecto al centro de masas se anulan. Una perturbación en el valor del ángulo de ataque induce cambios en los valores de las fuerzas aerodinámicas; pero no en su torque con respecto al centro de masas que sigue siendo nulo por estar allí aplicadas.

En la figura 10 se encuentra un esquema simplificado de un misil en equilibrio inestable estático. De modo similar al análisis efectuado para un equilibrio estáticamente estable, se parte de una situación de equilibrio en la que se anula el sumatorio de fuerzas y el sumatorio de torques se compensa con el par aerodinámico calculado sobre el foco aerodinámico global; como resultado, se tiene un ángulo de ataque, α, de equilibrio. Si sobre esa situación se aplica una perturbación, $\Delta\alpha$ en el valor del ángulo de ataque, el par aerodinámico calculado en el foco no cambia; sin embargo, las fuerzas aerodinámicas se incrementan, $\vec{L} \to \vec{L}'$ y $\vec{D} \to \vec{D}'$. Por lo tanto, su torque con respecto al centro de masas también cambia, $\vec{\tau} \to \vec{\tau}'$, ahora la diferencia entre el torque nuevo y el de equilibrio induce un giro, $\Delta\alpha'$, con el mismo sentido que la perturbación inicial que se ve incrementada, el equilibrio es inestable.

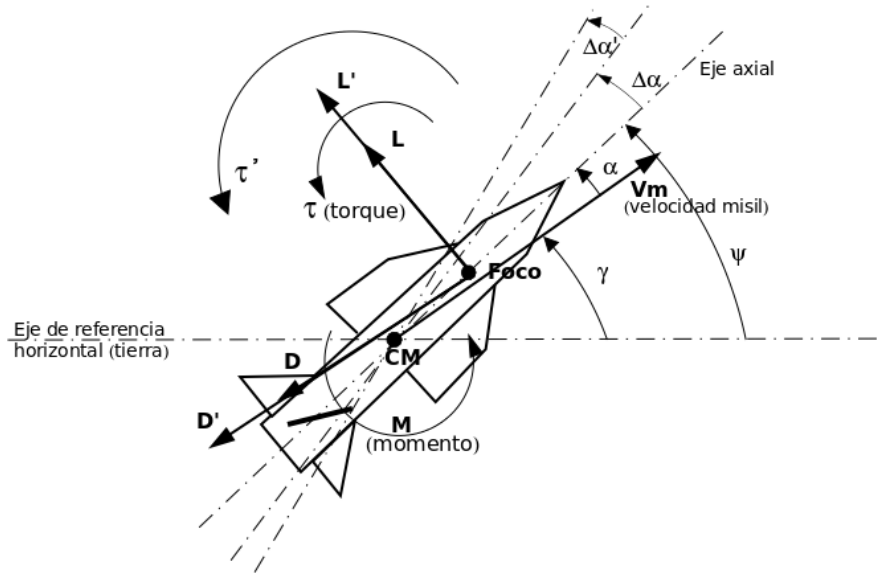


Figura 10: Misil estáticamente inestable.

La diferencia entre la posición del centro de masas y la del foco aerodinámico global se llama margen estático, con sentido positivo para situaciones estables en las que el foco está detrás del centro de masas.

10.2. Estabilidad dinámica.

La estabilidad dinámica se estudia para aeronaves que sean estáticamente estables. Consiste en determinar cómo se comporta la aeronave frente a una perturbación periódica en el tiempo que, perfectamente, podría corresponder a la respuesta de la aeronave frente a una orden recibida. Si la amplitud de las oscilaciones tiende a amortiguarse, se dice que la aeronave es dinámicamente estable. Si la amplitud tiende a aumentar, se dice que la aeronave es dinámicamente inestable. Si la amplitud no se ve afectada, la aeronave es dinámicamente neutra. En la figura 16 del tema 4 del manual ACART-VA-011 (2009) el caso a) es dinámicamente estable, el caso b) neutro y el caso c) inestable.

Al estudiar la función de transferencia como una función de la variable compleja s, la estabilidad dinámica está asociada a los valores para los cuales se anula el denominador de la función, sus polos. Si la parte real de todos los polos es negativa, el sistema es dinámicamente estable. Si aparece un polo sin parte real, el sistema es neutro para frecuencias próximas al valor de la parte imaginaria de ese polo. Si aparece un polo con parte real positiva, el sistema es dinámicamente inestable para frecuencias próximas al valor de la parte imaginaria de ese polo.

En efecto, operando con $a_{n,ej}/a_{n,co}$, y suponiendo un denominador de segundo grado, se tiene que

$$\frac{a_{n,ej}}{a_{n,co}} = \frac{1 + as + bs^2}{1 + 2\zeta s/\omega + s^2/\omega^2}$$

que en el espacio ordinario, tras deshacer la transformada de Laplace, se convierte en la siguiente ecuación diferencial

$$a_{n,ej} + 2\frac{\zeta}{\omega}\dot{a}_{n,ej} + \frac{\ddot{a}_{n,ej}}{\omega^2} = a_{n,co} + a\dot{a}_{n,co} + b\ddot{a}_{n,co}$$

Un polo se corresponde con una solución de la ecuación homogénea

$$a_{n,ej} + 2\frac{\zeta}{\omega}\dot{a}_{n,ej} + \frac{\ddot{a}_{n,ej}}{\omega^2} = 0$$

que, multiplicada por una constante, se suma a la solución particular según cuales sean las condiciones iniciales del problema, reflejo de la perturbación inicialmente suministrada. La forma de esa solución homogénea es la de una función exponencial

$$\exp(st) = \exp((s_{real} + is_{imaginaria})t)$$

Las exponenciales de una constante compleja multiplicada por el tiempo se corresponden, en el espacio real, con una combinación de funciones sinusoidales en el tiempo de frecuencia dada por la parte imaginaria de la constante, multiplicadas por la exponencial de la parte real multiplicada por el tiempo. Se comprende ahora que, si la parte real es positiva, su exponencial crecerá sin control y lo mismo ocurrirá con la amplitud de la oscilación. Mientras que, si la parte real es negativa, la amplitud de la oscilación se reduce. Con parte real nula, se tiene una oscilación constante que ni se incrementa, ni se amortigua.

Si se repasa la ecuación (40) se puede ver que habrá problemas con la respuesta natural del misil si el amortiguamiento, ζ_n, se aproxima a 1 o si la frecuencia natural se vuelve imaginaria, situación que de acuerdo a la definición (36) se puede dar si $m_\alpha < 0$. La respuesta natural de cualquier aeronave se caracteriza por amortiguamientos pequeños, de hecho el sistema de control funciona con realimentación para incrementar su valor, por lo que ζ_n no suele suponer ningún problema. En cambio, según como se diseñe la aeronave, se podría producir alguna situación en la m_α se haga negativo; pero, en ese caso, la inestabilidad resulta ser tanto estática como dinámica y es una configuración a evitar salvo que se tenga un sistema de control muy preciso. En efecto, recuérdese que la ecuación de momentos quedaría $-m_\alpha\alpha = \dot{q}$ si se supone que $\delta = q = \dot{\alpha} = 0$; un signo negativo de m_α con una perturbación positiva en α implicaría un término positivo a la izquierda de la ecuación y la respuesta del sistema sería producir una velocidad angular de cabeceo con el mismo sentido que la perturbación aplicada.

La posibilidad de que surjan configuraciones estáticamente estables que, sin embargo, sean dinámicamente inestables surge al incluir en el estudio tanto una timonería realista como el efecto de un bucle de control cerrado con realimentación. Hasta ahora se ha supuesto que la timonería es perfecta y que actúa sin retardos; sin embargo, en realidad, también opera a través de una función de transferencia que se multiplica por la transferencia aerodinámica. Hasta aquí, no habría ningún problema: si cada función de transferencia es estable, su producto lo seguirá siendo ya que no cambian los polos. El posible problema surge cuando se añade un bucle de realimentación que modifica el denominador de la función de transferencia global, en cuyo caso realimentaciones muy intensas pueden acabar haciendo que surjan polos con parte real positiva.

11. Maniobrabilidad.

Es la capacidad de una aeronave para generar aceleración normal a su trayectoria. Se trata de una propiedad opuesta a la estabilidad, ya que toda maniobra se puede considerar como una acción de la timonería que perturba la posición previa de la aeronave, la estabilidad tiende a oponerse a esa perturbación.

Sobre la aceleración tangencial, habitualmente, se tiene poco control ya que viene dada por el balance global de fuerzas según el eje axial donde la fuerza de empuje no suele ser controlable en un misil, ya que ésta se regula para optimizar algún parámetro relativo al vuelo (alcance, velocidad máxima, ...) y modificarla mediante una regulación del motor supone alejarse de esa configuración. Además, en el caso de que se emplee combustible sólido, no es posible regular sobre la marcha la velocidad de combustión sino que está viene dada por la forma del grano de combustible.

En cambio, la aceleración normal, que viene dada por $\dot{\gamma}V$ en módulo, permite curvar la trayectoria y modificar el rumbo. En la expresión previa $\dot{\gamma}$ es la velocidad angular de la pendiente, del ángulo que forma el vector velocidad con una referencia inercial en tierra, y V es el módulo de la velocidad lineal. $\dot{\gamma}V$, apuntando en dirección normal a la trayectoria.

Se puede estudiar la maniobrabilidad en régimen permanente, una vez que las fluctuaciones se hayan amortiguado, como la ganancia de la aceleración normal ejecutada frente al ángulo girado por la timonería: $a_{n,ej}/\delta$ evaluado en $s = 0$, ya que, al pasar al espacio de Laplace, los tiempos tendiendo a infinito (con oscilaciones amortiguadas) se corresponden con el límite de la función de transferencia para $s \to 0$. Se ha supuesto en este análisis que el ángulo de gobierno, δ, actúa mediante una función escalón de transformada de Laplace δ/s; tras pasarla al otro lado se aplica el teorema del valor final: $\lim_{t\to\infty} a_{n,ej} = \lim_{s\to 0} sF(s)(\delta/s) = \lim_{s\to 0} F(s)$, donde $F(s)$ es la función de transferencia.

También se puede estudiar la maniobrabilidad en régimen transitorio, ¿cuánto tardan en amortiguarse las oscilaciones con respecto al valor permanente? En este caso es más útil estudiar el transitorio de la función de transferencia entre la aceleración normal ejecutada y la ordenada, $a_{n,ej}/a_{n,co}$, porque de modo inmediato se aprecia el error de ejecución de la orden: idealmente, las órdenes ejecutadas deberían coincidir con las ordenadas sin retardos ni oscilaciones de ninguna clase. Los transitorios se manifiestan en lo que tarda $a_{n,ej}/a_{n,co}$ en ser aproximable por la unidad.

12. Estudio de las prestaciones naturales de algunas configuraciones aerodinámicas típicas.

En esta sección, se hará uso de las funciones de transferencia y las constantes definidas en la sección 9 para aplicarlas al estudio de las prestaciones de las principales configuraciones aerodinámicas de misiles. En particular, las funciones de transferencia de la aceleración normal ejecutada frente al ángulo de gobierno, fórmula (38), y de la aceleración normal ejecutada frente a la ordenada, fórmula (39), así como de las definiciones de las constantes que aparecen en dichas fórmulas.

En el análisis de casos que viene a continuación, recuérdese que los coeficientes z multiplicados por ángulos dan las fuerzas divididas por el momento lineal, mu; mientras que los coeficientes m multiplicados por los ángulos dan los torques divididos por el momento de inercia en torno al eje de maniobra (en el modelo bidimensional considerado, el de cabeceo, $I_\perp$).

12.1. Misil con configuración clásica.

En esta configuración, la presencia de unas alas de superficie mucho mayor que la timonería trasera significa que la fuerza debida a los elementos fijos del misil es mucho mayor que la debida a la célula aerodinámica de gobierno: $z_\alpha > z_\delta$. Por otro lado, el brazo con el que actúa la fuerza de

gobierno es mucho mayor que el de la fuerza actuante sobre los elementos fijos, esto significa que los respectivos momentos pueden ser del mismo orden: $m_\alpha \approx m_\delta$.

Con estas condiciones, $\tau_n > 0$, $a < 0$ y $b < 0$. La respuesta natural del misil presentará retardo de fase (undershooting).

Ventajas.

1) Gobierno independiente en cabecero y guiñada.

2) Control de balanceo por deflexión diferencial.

3) La deflexión inducida por las alas provoca que el ángulo de ataque efectivo sea menor en los timones traseros. Puede ocurrir que la aeronave entre en pérdidas debido a un ángulo de ataque elevado sobre las alas; pero que todavía conserve capacidad de gobierno en los timones ya que éstos todavía no han entrado en pérdidas. La maniobra para salir de la zona de pérdidas es mucho más sencilla en este caso.

4) No se necesitan timones grandes ya que, al actuar con brazo de palanca grande, fuerzas aerodinámicas pequeñas dan lugar a momentos grandes.

Inconvenientes.

1) Opera con retraso de fase, lo que penaliza su tiempo mínimo de respuesta dinámica.

2) Mala estabilidad transónica.

3) Arquitectura compleja ya que los servomotores que controlan la timonería se encuentran en la misma zona donde está la tobera de salida. Se necesita aislarlos térmicamente.

12.2. Misil con configuración canard.

Opera con timonería y aletas estabilizadoras de pequeña área que, por lo tanto, producen fuerzas aerodinámicas pequeñas. Además, la perturbación inducida sobre el flujo de aire por la timonería da lugar a la aparición de fuerzas de sentido contrario a las de gobierno sobre las aletas.

Lo anterior se traduce en que la aproximación $z_\delta = 0$ tiene sentido en esta configuración. Por lo tanto, $a = b = 0$ y no opera con retardo de fase. Por otra parte, la aparición de fuerzas de sentido contrario sobre las aletas, favorece el gobierno en cabeceo y guiñada pero dificulta el gobierno en balanceo por deflexión diferencial. En efecto, un par de balanceo sobre la timonería, induce otro par de balanceo de sentido opuesto y valor muy similar sobre las aletas estabilizadoras.

Ventajas.

1) Respuesta dinámica rápida, sin retraso de fase.

2) Buena estabilidad transónica.

3) Arquitectura sencilla ya que los servomotores que controlan la timonería se encuentran en la zona delantera del misil, sin tantos problemas de espacio como en la zona de la tobera de salida.

Inconvenientes.

1) La timonería puede entrar en pérdidas antes que el fuselaje del misil, lo que dificulta la recuperación del gobierno.

2) El balanceo es difícil de controlar.

3) Poco aprovechamiento de la sustentación de las aletas.

4) Arrastre aerodinámico mayor ya que los timones delanteros rompen el perfil aerodinámico del misil.

5) En comparación con la configuración clásica, los servomotores tienen que suministrar mayor par de fuerzas para lograr un mismo efecto. Esto se debe a que la resistencia aerodinámica que deben vencer es mayor en la zona delantera del misil que en la trasera.

12.3. Misil sin alas y gobierno trasero.

Es una variante de la configuración clásica en la que se han suprimido las alas, por lo que también desaparecen los efectos debidos al desvío de chorro. En este caso, tanto z_α como z_δ son pequeños y más similares entre sí que en el caso clásico; además $m_\delta > m_\alpha$, por lo que no se necesitan ángulos de timonería grandes para gobernar el misil [9]. Aunque se sigue cumpliendo que $\tau_n > 0$, $a < 0$ y $b < 0$ como en la configuración clásica; los valores de a y b son menores, lo que significa que opera con menor retraso de fase.

La maniobrabilidad permanente es pequeña, lo que obliga a trabajar con grandes ángulos de ataque.

Ventajas.

1) Baja resistencia aerodinámica (arrastre) al haberse suprimido las alas.

2) Arquitectura más sencilla que en el caso clásico, ya que al operar con ángulos de timonería menores, los servomotores pueden ser de menor tamaño y potencia.

3) Bajo balanceo inducido.

Inconvenientes.

1) Necesita operar con ángulos de ataque grandes para lograr buena maniobrabilidad, con el consiguiente riesgo de entrada en pérdidas.

2) Equilibrio estático difícil de conseguir en un rango amplio de velocidades.

3) Pilotado complejo a gran velocidad.

12.4. Misil con alas móviles.

Trata de conseguir un pilotado en fuerza con el foco de las alas, que ahora constituyen el elemento de gobierno, próximo al centro de masas, en la zona donde se suele encontrar la cámara de combustión del misil. En estas condiciones $m_\delta \approx 0$, mientras que z_δ es grande y de valor similar a z_α. Esto se traduce en que $\tau_n = 0$, $a = m_q/m_\alpha > 0$ y $b = 1/m_\alpha > 0$. Por lo tanto, opera con adelanto

[9] m_α es el responsable de la estabilidad que tiende a oponerse a las maniobras de gobierno.

de fase (overshooting). Además, el que z_δ sea grande, permite conseguir fuerzas de gobierno grandes con ángulos pequeños.

Ventajas.

1) Pilotado en fuerza con ángulos de ataque pequeños.

2) Baja resistencia aerodinámica (arrastre) ya que opera con ángulos de ataque pequeños.

3) Respuesta rápida ya que opera con adelanto de fase.

4) Control de balanceo por deflexión diferencial.

Inconvenientes.

1) Mala estabilidad transónica.

2) Elevada potencia en los servomotores ya que la timonería es de gran tamaño lo que significa que aparecen grandes fuerzas sobre ella.

3) Arquitectura compleja por el conflicto entre la ubicación de los servomotores y el de la cámara de combustión.

4) Aparece, aunque con menor intensidad que en la configuración canard, el fenómeno de la interferencia entre la timonería y las aletas traseras. Surgen en éstas últimas fuerzas opuestas a las de gobierno, debido al desvío del chorro de aire incidente inducido por la presencia de las alas; pero de menor cuantía que las fuerzas de gobierno originales.

12.5. Misil con gobierno por desvío de chorro en la tobera de salida. Pilotado PAF.

Se trata de una configuración muy similar a la clásica donde la timonería trasera se sustituye por un chorro de salida orientable mediante un ángulo de gobierno δ y un empuje $\vec{E} = E\cos(\delta)\hat{i} - E\,\text{sen}(\delta)\hat{k}$. Si el ángulo de desvío del chorro es pequeño, se puede trabajar con la aproximación que $\cos(\delta) = 1$ y $\text{sen}(\delta) = \delta$. Como resultado $z_\delta = E/(mu)$ y $m_\delta = d_T E/I_\perp$, donde d_T es la distancia entre el centro de masas y la tobera.

Ventajas.

1) Maniobrabilidad independiente de la altitud y velocidad del misil.

2) Lanzamiento vertical posible.

3) Si lleva alas, no hay interferencia entre éstas y el gobierno.

4) Buena estabilidad transónica.

Inconvenientes.

1) Con maniobrabilidad permanente grande, hay que desviar mucho el chorro, la aproximación $\cos(\delta) \approx 1$ deja de ser válida y se pierde empuje longitudinal y velocidad. En todo caso, cualquier maniobra supone algo de pérdida tanto de empuje longitudinal como de velocidad.

2) La capacidad de gobierno cesa al agotarse el combustible.

3) Opera con retraso de fase, lo que penaliza su tiempo mínimo de respuesta dinámica.

12.6. Misil con PIF mediante chorros laterales.

En este caso, no hay gobierno PAF, por lo que $m_\delta = 0$, mientras que el gobierno PIF viene dado por $z_\delta = E\,\mathrm{sen}(\theta)/(mu)$, donde θ es el ángulo que forma el eje de simetría de las toberas laterales con respecto al eje principal del misil. Por su parte δ ya no es un ángulo de gobierno, sino un parámetro de control que varía entre -1 y $+1$ y que regula la fracción del chorro lateral total que sale por cada una de las toberas. $\delta = 0$ supone chorro equidistibuido, $\delta = +1$ chorro sólo por una de las toberas y $\delta = -1$ chorro sólo por la otra tobera.

Guarda similitudes con el gobierno aerodinámico por ala móvil.

Ventajas.

1) Maniobrabilidad independiente de la altitud y velocidad del misil.

2) Lanzamiento vertical posible.

3) Baja resistencia aerodinámica (arrastre) ya que opera con ángulos de ataque pequeños.

4) Respuesta rápida ya que opera con adelanto de fase.

Inconvenientes.

1) Pérdida notable del empuje longitudinal con respecto al que se tendría si todo el chorro de gases saliera por una tobera centrada. Las toberas laterales sólo suministran $E_x = E\cos(\theta)$ donde θ no puede ser muy pequeño si se quiere tener una buena maniobrabilidad.

2) La capacidad de gobierno cesa al agotarse el combustible.

3) Maniobrabilidad limitada por el empuje lateral máximo disponible, $E_z = E\,\mathrm{sen}(\theta)$.

4) Arquitectura complicada por la presencia de un conflicto entre la ubicación de las toberas laterales y el de la cámara de combustión y los depósitos de combustible.

Referencias

ACART-VA-011 (2009). *ACART-VA-011. Unidad didáctica II. Sistemas de guía y control*. MADOC. Ministerio de Defensa, Biblioteca virtual del MADOC.

Cucharero, F. (1995). *Guiado y control de misiles*. Ministerio de Defensa, Madrid.

Fleeman, E. (2006). *Tactical Missile Design. 2nd edition*. AIAA, Blacksburg, Virginia.

Phillips, W. (2010). *Mechanics of flight*. John Wiley, Hoboken, New Jersey.

Zarchan, P. (2012). *Tactical and Strategical Missile Guidance. 6th Edition*. AIAA, Reston, Virginia.