MECÁNICA DE FLUIDOS.

8 de febrero de 2011

Índice general

1 Medios continuos. 3
1.1. Introducción. 3
1.2. Sólidos y fluidos. 3
1.3. Esfuerzo y velocidad de deformación. 5

2 Fluidostática. 11
2.1. Presión. Ley de Pascal. 11
2.2. Presiones dentro de un fluido sujeto a un campo gravitatorio. 13
2.3. Fuerzas sobre superficies sumergidas. 17
2.4. Principio de Arquímedes. 21

3 Fluidodinámica. 23
3.1. Cinemática del movimiento de los fluidos. 23
3.2. Teorema del transporte de Reynolds. 27
3.3. Dinámica de fluidos. Conservación de masa. 29
3.4. Segunda ley de Newton. 32
3.5. Primer principio de la termodinámica. 36
3.6. Viscosidad y turbulencia. 44

Capítulo 1

Medios continuos.

1.1. Introducción.

Un medio o material continuo es aquél cuyas propiedades mecánicas y termodinámicas se pueden representar como funciones continuas (campos) de las coordenadas de cada uno de los puntos de la región del espacio físico ocupada por el cuerpo material a lo largo de todo el intervalo temporal durante el cual se considere que el cuerpo tiene una existencia definida. En ese rango, su dependencia con la variable temporal también es continua.

La mecánica de los medios continuos se puede dividir en tres partes: (1) los principios generales basados en la conservación de propiedades como la masa y en la aplicación de las leyes de Newton y de la termodinámica a un medio continuo genérico, (2) las ecuaciones constitutivas que sirven para distinguir cada tipo de material (ejemplo, la ley de Hooke para definir un material elástico) y (3) las teorías especializadas donde se buscan soluciones particulares a problemas específicos planteados con un material concreto (ejemplo, ¿por qué vuela un avión?).

1.2. Sólidos y fluidos.

Desde el punto de vista mecánico, la principal propiedad de un medio sólido es su resistencia a sufrir deformaciones bajo la acción de una fuerza externa aplicada sobre el mismo (rigidez). Por el contrario, los medios fluidos son capaces de deformarse de forma indefinida. Para poder sistematizar de un modo riguroso la apreciación anterior, de manera que sirva para clasificar los distintos materiales dada su ecuación constitutiva, es necesario recordar el concepto de esfuerzo que ya se introdujo en el estudio de la elasticidad y la distinción entre esfuerzos normales y tangenciales. Dada una

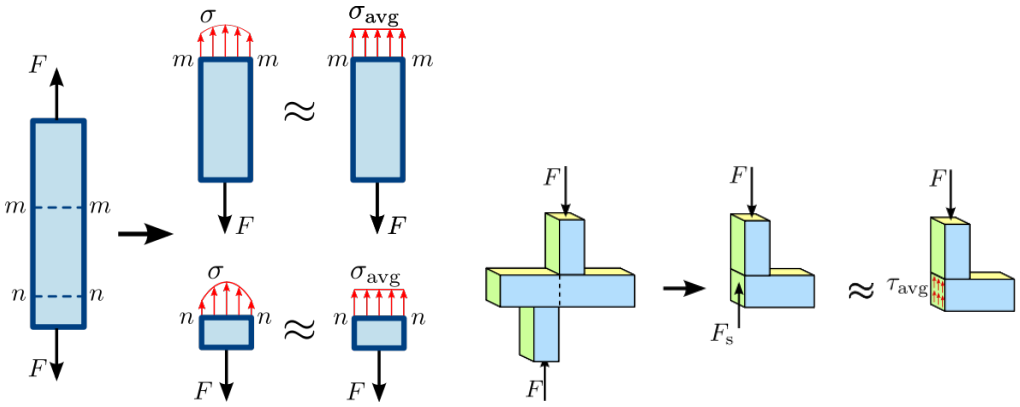


Figura 1.1: Izquierda: esfuerzo normal distribuido, σ, y promedio, σ_{avg}, sobre superficies internas a una barra bajo la acción de fuerzas de tracción. Derecha: esfuerzo tangencial promedio, τ_{avg}, sobre una superficie interna a un cuerpo con forma de cruz bajo la acción de fuerzas de corte.

superficie contenida en el interior o en el contorno de un medio continuo y una fuerza que actúa sobre la misma, se llama esfuerzo normal a la fuerza por unidad de área ejercida en dirección perpendicular a la superficie. Por otra parte, se llama esfuerzo tangencial o cortante a la fuerza por unidad de área ejercida en dirección tangencial a la superficie. La presión termodinámica es un ejemplo de esfuerzo normal, mientras que la fricción es un ejemplo de esfuerzo tangencial [1].

A partir de la definición previa de esfuerzo tangencial, se puede definir un sólido, desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, como todo cuerpo que, bajo la acción de un esfuerzo tangencial finito sufre una deformación angular, también finita. Los sólidos son materiales en los que se puede establecer una relación constitutiva que relacione los esfuerzos que actúan sobre ellos con las deformaciones que sufren.

Por el contrario, un medio fluido, desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, es todo cuerpo que, bajo la acción de un esfuerzo tangencial finito se deforma de modo continuo. Un fluido en reposo es incapaz de soportar tanto esfuerzos tangenciales como esfuerzos normales que no sean idénticos en todas las direcciones. A lo sumo, es posible establecer una relación constitutiva que exprese los esfuerzos que aparecen en el interior del medido fluido como una dependencia funcional de la historia de la deformación que haya sufrido y de la compresión o dilatación global a la

[1] Nota sobre nomenclatura. Dependiendo de la referencia que se consulte, el esfuerzo se representa tanto por σ como por τ e, incluso, las componentes normales se representan por σ y las tangenciales por τ.

que haya sido sometido.

Estas definiciones generalizadas se pueden restringir para los propósitos de este curso. Como ejemplo de sólidos se han estudiado únicamente los materiales elásticos en los que los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones (al menos hasta el límite de elasticidad). Por el contrario, como materiales fluidos, no se considerarán dependencias funcionales complejas entre la historia de la deformación y los esfuerzos que actúan sobre el mismo (lo que podría llevar a que se cuestionase el carácter de sustancias como la pasta de dientes, el asfalto o la misma corteza terrestre en escalas de tiempo geológicas), sino que el estudio se limitará a aquellos medios fluidos en los que los esfuerzos son directamente proporcionales a la velocidad de deformación (se considera que la influencia de la historia de la deformación sobre los esfuerzos es representable mediante un desarrollo en serie de Taylor, sobre la variable temporal, truncado a primer orden donde, además, la dependencia funcional es lineal). Estos fluidos se llaman newtonianos o de Navier-Stokes y sirven para representar el comportamiento de materiales como el aire, el agua, la gasolina, buena parte de los aceites minerales, los alcoholes, el amoniaco, ...

1.3. Esfuerzo y velocidad de deformación.

En los fluidos que se estudiarán en este curso (newtonianos) es posible establecer una relación lineal entre el esfuerzo que soportan y la velocidad con la que se están deformando. En esta sección se verá qué se entiende por velocidad de deformación y algunas propiedades del esfuerzo.

Esfuerzo.

En elasticidad ya se vio que el esfuerzo, en general, es una magnitud vectorial que actúa sobre cada una de las caras de un determinado elemento que se considere en el interior de un medio continuo, véase la figura 1.2. Sus dimensiones y sentido físico son las de la fuerza que actúa por unidad de superficie de cada una de las caras del elemento. Su origen se encuentra en las fuerzas intermoleculares de contacto entre las moléculas que quedan dentro del elemento considerado y las que quedan fuera. Un esfuerzo relativamente pequeño que actúe sobre una gran superficie puede dar lugar a una gran fuerza neta.

En tres dimensiones, y para un punto dado en el interior de un medio continuo, siempre será posible considerar tres direcciones principales y tomarlas como normales a sendas superficies que pasen por dicho punto.

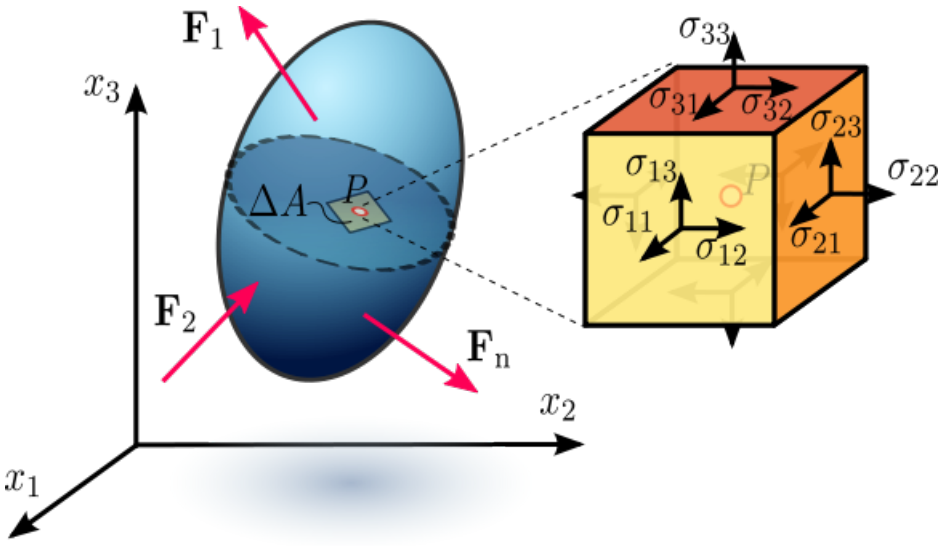


Figura 1.2: Representación de las posibles componentes del esfuerzo actuando sobre un elemento de forma cúbica situado dentro de un medio continuo.

Como por cada superficie se puede definir un vector de esfuerzos con tres componentes, esto significa que el esfuerzo será definible como un campo con nueve componentes (las tres de cada vector correspondiente a cada una de las tres superficies mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto en el que se quiera definir el campo). A este tipo de magnitudes se las llama tensores y son representables mediante una matriz 3×3 con los valores de las nueve componentes del esfuerzo en cada punto.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

donde τ_{ij} representa la componente según el eje j del esfuerzo que actúa sobre una superficie cuya normal apunta en la dirección del eje i.

En la mayor parte de los fluidos, el tensor de esfuerzos es simétrico. Esto significa que las componentes extradiagonales (que representan los esfuerzos tangenciales) se igualan por parejas que tengan los mismos subíndices permutados: $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$ y $\tau_{23} = \tau_{32}$. Por lo tanto, a priori, sólo seis componentes del total de nueve del tensor pueden ser distintas entre sí. Las excepciones a esta regla vienen dadas por fluidos formados por moléculas grandes y con una alta polaridad eléctrica cuyas interacciones de contacto a través de una superficie no son representables sólo mediante fuerzas internas sino que también requieren del uso de torques internos.

Velocidad de deformación. Ley de Navier-Poisson.

Supóngase que se tiene dos puntos O y P inicialmente alineados a lo largo del eje x con una separación L entre ellos, véase la figura 1.3. Por simplicidad, se trabajará en dos dimensiones, siendo los resultados inmediatamente generalizables a la tercera dimensión. El vector que une los puntos O y P se puede expresar como $\vec{L} = \vec{r}(P) - \vec{r}(O) = (L, 0)$. La distancia L es lo bastante pequeña como para que el vector velocidad en P se pueda aproximar por un desarrollo en serie de Taylor de primer orden a partir de su valor en O. Es decir, si $\vec{v}(O) = (u_O, v_O)$ y $\vec{v}_P = (u_P, v_P)$, se tiene que

$$u_P = u_O + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_O L$$
$$v_P = v_O + \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_O L$$

por lo que tras un intervalo Δt, se tendrá que

$$x_{O'} = x_O + u_O \Delta t; \qquad x_{P'} = x_P + (u_O + \partial u/\partial x|_O L)\Delta t$$
$$y_{O'} = y_O + v_O \Delta t; \qquad y_{P'} = y_P + (v_O + \partial v/\partial x|_O L)\Delta t$$

El vector $\vec{L}' = \vec{r}(P') - \vec{r}(O') = (L'_x, L'_y)$ que une los puntos O' y P' quedará:

$$L'_x = x_{P'} - x_{O'} = x_P - x_O + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_O L\Delta t = L + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_O L\Delta t$$
$$L'_y = y_{P'} - y_{O'} = y_P - y_O + \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_O L\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_O L\Delta t$$
$$\frac{\Delta \vec{L}}{L} = \frac{\vec{L}' - \vec{L}}{L} = (\partial u/\partial x, \partial v/\partial x)_O \Delta t \tag{1.1}$$

recuérdese que, por la definición de $\vec{L}$: $x_P - x_O = L_x = L$, $y_P - y_O = L_y = 0$.

La expresión (1.1) da el valor de la deformación unitaria del segmento $\vec{L} = (L, 0)$ en un tiempo Δt. Por otra parte, la definición de la velocidad de deformación viene dada por el límite cuando Δt tiende a cero del cociente incremental entre la deformación unitaria producida en un incremento temporal, Δt, y dicho incremento. Para este ejemplo bidimensional y con el segmento inicial orientado según el eje de las x, se tiene que la velocidad de deformación viene dada por el vector $(\partial u/\partial x, \partial v/\partial x)$.

En tres dimensiones se obtendría una velocidad de deformación vectorial $(\partial u/\partial x, \partial v/\partial x, \partial w/\partial x)$, para una velocidad $\vec{v} = (u, v, w)$. Repitiendo los cálculos con sendos segmentos orientados según los ejes y y z, se obtiene que la definición más general posible de la velocidad de deformación viene

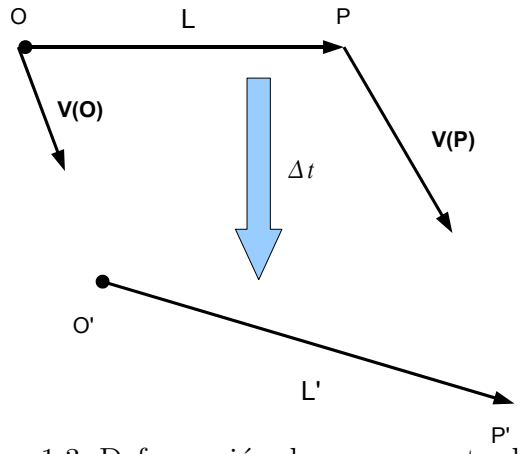


Figura 1.3: Deformación de un segmento de longitud L en dos dimensiones debida a la diferencia de velocidades entre sus extremos.

dada por el campo tensorial gradiente de la velocidad, cuya componente ij es la derivada parcial según el eje j de la componente i del vector velocidad.

$$\boldsymbol{\nabla u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La definición previa es insatisfactoria puesto que el tensor gradiente de velocidad no es, en general, simétrico, mientras que el tensor de esfuerzos sí que lo es. Las componentes simétricas, de primer orden, más generales que se pueden construir a partir de $\boldsymbol{\nabla u}$ vienen dadas por $(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ y $(\partial u_k/\partial x_k)\delta_{ij}$, donde $\partial u_k/\partial x_k$ representa, por ahorro de notación, a $(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})$ y δ_{ij} representa al tensor unidad cuyo valor en todo punto es 1 para los elementos diagonales y 0 para los elementos extradiagonales ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

El esfuerzo en el seno de fluido simple se puede descomponer como la suma de una componente estática, presente incluso cuando el fluido no se estuviese deformando, con otra componente dinámica presente cuando la velocidad de deformación sea no nula. Llamando τ' a la componente dinámica, la ley de Navier-Poisson queda

$$\tau' = \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) + \Big(\zeta - \frac{2}{3}\mu\Big)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{1.2}$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica y ζ el de viscosidad volúmica.

$\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$ se llama velocidad de deformación para distinguir del gradiente de velocidad y $\partial u_k/\partial x_k$ es la velocidad de deformación volúmica.

Capítulo 2

Fluidostática.

2.1. Presión. Ley de Pascal.

La fluidoestática trata de los fluidos que o bien no están en movimiento, o bien se mueven como un sólido rígido. En esas condiciones, el fluido es incapaz de soportar esfuerzos tangenciales sin que aparezcan velocidades de deformación no nulas en el seno del propio fluido que, por lo tanto, dejaría de comportarse como un sólido rígido. Por lo tanto, en el ámbito de la fluidostática se puede suponer que las componentes extradiagonales del tensor de esfuerzos, τ_{ij} con $i \neq j$, son nulas.

Considérese un elemento de fluido con forma de cuña como la dada en la figura 2.1 sobre cuya superficie actúa el resto del fluido a través de unos esfuerzos dados por $\tau_{xx} = -p_x$, $\tau_{yy} = -p_y$ y $\tau_{ss} = -p_s$, donde el signo $-$ se ha introducido para indicar que que los esfuerzos correspondientes van en sentido opuesto a las normales exteriores a la propia cuña.

Supóngase además que sobre el fluido contenido dentro de la cuña está actuando la fuerza de la gravedad que apunta en la dirección del eje y y sentido opuesto al mismo. Además, supóngase que el elemento es lo bastante pequeño como para que se pueda considerar que la densidad, ρ, se mantiene constante dentro del mismo.

Si el fluido está en reposo, el balance de fuerzas sobre la cuña en cuestión será nulo.

$$-p_x\delta_y\delta_z(-\vec{n}_x) - p_y\delta_x\delta_z(-\vec{n}_y) - p_s\delta_s\delta_z(-\vec{n}_s) + \rho g(\delta_x\delta_y\delta_z/2)(-\vec{n}_y) = 0 \quad (2.1)$$

que, por componentes queda

$$\begin{aligned} &p_x\delta_y\delta_z - p_s\text{sen}(\theta)\delta_s\delta_z = 0 \\ &p_y\delta_x\delta_z - p_s\cos(\theta)\delta_s\delta_z - \rho g(\delta_x\delta_y\delta_z/2) \end{aligned}$$

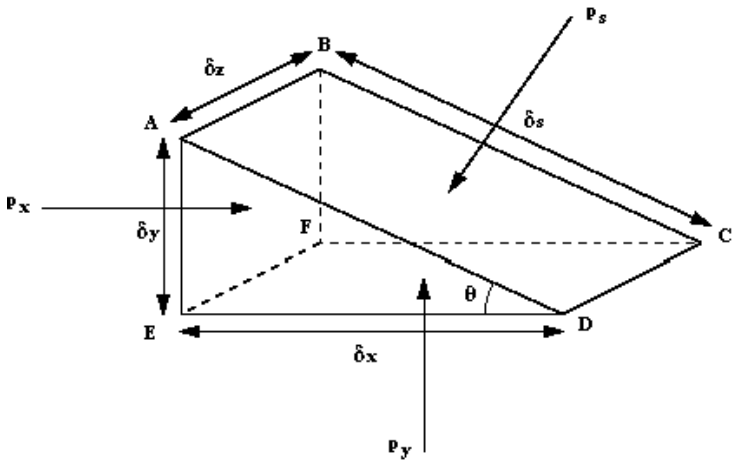


Figura 2.1: Cuña empleada para calcular los esfuerzos en el seno de un fluido en reposo.

ahora bien, por geometría: $\delta_s \text{sen}(\theta) = \delta_y$ y $\delta_s \cos(\theta) = \delta_x$. Luego, se tendrá que:

$$p_x = p_s; \quad p_y - p_s = \rho g \delta_y / 2 \tag{2.2}$$

Y tomando el límite de una cuña de tamaño infinitesimal, se llega a que $p_x = p_y = p_s$. Operando del mismo modo con una cuña tal que el eje y se mantenga y los ejes x y $-z$ intercambien sus pápeles, se puede incluir p_z en la igualdad anterior. Finalmente, para un fluido en reposo, el tensor de esfuerzos en un punto dado, se puede expresar como $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Con lo anterior, queda demostrada la ley de Pascal.

Ley 2.1 *Ley de Pascal: la presión ejercida en un punto cualquiera de un fluido confinado por unas paredes y en equilibrio termodinámico es un escalar, independiente de la dirección, que toma un único valor. Lo mismo se cumple para la presión ejercida por el fluido sobre un punto cualquiera de las paredes que lo confinan.*

En efecto, el tensor de esfuerzos queda en la forma del producto de un escalar (la presión) por el tensor unitario. Como el tensor unitario es independiente de la dirección que se considere, también lo es el tensor de esfuerzos resultante. Además, aun cuando haya fuerzas de volumen, se ha visto que para elementos infinitesimales su contribución es de orden inferior a la de las fuerzas superficiales representadas por el esfuerzo; es decir, se anulan más rápido que los esfuerzos conforme el volumen del elemento considerado tiende a cero. Esto implica que se obtiene un valor único de

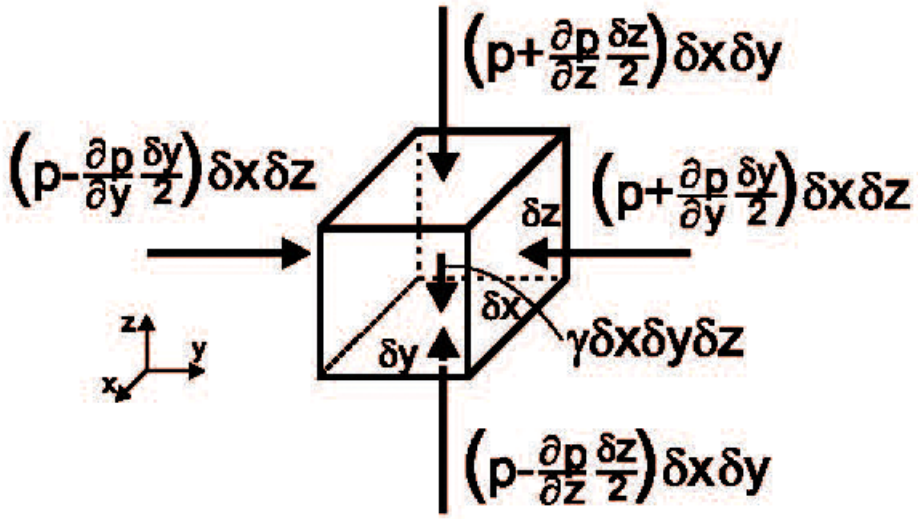


Figura 2.2: Elemento cúbico de fluido en reposo sujeto a la gravedad.

la presión para cada punto, tanto del fluido como de las paredes que lo contienen, independientemente de la ruta que se siga para aproximarlo.

Sumando la contribución estática, debida a la presión, con la ley de Navier-Poisson se obtiene una expresión general para el tensor de esfuerzos válida para cualquier fluido simple.

2.2. Presiones dentro de un fluido sujeto a un campo gravitatorio.

Considérese un elemento fluido finito de forma cúbica en torno a un punto, figura 2.2. Si el fluido está en reposo, el sumatorio de todas las fuerzas de volumen (que dependen de la cantidad de sustancia presente, como la gravedad que depende de la masa de fluido contenida dentro del volumen) y superficie (los esfuerzos) que actúen sobre el fluido habrá de ser nulo.

Sobre el eje de las y se tendrá:

$$\Sigma F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz = 0 \qquad (2.3)$$

de donde sale inmediatamente

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.4}$$

y, razonando del mismo modo sobre el eje x, se llega a que $\partial p/\partial x = 0$. Repitiendo el razonamiento sobre el eje z, en vez de (2.3) se tiene

$$\Sigma F_z = \Big(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\Big)dxdy - \Big(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\Big)dxdy - \rho g dxdydz = 0 \tag{2.5}$$

que acaba llevando a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{2.6}$$

que es la ecuación fundamental de la fluidostática. La primera igualdad en (2.6) sale de que $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$, por lo que al depender la presión exclusivamente de la coordenada z, las derivadas parciales con respecto a z se convierten en derivadas totales. [1]

La ecuación (2.6) se puede generalizar para el caso de que se tenga una fuerza de volumen cualquiera, $\vec{f_v}$, obteniéndose (2.7)

$$\nabla p = \vec{f_v} \tag{2.7}$$

Hidrostática. Fluidos incompresibles.

Un fluido incompresible se caracteriza por tener un módulo volumétrico muy grande (compresibilidad baja) y soportar grandes esfuerzos de presión sin apenas variar el volumen; dicho de otro modo, su densidad permanece aproximadamente constante. En tal caso la ecuación fundamental de la hidrostática en presencia de gravedad queda como

$$\int_0^1 dp = -\rho g \int_0^1 dz; \quad p_1 = p_0 - \rho g(z_1 - z_0) \tag{2.8}$$

donde el punto 0 es el que se haya tomado como referencia para medir presiones.

Si en lugar de considerar sentido positivo en el eje z hacia arriba, se trabaja con profundidades positivas contadas a partir de $z_0 = 0$, la ecuación (2.8) queda como

$$p_1 = p_0 + \rho g h \tag{2.9}$$

[1] Nótese que, en la deducción de la ley de Pascal se trabajaba con el valor de la presión y el efecto de las fuerzas volúmicas era despreciable por tratarse de un infinitésimo de primer orden. Aquí se trabaja con gradientes de presión y las fuerzas volúmicas son del mismo orden que los gradientes.

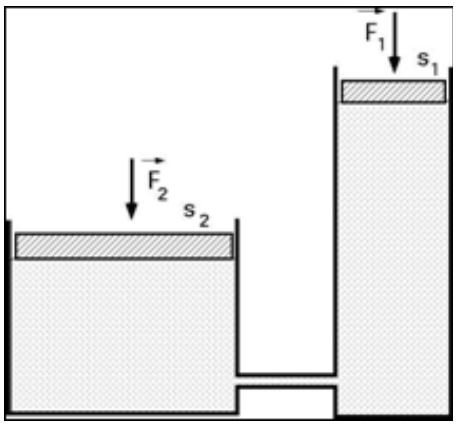


Figura 2.3: Prensa hidráulica.

Tanto en (2.8) como en (2.9), p_0 es la presión de referencia a nivel 0.

Los líquidos suelen comportarse como fluidos incompresibles; sin embargo, a efectos mecánicos, los gases también se pueden considerar como incompresibles cuando las dimensiones en vertical de la región estudiada no son muy grandes, no hay grandes variaciones de temperatura en su seno y, además, sus velocidades características son menores que $0,3$ veces la velocidad de propagación del sonido en el gas. Cuando se cumplen estas condiciones, las variaciones de presión y densidad medias inducidas por causas externas (por ejemplo, un pistón moviéndose) se pueden considerar como homogéneas sobre todo el gas y la única variación que experimentan las ecuaciones (2.8) y (2.9) es que aparece una dependencia explícita con el tiempo en p_0 y ρ; pero la forma de la dependencia espacial con la altura z (o la profundidad h) es la misma que para el caso de un líquido.

El valor de p_1 recibe el nombre de presión absoluta y el valor de $p_1 - p_0 = \rho g(z_0 - z_1) = \rho g h$ el de presión relativa. La mayor parte de los barómetros miden presiones relativas.

Prensa hidráulica.

La prensa hidráulica es un dispositivo que funciona como aplicación de la ley de Pascal y de la ecuación fundamental de la fluidostática. Una representación esquemática de una prensa hidráulica se puede encontrar en la figura 2.3

Sea un punto situado en el canal que conecta los dos émbolos. Su presión es única debido a la ley de Pascal. Al mismo tiempo si se computa dicha

presión simultáneamente desde ambos émbolos se llega a que:

$$p_1 + \rho g h_1 = F_1/S_1 + \rho g h_1 = F_2/S_2 + \rho g h_2 = p_2 + \rho g h_2$$

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2) \tag{2.10}$$

En primera aproximación suele ser despreciable el efecto del término $\rho g(h_2 - h_1)$, por lo que $p_2 = p_1$ y $F_2 = (S_2/S_1)F_1$

La prensa funciona poniendo un tope en la parte inferior del émbolo de sección menor, justo antes del canal que lo conecta con el émbolo de sección mayor. Si se aplica una fuerza F_1 al pistón 1 que induzca una presión $p_1 = F_1/S_1$ capaz de obligar a que el pistón baje hasta el tope y se estudia un punto situado en el canal, desde el émbolo 1 verá una presión p_1 (se supone que el tope está a la misma profundidad que el canal de interconexión); por el lado del émbolo 2 verá una presión $p_2 + \rho g h_2$ (donde h_2 es el profundidad del canal de interconexión vista desde ese émbolo). Así que, la fuerza que será capaz de ejercer el pistón 2 hacia arriba vendrá dada por $F_2 = p_2 S_2 = (p_1 - \rho g h_2)S_2$.

Como primera aproximación se puede decir que una fuerza pequeña sobre el pistón 1, induce una gran presión sobre el émbolo 1 que se traduce en una presión similar (minorada en $\rho g h_2$) sobre el pistón 2 que, por lo tanto, puede ejercer una gran fuerza. Sin embargo, las cosas no son tan ideales como podría pensarse a primera vista. Analizando el intercambio de fluidos que tiene lugar, cuando el pistón 1 desciende por el interior del émbolo 1, el volumen de fluido contenido en ese émbolo ($S_1 h_1$) pasa al émbolo 2; por lo tanto, aunque se esté ejerciendo una gran fuerza neta sobre el pistón 2, como mucho se podrá elevar su posición una altura $\Delta h_2 = h_1(S_1/S_2)$. Aquí es donde interviene el tope previamente mencionado, si se ejerce una fuerza F_1 superior a la necesaria para trasvasar todo el volumen de fluido hidráulico desde el émbolo 1 hasta el émbolo 2, lo que ocurre es que el exceso de F_1 con respecto al valor necesario para efectuar dicho trasvase pasa a ser soportado por el tope cuando el sistema quede en equilibrio.

Recordando de termodinámica que el trabajo viene dado $p\Delta V$, se puede explicar la situación diciendo que, aunque se pueda ejercer una gran fuerza sobre el pistón 2 (y elevar pesos muy grandes por lo tanto) que en primera aproximación viene dada por $F_2 = (S_2/S_1)F_1$; sin embargo, el trabajo que puede hacer esa fuerza está limitado por el trabajo desarrollado al vaciar el émbolo pequeño, limitado por su propio volumen mucho menor que el del émbolo grande. Para que el sistema sea verdaderamente útil hay que jugar con un sistema de válvulas y bombas que se encarguen de cerrar el paso por el canal cuando el pistón 1 llega hasta el tope y de rellenar a continuación el émbolo 1 de fluido hidráulico antes de reabrir la conexión.

Aerostática. Gas ideal isotermo.

En este caso se tiene, por la ecuación de estado de los gases ideales, que $p = \rho R^* T$ donde $R^* = R/W_{molecular}$. R^* es la constante particular del gas en cuestión, $W_{molecular}$ su peso molecular y R es la constante universal de los gases. Recuérdese que

$$p = nRT/V = (m/W)RT/V = (m/V)(R/W)T = \rho R^* T$$

Sustituyendo en la ecuación fundamental de la fluidostática

$$dp = -\rho g dz = -\frac{pg}{R^* T} dz; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{R^* T} \tag{2.11}$$

E integrando a izquierda y derecha

$$\ln(p_1/p_0) = -g(z_1 - z_0)/(R^* T)$$
$$p_1 = p_0 \exp\Big(-\frac{g(z_1 - z_0)}{R^* T}\Big) \tag{2.12}$$

donde se toma la presión p_0 a una altura z_0 como referencia. Por otra parte, puesto que $p_0 = \rho_0 R^* T$, se tendrá que $1/(R^* T) = \rho_0/p_o$ y la ecuación (2.12) se podrá expresar como

$$p_1 = p_0 \exp\Big(-\frac{\rho_0 g(z_1 - z_0)}{p_0}\Big) \tag{2.13}$$

2.3. Fuerzas sobre superficies sumergidas.

Para un fluido en reposo, las únicas fuerzas de superficie que actúan son las presiones obtenidas a partir de la ecuación fundamental de la fluidostática. Si se tiene una superficie sumergida en el fluido, la integral del esfuerzo ejercido por la presión sobre cada elemento de la superficie dará la fuerza neta que el fluido ejerce sobre la misma. Del mismo modo, la integral del torque ejercido por la presión sobre cada elemento de la superficie dará el torque neto que el fluido ejerce sobre la superficie.

$$\vec{F} = -\int_S p\hat{n}\, dS; \quad \vec{\tau}_o = \int_S \vec{r}_o \times (-p\hat{n})\, dS$$

En las expresiones anteriores $\hat{n}$ es la normal exterior, de módulo unidad, con respecto al cuerpo sobre cuya superficie se están integrando fuerzas y torques y $\vec{r}_o$ es un vector de posición con respecto a un sistema de referencia con origen en el punto O, con respecto al que se están calculando los torques.

A la hora de calcular torques es de particular interés el concepto de centro de presiones definido como el punto en el que, si se aplicase una fuerza igual a la fuerza resultante ejercida por la presión, su torque con respecto a cualquier punto sería igual al torque causado por la distribución de fuerzas de presión con respecto a ese mismo punto.

$$\vec{r}_{cp,o} \times \vec{F} = \vec{\tau}_o \tag{2.14}$$

donde $\vec{r}_{cp,o}$ es el vector de posición del centro de presiones en un sistema de referencia centrado en el punto O con respecto al cual se están calculando los torques. Conocida la fuerza neta y su punto de aplicación (el centro de presiones) se puede calcular su torque con respecto a cualquier otro punto exactamente igual que en cualquier problema de mecánica de los ya vistos.

En flujos bidimensionales, donde se trabaja con las coordenadas x e y, el momento de las fuerzas apuntará según el eje z (saliéndose del papel) y las expresiones anteriores se pueden simplificar a

$$\tau_z = x_{cp}F_y - y_{cp}F_x = \int_S x\, dF_y - \int_S y\, dF_x \tag{2.15}$$

donde se supone que, sobre el papel, el eje x es horizontal y el y vertical hacia arriba. Trabajando con profundidades, h, verticales hacia abajo, hay que modificar los signos en la ecuación (2.15)

$$\tau_z = h_{cp}F_x - x_{cp}F_h = \int_S h\, dF_x - \int_S x\, dF_h \tag{2.16}$$

Uso de superficies proyectadas.

Dada una superficie con orientación arbitraria, se puede descomponer el estudio de las fuerzas y momentos que actúan sobre ella en las fuerzas y momentos que actúan sobre las proyecciones de dicha superficie arbitraria, ortogonales (perpendiculares) a los ejes del sistema de referencia.

Trabajando en dos dimensiones y dado un elemento de superficie arbitrario $\hat{n}dS$ sus proyecciones ortogonales a los ejes valdrán $n_x dS$ y $n_h dS$, respectivamente. Se supone que el eje x es horizontal y el eje h vertical hacia abajo (profundidades).

Las fuerzas actuando según los eje x y h valdrán

$$F_x = -\int_S \text{sign}(n_x) p |n_x|\, dS = -\int_{Sx} \text{sign}(n_x) p\, dS_x \tag{2.17}$$

$$F_h = -\int_S \text{sign}(n_h) p |n_y|\, dS = -\int_{Sh} \text{sign}(n_h) p\, dS_h \tag{2.18}$$

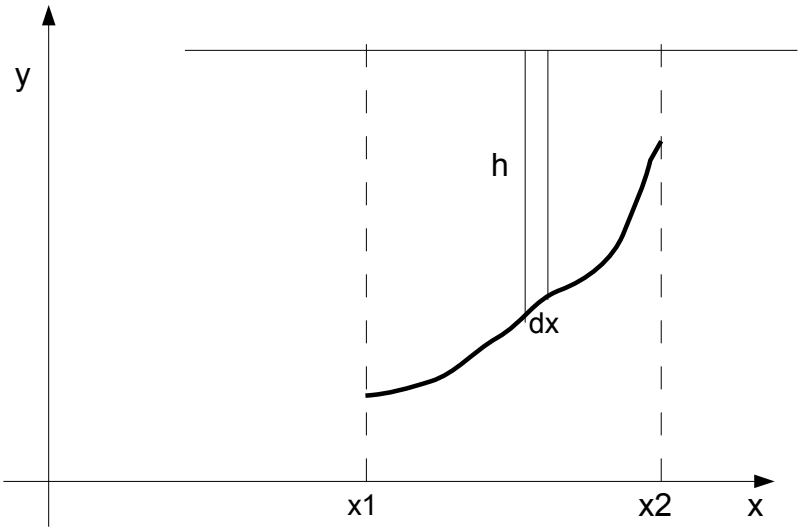


Figura 2.4: Cálculo de la fuerza ejercida por la presión a sobre una superficie.

donde el signo de las componentes n_x y n_h de la normal se ha mantenido mediante la función sign [2] y se han definido los elementos de área proyectados, dS_x y dS_h, como la proyección ortogonal, en valor absoluto, del elemento de área de la superficie arbitraria original.

Por su parte, las coordenadas del centro de presiones se despejarán a partir de

$$h_{cp}F_x = -\int_S \text{sign}(n_x)hpdS_x \tag{2.19}$$

$$x_{cp}F_h = -\int_S \text{sign}(n_h)xpdS_h \tag{2.20}$$

Considérese ahora la superficie dada por la figura 2.4 y, suponiendo que esté sumergida en un líquido incompresible, calcúlese la fuerza neta en dirección vertical (en este caso será vertical y hacia abajo) ejercida sobre el lado superior de la superficie haciendo uso de las ecuaciones (2.9) y (2.18). En este caso, se cumple que $\text{sign}(n_x) = \text{sign}(n_h) = -1$, dado el criterio de signos (x positivo hacia la derecha y h hacia abajo) y la superficie representada en la figura 2.4.

[2] La función sign(x) vale 1 cuando su argumento es positivo o nulo y -1 cuando su argumento es negativo. Da el signo del argumento.

$$F_h = -\operatorname{sign}(n_h)\int_S (p_0+\rho g h)\,dS_h = p_0 S_h + \rho g \int_{x1}^{x2} hL\,dx = p_0 S_h + \rho g V \tag{2.21}$$

donde L es la longitud en dirección perpendicular al papel de modo que $dS_h = Ldx$. Es inmediato comprobar, por simple inspección ocular, que la integral de una columna de altura h sobre toda el área S_h es exactamente el volumen de líquido contenido entre la superficie problema y la superficie libre de contacto entre el líquido y el medio ambiente. Ese volumen va multiplicado por la densidad del fluido y la gravedad para obtener el peso del fluido presente por encima de la superficie problema. Además hay una contribución adicional debida a la presión de referencia, de valor uniforme, que es simplemente la presión multiplicada por el área total.

El punto de aplicación de la fuerza vertical no da un resultado genérico fácilmente expresable en función de una magnitud como es el peso contenido en un volumen de fluido. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} x_{cp}F_h = -\operatorname{sign}(n_h)\int_S x(p_0+\rho g h)\,dS_h = p_0 L\frac{x_2^2-x_1^2}{2} \\ + \rho g\int_{x1}^{x2} xh(x)L\,dx = p_0 S_h\frac{x_2+x_1}{2} + \rho g\int_{x1}^{x2} xh(x)L\,dx \end{aligned} \tag{2.22}$$

y la integral de integrando $xh(x)L$ no da un resultado sencillo para superficies genéricas con una dependencia de la altura con la coordenada horizontal, $h(x)$, arbitraria.

En cuanto a la fuerza neta en dirección horizontal, su cálculo se obtiene aplicando la ecuación (2.9) a la (2.17).

$$\begin{aligned} F_x = -\operatorname{sign}(n_x)\int_S (p_0+\rho g h)\,dS_x = p_0 S_x + \rho g\int_{h1}^{h2} hL\,dx = \\ p_0 S_x + \rho g L(h_2^2-h_1^2)/2 = p_0 S_x + \rho g L(h_2-h_1)\frac{h_2+h_1}{2} = \\ p_0 S_x + \rho g S_x\frac{h_1+h_2}{2} \end{aligned} \tag{2.23}$$

con un centro de presiones calculable a partir de

$$\begin{aligned} h_{cp}F_x = -\operatorname{sign}(n_x)\int_S h(p_0+\rho g h)\,dS_x = p_0 S_x\frac{h_1+h_2}{2} \\ +\rho g L(h_2^3-h_1^3)/3 = p_0 S_x\frac{h_1+h_2}{2} + \rho g S_x\frac{h_2^3-h_1^3}{3(h_2-h_1)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Las fórmulas (2.23) y (2.24) son particularmente interesantes: no hay nada en ellas que dependa de los detalles de la superficie original al margen de su área proyectada sobre un plano vertical (con normal según el eje x). Superficies completamente distintas pero con la misma área proyectada sobre un plano vertical, soportarán la misma fuerza neta en dirección horizontal, con un punto de aplicación a la misma profundidad. En el caso de la componente vertical de la fuerza no ocurre eso, superficies con la misma proyección sobre un plano horizontal pueden estar soportando pesos de fluido muy diferentes según cuáles sean los detalles de su forma.

Para computar fuerzas netas sobre un cuerpo, habría que tener en cuenta las fuerzas de presión sobre todas las caras.

2.4. Principio de Arquímedes.

Como consecuencia de los resultados previos el principio de Arquímedes se puede deducir como un simple teorema.

Teorema 2.1 *Principio de Arquímedes: la fuerza neta de flotación que experimenta un cuerpo sumergido en un fluido en reposo es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo.*

En efecto, en la figura 2.5, se puede ver que la cara superior del cuerpo de volumen V experimenta una fuerza, debida a la presión, hacia abajo (opuesta al signo de n_y que, en esa cara, apunta hacia arriba) igual al peso del volumen comprendido entre la misma y la superficie libre más el término $p_0 S_y$ debido a la presión ambiental; es decir, igual al peso del fluido contenido en el volumen rayado $V1$ más la contribución ambiental. Por su parte, la cara inferior del volumen V experimenta una fuerza, debida a la presión, hacia arriba (opuesta al signo de n_y que, en esa cara, apunta hacia abajo) igual al peso que tendría un fluido que ocupase todo el volumen comprendido entre la misma y la superficie libre más el término $p_0 S_y$ debido a la presión ambiental; es decir, igual al peso de un fluido que rellenase el volumen $V2$ formado por la unión de V y $V1$ más la contribución ambiental. La fuerza total debida a la diferencia de presiones entre la cara superior y la inferior será, obviamente, hacia arriba e igual al peso de un fluido que llenase $V2$ menos el peso del fluido contenido en $V1$; es decir, igual al peso del fluido que debería ocupar el volumen V y que ha sido desalojado por el cuerpo. Las contribuciones ambientales, se cancelan mutuamente.

Contra la posible objeción de que, en realidad, por encima de la cara inferior no hay un volumen V2 de fluido, sino que se tiene V de cuerpo sumergido y V1 de fluido hay que aplicar, primero, la ley de Pascal: la presión

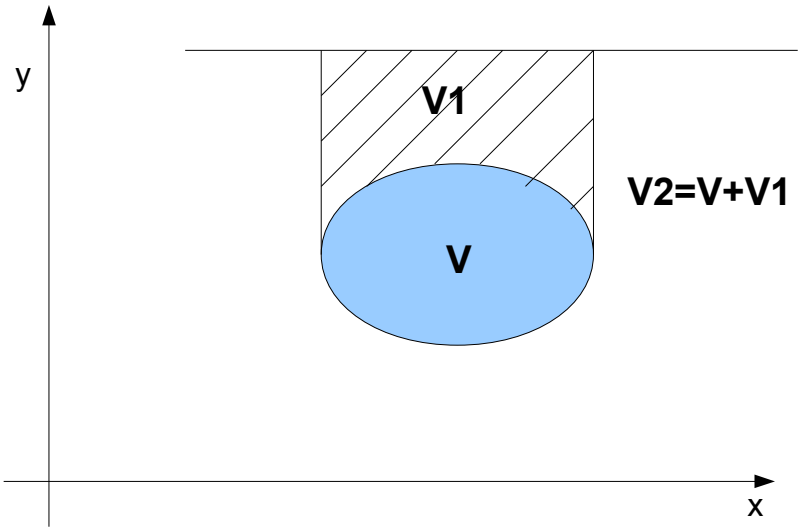


Figura 2.5: Fuerza de flotación sobre un cuerpo sumergido.

sobre la cara inferior del cuerpo sumergido tiene un valor único e independiente de la dirección en que se mire, y, segundo, la ecuación fundamental de la fluidostática: el gradiente de la presión en dirección horizontal se anula, por lo que la presión sobre puntos a la misma profundidad (incluidos los que estén sobre la cara inferior del cuerpo sumergido) será igual a su valor fluidostático, $p_0 + \int \rho g \, dh$, para todos ellos.

Cancelación de la contribución ambiental.

El hecho de que las contribuciones ambientales, debidas a una presión de referencia que es la misma para la cara superior y para la cara inferior, se cancelen mutuamente es generalizable en el siguiente enunciado: una presión uniforme es incapaz de ejercer una fuerza neta sobre cualquier cuerpo sobre el que actúe. Esta es la explicación de que no se pueda flotar en la atmósfera a pesar de que el valor de la presión atmosférica, $1,013 \cdot 10^5 Pa$, sería capaz de sostener a un hombre de $80kg$ de masa con tal de que actuase sin oposición sobre un cuadrado de unos $8,8cm$ de lado.

Del mismo modo, en muchos problemas se calculan fuerzas y centros de presiones sobre superficies que, por un lado están sumergidas en un líquido y por el otro en contacto con la atmósfera, considerada como presión de referencia. En tales casos se puede suprimir directamente la contribución debida a la presión atmosférica de todos los cálculos y trabajar como si sólo se tuvieran presiones relativas a ella.

Capítulo 3

Fluidodinámica.

3.1. Cinemática del movimiento de los fluidos.

La descripción del movimiento [1] de un fluido es diferente a la usual en otros ámbitos de la mecánica.

Habitualmente, se describe la posición y la velocidad de o bien cada una de las partículas presentes en el problema, o bien de cada una de las partes en las que se puede dividir un medio continuo sólido para su estudio. Este tipo de descripción cinemática se llama descripción lagrangiana y tiene la ventaja de que las leyes de la física se aplican de modo natural a porciones de materia que mantienen su identidad a lo largo del proceso al que se vean sometidas. Así, por ejemplo, la conservación de la masa se expresa de modo natural diciendo que, si se aisla un cierto número de moles y se sigue su evolución, su masa será siempre la misma, independientemente de lo que le ocurra a la región del espacio ocupada por ese número de moles. Sin embargo, tiene el problema a la hora de emplearse con un medio fluido de que, al no presentar los fluidos resistencia a las deformaciones tangenciales (aunque sí que la puedan presentar a la velocidad de deformación), cualquier porción de fluido que se elija incialmente acabará completamente deformada y entremezclada con sus vecinas haciendo que la descripción cinemática del sistema resulte en extremo complicada.

Por el contrario, en mecánica de fluidos se suele usar una descripción cinemática llamada descripción euleriana en la que no se pretende seguir a porciones materiales fijas de medio fluido sino que se fijan posiciones en el espacio y la descripción se limita a la de la porción de materia fluida

[1] Recuérdese que la cinemática es la parte de la mecánica que describe cómo son los movimientos.

que en cada instante se encuentre en dicha posición; sin preocuparse de que lo que se estudia en cada momento no sea el mismo material que el que se estudió antes o el que se estudiará después. La descripción cinemática se simplifica sobremanera al poder considerar en cada instante de tiempo una descomposición del medio fluido en un conjunto diferente de porciones que, sin embargo, se eligen siempre para que tengan unas formas regulares, sencillas y que no haya que recalcular a cada instante debido a las deformaciones que puedan sufrir. Se tiene el problema de que las leyes de la física no son de aplicación directa puesto que la identidad de la materia que ocupa una misma posición del espacio no se mantiene constante en el tiempo; hay que incluir información sobre los flujos de materia que entran y salen del entorno de cada posición. Siguiendo el ejemplo anterior de la conservación de la masa, si hubiera una compresión, el espacio ocupado por un número fijo de moles se reduciría; visto el problema desde un volumen fijo aumenta el número de moles (y, por lo tanto, la masa) por lo que se podría concluir con un análisis poco cuidadoso, y erróneo, que no se conserva la masa.

En la figura 3.1 se puede ver una imagen de un plato donde se ha mezclado pintura blanca con negra. En una descripción lagrangiana habría que detallar cómo cada porción de pintura negra ha ido describiendo cada una de las líneas negras visibles y cuánto se ha deformado. En una descripción euleriana se dividiría el plato en porciones fijas y la descripción se limitaría a la de la cantidad de pintura blanca y negra presente en cada porción en cada instante.

Definiciones.

A continuación vienen algunas definiciones empleadas en la cinemática de fluidos.

1) Línea de corriente: es una línea imaginaria que, para cada instante de tiempo, se define como la curva cuya tangente en cada punto es el vector velocidad. Ejemplo: en un movimiento circular sería una circunferencia. A partir de una descripción euleriana en la que se tiene la velocidad del flujo en cada punto del espacio para un instante dado, las líneas de corriente se obtienen siguiendo las direcciones indicadas por el vector velocidad.

2) Trayectoria: es el camino seguido por una partícula fluida. El lugar geométrico de las posiciones que ha ocupado una misma partícula a lo largo del tiempo. Ejemplo: el camino seguido por una burbuja de cerveza. La descripción lagrangiana del movimiento consiste en describir la trayectoria de cada una de las partículas de medio fluido que se hayan considerado incialmente, junto con la deformación que puedan haber sufrido éstas.



Figura 3.1: Plato de mezcla de pintura blanca y negra. Situación extremadamente viscosa y simple en comparación con la que se da en casos como la mezcla de tinta y agua o humo y aire.

3) Traza: es la línea formada por las partículas que han pasado por un mismo punto en instantes anteriores. Ejemplo: el penacho de una chimenea.

4) Tubo de corriente: objeto con forma de tubo formado por la unión de todas las líneas de corriente que pasan por un curva cerrada cualquiera, definida dentro del medio fluido.

5) Sección transversal: es la superficie limitada por la curva cerrada empleada para definir un tubo de corriente.

En la figura 3.2 se puede ver una ilustración de los conceptos de tubo de corriente y sección transversal.

NOTA.
Si el flujo es estacionario en sentido euleriano (la velocidad definida como función de la posición no cambia con el tiempo), las líneas de corriente, las trayectorias y las trazas son coincidentes.
En efecto, en el instante inicial cada partícula fluida sigue la trayectoria indicada en ese momento por la velocidad; si la velocidad, como función del espacio, no cambia con el tiempo, el proceso se repetirá desde la nueva posición espacial a la que haya llegado y la trayectoria irá siguiendo el camino descrito por las líneas de corriente; además todas las partículas que vengan detrás harán lo mismo por lo que la traza también será coincidente.
Si la velocidad cambia, tras llegar a una nueva posición, la partícula fluida se encuentra con un mapa de líneas de corriente distinto al que tenía en el instante previo y, por lo tanto, irá describiendo una trayectoria basada en las líneas de corriente cambiantes en cada instante que no coincidirá con ninguna línea de corriente global, todas ellas modificadas antes de que pueda recorrerlas; por su parte, las partículas que vengan detrás partirán ya desde su posición inicial con una velocidad distinta y describirán una trayectoria distinta, por lo que la traza no coincidirá ni con trayectorias ni con líneas de corriente.

6) Flujo infinitesimal: El flujo (transporte) de una propiedad, C, a través de un elemento de superficie, dS, viene dado por el producto de C por la componente de la velocidad perpendicular al elemento de superficie y por el valor del elemento de superficie, dS. En otras palabras: es el producto de la proyección perpendicular a la velocidad del elemento de superficie por la velocidad y por C.

$$d\Phi(C) = C\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$

7) Flujo: El flujo de una propiedad, C, a través de una superficie finita es la integral de todos los flujos infinitesimales sobre dicha superficie.

$$\Phi(C) = \int_S C\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS \tag{3.1}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie considerada de acuerdo al siguiente criterio de signos: para superficies cerradas se define siempre hacia fuera del volumen que queda encerrado por la superficie (flujo saliente positivo, flujo entrante negativo); para superficies abiertas queda una ambigüedad resoluble recurriendo al criterio de las fuerzas de presión: la normal apunta en dirección opuesta a aquella en la que se quiera computar el efecto de la presión. Ejemplo: una presa que sostenga agua, para calcular la fuerza

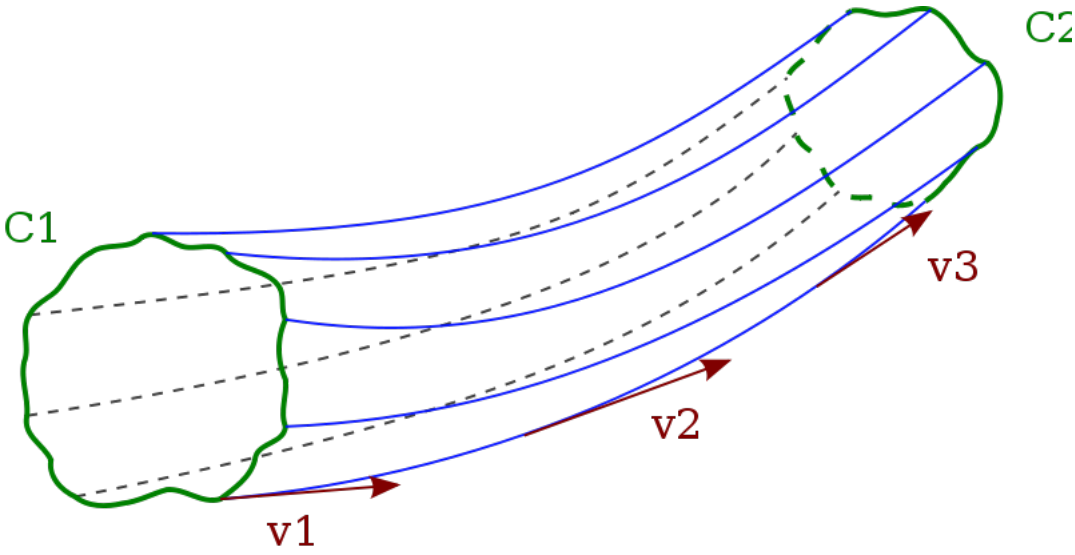


Figura 3.2: Líneas de corriente definiendo un tubo de corriente que une las secciones transversales $C1$ y $C2$. Vectores velocidad superpuestos, en tres puntos, para una de las líneas de corriente.

del agua sobre la presa se toma una normal dirigida desde la presa hacia el agua, para calcular la fuerza de la presa sobre el agua se toma una normal dirigida desde el agua hacia la presa; de este modo, se garantiza que la fuerza ejercida por la presión sobre un elemento de superficie viene dada por $-p\hat{n}\,dS$.

Nótese que, dada la definición de tubo de corriente, la normal a un tubo es perpendicular, en cada punto, a la velocidad en ese mismo punto, por lo que cualquier flujo será nulo a través de un tubo de corriente.

EJEMPLO.
Si en la fórmula 3.1 se trabajase con $C = 1$, se obtendría la expresión para el caudal o flujo volúmico, cuyas unidades son $[L]^3[T]^{-1}$; en el Sistema Internacional m^3/s.

3.2. Teorema del transporte de Reynolds.

Sirve para aplicar las leyes de la física, que de modo natural actúan sobre porciones del medio fluido entendidas en sentido lagrangiano, a una partición euleriana del espacio físico ocupado por el fluido.

Se considera por un lado un volumen fluido definido como el volumen

ocupado por una misma porción de medio fluido conforme avanza el tiempo y, por el otro, un volumen de control definido como una región arbitraria del espacio cuyo límite se llama superficie de control. Considérese ahora, para un instante de tiempo, un volumen de control arbitrario y el volumen fluido que, en ese instante (pero ni antes ni después) coincide con dicho volumen de control. El teorema queda así

Teorema 3.1 *Teorema del transporte de Reynolds: la variación temporal de cualquier magnitud física definible como una integral sobre un volumen fluido (por ejemplo, la masa contenida en un volumen fluido sería la integral de la densidad sobre dicho volumen) viene dada por la variación temporal de dicha magnitud en el interior del volumen de control que coincida con el volumen fluido en el instante tomado como referencia más el valor del flujo neto de la magnitud física en cuestión a través de la superficie de control.*

$$\frac{d}{dt}\int_{V_F} C\,dV = \int_{V_C} \frac{\partial C}{\partial t}\,dV + \oint_{S_C} C\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS \tag{3.2}$$

donde C es una magnitud física cualquiera.

El término a la izquierda representa la velocidad de variación total que experimenta una propiedad física definida en el interior del volumen fluido que puede estar desplazándose y deformándose con respecto al volumen de control y, por lo tanto, transportando consigo un flujo de la propiedad C a través de la superficie de control. A este término se le pueden aplicar de modo directo las leyes de la física.

El primer término a la derecha se llama término inercial y es la variación temporal computada en sentido euleriano dentro del volumen de control. ¿ Cuánto varía la propiedad medida dentro de un volumen fijo, no sigue el movimiento del fluido, de referencia? En situaciones estacionarias, como serán todas las consideradas en este curso, se anula, sea cual sea la propiedad física considerada.

El segundo término a la derecha se llama término convectivo y representa el balance entre los flujos salientes (signo positivo) y entrantes (signo negativo) de la propiedad estudiada a través de la superficie de control.

EJEMPLO.
Si en la fórmula 3.2 se trabajase con $C = 1$, se obtendría la expresión para las variaciones de volumen experimentadas por un elemento fluido sujeto a expansión o compresión.
Supóngase una expansión (compresión). En ese caso, la integral de la izquierda es el volumen ocupado por un elemento fluido y su derivada temporal es la derivada temporal del volumen ocupado por dicho elemento que es positiva para expansiones y negativa para compresiones. El término inercial se anula ya que C es constante. El término convectivo será positivo para las expansiones (al crecer el volumen ocupado por el elemento fluido, el efecto visto desde un volumen de control es que el fluido sale expulsado) y negativo para las compresiones (al decrecer el volumen ocupado por el volumen fluido, el efecto visto desde un volumen de control es que el fluido entra para ocupar el hueco dejado por el volumen fluido decreciente).
El teorema, en este caso, nos dice que la variación del volumen fluido no sólo coincide en signo con el flujo total sobre la superficie de control, sino que, además, sus valores coinciden.

3.3. Dinámica de fluidos. Conservación de masa.

Si se define un volumen fluido a través del volumen ocupado por un cierto número de moles que siempre sean los mismos, el principio de conservación de la masa nos dice que la masa contenida dentro de dicho volumen fluido será siempre la misma (mismo número de moles, misma masa) y, por lo tanto, su derivada temporal se anulará. Como la masa, sobre un volumen, se define como la integral de la densidad sobre dicho volumen, la aplicación del teorema del transporte de Reynolds a la densidad, $C = \rho$ en (3.2), quedará

$$\int_{V_C} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \oint_{S_C} \rho \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho\, dV = 0 \tag{3.3}$$

que recibe el nombre de ecuación de continuidad. El símbolo $\oint$ se emplea para indicar que la integral tiene lugar sobre una superficie cerrada (en este caso la de control).

En situaciones estacionarias, el primer término se anula. En situaciones incompresibles la densidad es constante y se puede extraer de la integral y

simplificar por lo que la expresión anterior queda, para situaciones estacionarias e incompresibles como

$$\oint_{S_C} \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{3.4}$$

que simplemente dice que la suma de todos los caudales entrantes es igual a la suma de todos los caudales salientes.

Simplificaciones para el uso de la ecuación de continuidad en problemas.

1) Se identifican las porciones de la superficie de control por las que está entrando o saliendo flujo. Se trata de secciones de control y de paredes móviles.

En efecto: sobre los tubos de corriente, la velocidad es perpendicular a la normal y no hay caudal; sobre las paredes la velocidad es la de la pared, para una pared fija $\vec{v} = \vec{0}$; para una pared móvil, siempre se puede considerar una superficie de control ligerísimamente separada de la propia pared y considerar que, el movimiento de ésta obliga a que el fluido situado en la capa de separación entre la pared y la superficie de control entre o salga del volumen de control con la misma velocidad que la propia pared.

2) O bien se puede suponer que los caudales son constantes sobre cada una de los elementos de superficie así definidos por lo que la integral sobre cada uno de ellos se reduce al valor del caudal multiplicado por el área del elemento correspondiente, o bien se cancelan las contribuciones por pares entrada-salida debido a la simetría del problema (por ejemplo, al analizar la porción de fluido de volumen constante situada entre dos pistones de la misma área que se mueven a la misma velocidad, ambos pistones formarían un par entrada-salida mutuamente cancelable), o bien queda alguna incógnita adicional que puede no resultar necesaria para resolver el problema planteado.

3) Se obliga a que la suma de caudales entrantes sea igual a la suma de caudales salientes.

Fluido bombeado por un pistón móvil.

Un pistón se mueve dentro de un cilindro de diámetro D a velocidad V, empujando un fluido incompresible a través de una válvula de diámetro d. ¿ Cuánto valdrá la velocidad de salida del fluido por la válvula, v_s ?

Analizando la superficie de control definida por S_p (pistón), S_c (pared fija del cilindro) y S_v (válvula), se tiene que, a través de la pared fija no

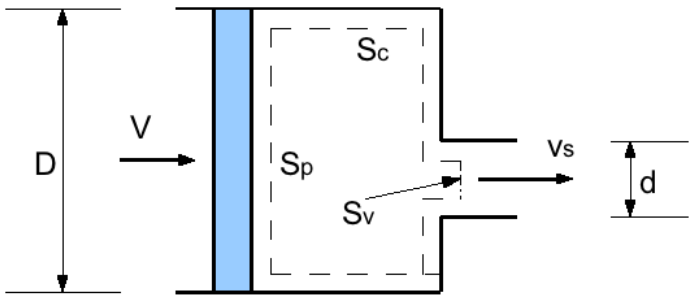


Figura 3.3: Pistón móvil empujando el fluido hacia una válvula.

hay caudal (velocidad nula), que la válvula se comporta como una salida (normal exterior apunta en el mismo sentido que v_s) de velocidad incógnita y que el pistón es una pared móvil que se comporta como una entrada (normal exterior apunta en sentido opuesto a V).

Aplicar la ecuación de continuidad, bajo las hipótesis de que la velocidad del fluido es constante sobre las secciones de entrada y salida conduce a

$$v_S S_v - V S_p = 0$$

como, además, $S_p = \pi D^2/4$ y $S_v = \pi d^2/4$, la solución final quedará

$$v_S = \frac{D^2}{d^2} V \tag{3.5}$$

Nótese que la solución de este problema sería válida incluso para situaciones no estacionarias (pistón moviéndose con una velocidad no constante) siempre que el fluido fuese incompresible, ya que, en ese caso, la densidad es constante y la ecuación de continuidad se reduce a la igualdad de caudales entrantes y salientes.

Vaciado de un depósito.

Sea un depósito cilíndrico de diámetro D, lleno de agua hasta una altura H con respecto a su fondo, donde tiene una tubería de desagüe de diámetro d. Si el depósito se vacía regulando el grifo de salida de modo que el caudal sea constante, ¿cómo variará H en función del tiempo?

El problema es similar al anterior, la figura 3.3 serviría para esquematizar el problema sin más que rotarla para que la salida apunte hacia abajo y eliminar el pistón para dejar el depósito en contacto con la atmósfera.

La solución vendrá dada sin más que emplear la definición de caudal, $Q = VS_p = V\pi D^2/4$, y tener en cuenta que $dH/dt = -V$ puesto que H disminuye.

$$H(t) = H_0 - \frac{4Q}{\pi D^2}t \tag{3.6}$$

3.4. Segunda ley de Newton.

La segunda ley de Newton establece que la derivada temporal de la cantidad de movimiento (también llamado momento lineal) de un sistema físico viene dada por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicho sistema.

Sobre un volumen cualquiera, de modo similar a como la masa se define a partir de la integral sobre todo el volumen de la densidad, el momento lineal se define como la integral sobre todo el volumen de la densidad de momento lineal: $\vec{p} = \int_V \rho\vec{v}\, dV$.

Como fuerzas, se considerará el peso, dado por la masa total del fluido multiplicada por la gravedad, $\int_V \rho\vec{g}\, dV$, y el esfuerzo total (dinámico más presión) que únicamente actúan sobre superficies.

La aplicación del teorema del transporte de Reynolds a la componente i-ésima de la densidad de momento lineal [2] queda

$$\begin{aligned}\int_{V_C} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t}\, dV + \oint_{S_C} \rho v_i \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = &- \int_{V_C} \rho g \delta_{i3}\, dV \\ &- \oint_{S_C} p n_i\, dS + \oint_{S_C} \tau_{ij}^{'} n_j\, dS\end{aligned} \tag{3.7}$$

que recibe el nombre de ecuación del movimiento de Cauchy. El símbolo δ_{i3}, que vale 0 excepto para $i = 3$ (eje z) en que vale 1, se ha introducido en el término del peso para representar que la gravedad sólo es no nula según la dirección vertical.

En situaciones estacionarias, el primer término se anula. En situaciones incompresibles la densidad, ρ, se puede extraer de las integrales y simplicar si se sustituye la presión, p, y el esfuerzo dinámico, $\tau^{'}$, por p/ρ y $\tau^{'}/\rho$, respectivamente. Si el flujo es no viscoso, se desprecia el esfuerzo dinámico y el quinto término se anula. Igualmente, se puede considerar que la contribución del término viscoso es despreciable (quinto término nulo) sobre secciones transversales de entrada o salida.

[2] i representa una componente genérica, puede valer tanto x ó 1, como y ó 2, como z ó 3.

Indicaciones para su uso en problemas.

1) Se considera por separado cada una de las componentes del vector momento lineal que sea necesaria para el problema.

2) Las secciones de entrada y salida se identifican como en el caso de la ecuación de continuidad.

3) La presión actúa sobre todas las superficies en dirección normal a la misma y sentido dado por $-\hat{n}$. Sólo resulta fácil de calcular sobre secciones de entrada y salida; sobre paredes, su efecto neto se puede incluir en una fuerza de pared global junto con la contribución viscosa que sea o bien un dato, o bien una incógnita.

4) En dirección vertical la presión tiene una contribución hidrostática para compensar el peso.

5) Para tubos de corriente que se engruesan o adelgazan, es útil considerar superficies proyectadas sobre una sección de entrada o de salida del tubo (la de menor área).

6) El término viscoso sólo puede ser significativo sobre paredes. Su contribución global (junto con la contribución de la presión sobre las mismas paredes) es o bien un dato, o bien una incógnita.

7) Puesto que una presión uniforme no induce fuerza neta tras integrarla sobre una superficie cerrada, se puede reescalar el valor de la presión por una cantidad fija en todos los cálculos; por ejemplo, se podría trabajar con presiones relativas a la atmósferica en lugar de absolutas.

Fuerza para sostener una bifurcación simétrica.

Un flujo estacionario dentro de una tubería se bifurca como indica la figura 3.4. La densidad vale $\rho = 1000 kg/m^3$. Despreciando la gravedad, ¿qué fuerza hay que aplicar para sostener la bifurcación?

Por la simetría del problema (misma configuración hacia arriba y hacia abajo) el caudal por S_1 y S_2 es el mismo. La ecuación de continuidad queda $V_e S_e = V_s(S_1 + S_2)$, por lo que se tendrá un caudal de $10 m^3/s$ y una velocidad a la salida de $V_s = 12,5 m/s$.

Por la simetría del problema y porque la gravedad es despreciable, no hace falta calcular nada en dirección vertical.

El momento lineal en dirección horizontal quedará:

$$\rho V_s \cos(30^0) Q - \rho V_e Q = p_e S_e - (p_1 S_1 + p_2 S_2)\cos(30^0) + F_{pared->fluido}$$

donde sólo hay que tener cuidado con los flujos de momento lineal y las fuerzas de presión que actúan sobre S_1 y S_2, ya que hay que proyectarlos en dirección horizontal. El criterio de signos para los flujos de momento lineal

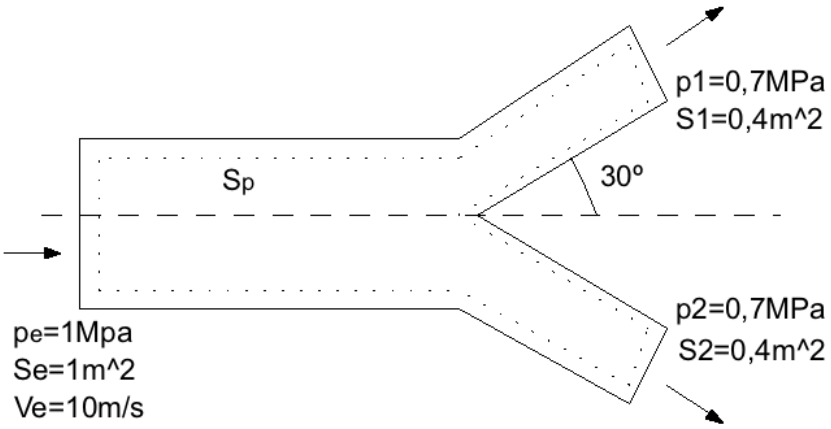


Figura 3.4: Bifuración bajo ángulo interno de apertura de 60^0, 30^0 por cada brazo, de una tubería.

es el mismo que el de caudales; en cuanto a la fuerza causada por la presión sobre las secciones de entrada y salida, su dirección y sentido vienen dados por $-\hat{n}$.

El resultado final, tras sustituir valores numéricos es:

$$F_{p->f} = -506,7N \tag{3.8}$$

Chorro por una boquilla.

Descarga un chorro por una boquilla acoplada a una manguera. ¿Qué fuerza deberá ser aplicada por la persona que sujete la manguera? Desprecie el efecto de la gravedad.

Por la simetría del problema y porque la gravedad es despreciable, la única dirección en la que hay que computar momentos lineales y fuerzas es el eje x.

Por continuidad: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$.

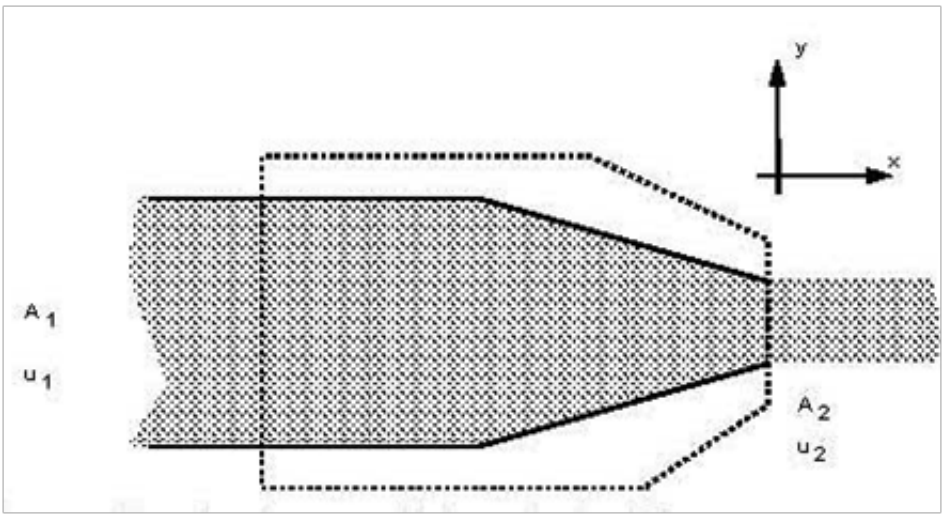


Figura 3.5: Esquema de una boquilla a la salida de una tubería.

Particularizando la ecuación del movimiento de Cauchy a este caso:

$$\rho v_2 Q - \rho v_1 Q = -p_2 A_2 + p_1 A_1 + F_{Rx} \tag{3.9}$$

donde F_{Rx} será la fuerza que habrá que aplicar a la manguera para que el chorro pueda ganar momento lineal en el paso de 1 a 2.

En la salida de un conducto (sección 2 en este problema) se tiene una presión igual a la ambiental (atmosférica en este caso). Por otra parte en la sección 1 se puede considerar que la presión del fluido es la atmosférica de referencia más una presión relativa con respecto a ella. Las caras laterales del volumen de control también están en contacto con la atmósfera por lo que, también se podrá considerar que su acción sobre el chorro se puede descomponer en la suma del efecto de la presión atmosférica, tomada como referencia, más el de una presión relativa a la atmosférica, más la contribución del esfuerzo dinámico. El resultado global es que se tiene una presión igual a la atmosférica actuando sobre toda la superficie de control, por lo que su fuerza neta será nula y se podrá trabajar con presiones relativas a la atmosférica [3]. En ese caso, la ecuación (3.9) queda

$$F_{Rx} = \rho v_2 Q - \rho v_1 Q - p_1 A_1 = \rho Q^2 (1/A_2 - 1/A_1) - p_1 A_1 \tag{3.10}$$

y el problema podría ser resuelto conocidas las áreas, el caudal y la presión en una sección interior a la tubería. De todos ellos, el único que ofrece

[3]Visto de otro modo, la fuerza aplicada exteriormente tiene que ser la responsable de que el momento lineal cambie entre 1 y 2, pero no tiene que enfrentarse en ningún punto a la presión atmosférica actuando sólo por un lado.

alguna dificultad en su proceso de medida experimental es el último. Si el flujo procediera de un mismo depósito y despreciando las pérdidas por fricción, se podría aplicar la ecuación de Bernouilli entre los puntos 1 y 2, junto con la de continuidad, para despejar p_1 (y por lo tanto F_{Rx} como función de las áreas y del caudal; pero esto se verá en la próxima sección.

3.5. Primer principio de la termodinámica.

La energía total se define como la suma de la energía interna más la mecánica. En fluidos, para un volumen cualquiera, su valor se obtendrá como la integral de volumen de la densidad de energía total: $\int_V \rho(u + v^2/2 + gz)\, dV$; con ρu densidad de energía interna; $\rho v^2/2$ densidad de energía cinética; ρgz densidad de energía potencial gravitatoria; unidades: J/m^3.

El primer principio de la termodinámica, para la energía total queda así: la derivada temporal de la energía total contenida en un volumen fluido será igual al flujo de calor que se le suministre externamente menos la potencia mecánica ejercida por el medio fluido sobre la superficie que lo limita. Aplicando el teorema del tranporte de Reynolds para la energía total

$$\begin{aligned}\int_{V_C} \frac{\partial \rho(u + v^2/2 + gz)}{\partial t}\, dV + \oint_{S_C} \rho(u + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = \\ - \oint_{S_C} p\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS + \oint_{S_C} v_i \tau'_{ij} n_j\, dS + \dot{Q}_{ext}\end{aligned} \tag{3.11}$$

En situaciones estacionarias el primer término se anula. Si no hay flujo de calor, el término correspondiente se anula. Los términos de trabajo sobre la superficie de control se anulan para paredes fijas (aunque no para paredes móviles). Sobre las secciones de entrada y salida, el término dependiente del esfuerzo dinámico se puede despreciar (no así el dependiente de la presión). En resumen, con flujo estacionario, sin paredes móviles, ni suministro de calor, la ecuación (3.11) se simplifica a

$$\oint_{S_C} \rho(u + p/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{3.12}$$

donde el término dependiente de la presión (que no se anula, en general, para entradas y salidas) se ha pasado a la izquierda de la igualdad. La expresión (3.12) se considera como la versión compresible de la ecuación de Bernouilli en formato integral.

La energía interna está acoplada (transferencias de energía entre una y otra) con la mecánica a través del trabajo de dilatación y compresión (dilatación positiva como energía mecánica, negativa como energía interna) que se anula para el caso incompresible (no hay ni expansiones, ni contracciones) y, también, a través de la disipación viscosa que tiene lugar, como proceso termodinámico irreversible, en el interior de cada volumen de control considerado, convirtiendo energía cinética en interna.

En resumen, para el caso incompresible y no viscoso, la energía interna de desacopla (no hay intercambios entre ambas)de la mecánica; por lo que deberá satisfacer por separado las mismas igualdades que el resto de los términos por su parte. La ecuación (3.12) queda:

$$\oint_{S_C} (p/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{3.13}$$

que se puede considerar como la versión integral de la ecuación de Bernouilli incompresible.

Habitualmente, se entiende por ecuación de Bernouilli la hipótesis de que $p/\rho + v^2/2 + gz$ es una constante para todo el flujo que, por lo tanto, se puede extraer de la ecuación (3.13) que se convierte en el término constante de Bernouilli multiplicado por la ecuación de continuidad; la ecuación de la energía se vuelve redundante bajo la hipótesis de Bernouilli.

Hay tres versiones de la ecuación de Bernouilli para flujos incompresibles y resulta inmediato el paso de unas a otras sin más que multiplicar o dividir por la densidad y la gravedad de la Tierra.

$$\begin{aligned} p/\rho + v^2/2 + gz &= \text{constante} \\ p/ + \rho v^2/2 + \rho g z &= \text{constante} \\ \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z &= \text{constante} = H \end{aligned}$$

donde la constante de la última versión recibe el nombre de altura hidráulica.

Limitaciones y uso justificado.

Aparte de las hipótesis mencionadas en la derivación de la ecuación de Bernouilli: flujo estacionario, incompresible, sin paredes móviles y sin pérdidas por viscosidad; hay que tener en cuenta una restricción adicional. La hipótesis de que el término de Bernouili sea una constante para todo el flujo sólo se cumple para flujos que provengan de un mismo depósito o de una misma región de la atmósfera; pero no en general.

La explicación es muy sencilla. Si se tiene un depósito en reposo, $v = 0$, la ecuación de Bernoulli se reduce a la de la hidrostática y se cumple para todo el flujo sin necesidad de hipótesis adicionales una vez que se haya abierto un desagüe: la energía potencial que se pierde al profundizar se gana en el término de presión. Ahora, supóngase que se tienen dos depósitos a distinta altura, resulta obvio que, en reposo, cada uno tendrá una constante de Bernouilli (hidrostática) distinta, si se conecta una tubería de desagüe a cada depósito y se mezclan los flujos resultantes, resulta obvio que en el flujo mezclado habrá dos valores distintos de la constante de Bernouilli. Este proceso se puede repetir hasta llegar al extremo de suponer que, a cada línea de corriente dentro de un mismo flujo, le corresponda un valor distinto para la constante de Bernouilli.

En los problemas que se resolverán en este curso introductorio se supondrá siempre que o bien el flujo procede de un mismo depósito o bien lo hace desde una misma región de la atmósfera con velocidad uniforme.

Medidor Venturi.

Es una tobera convergente-divergente usada para medir caudales que funciona bajo la suposición de que la ecuación de Bernouilli es de aplicación a todo el flujo que circula por la misma. En principio, sólo funciona como medidor de caudales en el régimen incompresible ya que en el régimen compresible podría convertirse en una tobera supersónica con formación de ondas de choque. En la figura 3.6 se puede ver un esquema de su funcionamiento.

Aplicando la ecuación de continuidad entre las secciones 1 y 2, se tiene que Caudal $= Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$.

Aplicando la ecuación de Bernouilli para flujo incompresible entre 1 y 2 y asumiendo que las variaciones de altura (el efecto gravitatorio) son despreciables.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \tag{3.14}$$

NOTA.
Ésta última suposición está justificada siempre que la variación de la presión en vertical se limite a compensar hidrostáticamente el efecto del peso; en ese caso, se puede suprimier el peso y la componente hidrostática de la presión por cancelarse mutuamente.
En general, siempre que no haya velocidades en vertical, se cumple la condición anterior: el comportamiento en vertical del flujo es como el del caso hidrostático e irrelevante a efectos hidrodinámicos.

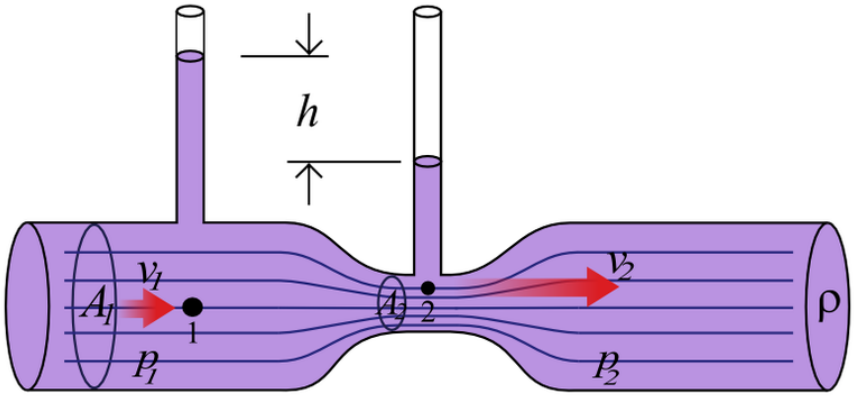


Figura 3.6: Esquema de un caudalímetro Venturi.

Poniendo las velocidades en la ecuación (3.14) en función del caudal gracias a la relación debida a la continuidad.

$$p_1 + \rho\frac{Q^2}{2A2^2} = p_2 + \rho\frac{Q^2}{2A_1^2}$$

$$2(p_1 - p_2) = \rho Q^2\Big(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\Big)$$

Por otra parte la diferencia de presiones entre 1 y 2 viene dada por $p_1 - p_2 = \rho g h$, por lo que el caudal se obtiene a partir de

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{1/A_2^2 - 1/A_1^2}}$$

Para tener en cuenta las pérdidas por fricción entre la sección 1 y la sección 2, el frabricante suministra un parámetro η de valor entre $0,98$ y $0,99$, típicamente, por el que multiplicaría la expresión anterior. Es decir:

$$Q = \eta\sqrt{\frac{2gh}{1/A_2^2 - 1/A_1^2}}$$

con η dato de fábrica y valor entre $0,98$ y $0,99$ para los venturímetros de buena calidad.

Chorro por una boquilla.

Se trata del mismo ejemplo considerado en el análisis por variación de momento lineal, ver figura 3.5, en el que se acabó llegando a una expresión para la fuerza externa a aplicar para sujetar la boquilla de valor dado por la ecuación (3.10) que se repite a continuación

$$F_{Rx} = \rho v_2 Q - \rho v_1 Q - p_1 A_1 = \rho Q^2 (1/A_2 - 1/A_1) - p_1 A_1$$

Suponga que se tiene como datos: diámetro de la sección 1, $D_1 = 10cm$, diámetro de la sección 2, $D_2 = 5cm$, velocidad del chorro a la salida de boquilla, $v_2 = 8m/s$, y densidad del agua, $\rho = 1000kg/m^3$.

Ahora se trata de aplicar Bernouilli para despejar el valor de p_1 en función de la geometría de la boquilla (áreas A_1 y A_2) y del caudal, Q, fluyente.

Recordando el problema, se trata de una situación en la que el efecto de la gravedad es despreciable y en el que se trabaja sólo con contribuciones a la presión relativas a la atmosférica ya que ésta actúa por todas las caras dando un efecto total nulo. En la sección 2 se tiene un chorro en contacto con la atmósfera por lo que su presión absoluta será la atmosférica y la relativa a la atmósfera será nula. Bernouilli entre 1 y 2 queda

$$p_1 + \rho v_1^2/2 = \rho v_2^2/2$$

y expresando las velocidades como caudal partido por área (a partir de continuidad)

$$p_1 = \rho Q^2/2(1/A_2^2 - 1/A_1^2)$$

que sustituido en la ecuación (3.10) da la siguiente expresión

$$F_{Rx} = \rho Q^2 \Big(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} - \frac{A_1}{2A_2^2} + \frac{1}{2A_1} \Big)$$

Que se puede simplificar a

$$F_{Rx} = \rho Q^2 \Big(\frac{1}{2A_2} \Big(2 - \frac{A_1}{A_2} \Big) - \frac{1}{2A_1} \Big)$$

Y sustituyendo $Q = v_2 A_2$, se llega a

$$F_{Rx} = \rho v_2^2 \Big(\frac{2A_2 - A_1}{2} - \frac{A_2^2}{2A_1} \Big) = \rho v_2^2 \frac{2A_2 A_1 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1}$$

Y poniéndolo todo en función de los diámetros, $A_1 = \pi D_1^2/4$ y $A_2 = \pi D_2^2/4$.

$$F_{Rx} = -\rho v_2^2 \frac{(A_1 - A_2)^2}{2A_1} = -\rho v_2^2 \frac{\pi (D_1^2 - D_2^2)^2}{8D_1^2} \qquad (3.15)$$

Mal planteado. No s

$$F_{Rx} = -141,4N$$

La fuerza resultante es negativa, implicando que habrá que tirar de la manguera en dirección opuesta al chorro y con una intensidad de $141,4N$ para poder aplicar esa fuerza sobre el fluido y que la situación se mantenga estacionaria; en este caso, eso significa evitar que la manguera salga disparada hacia delante por efecto del arrastre inducido por el agua.

Ecuación de la chimenea.

Se trata de determinar el tiro de una chimenea, cuánto
puede evacuar en función de su altura y de la diferencia d
entre el aire caliente en el interior de la chimenea y el aire frí

Es un problema compresible representado esquemáticame
3.7, el aire se calienta en el hogar, disminuye su densidad y
tubo de la chimenea, la densidad con la que entra, ρ_1, es
mientras que la densidad con la que sale, ρ_2, es la del aire
provoca unas fuerzas de flotación que empujan al aire calien

Se aplica la versión de la ecuación de continuidad para flu
y se tiene que $\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2 = Q_M$, donde Q_M es el ga
caudal a la salida de la chimenea, la incógnita, viene dado por
$S_2 V_2$.

A continuación se aplica la ecuación de variación de la en
que se obtiene a partir de la ecuación de variación de la ener
miento la energía interna y el flujo de calor (que afecta a la e
y, añadiendo en cuenta, los términos que acoplan a la energí
la interna: la disipación viscosa y el trabajo de expansión-co
preciando la disipación viscosa. La ecuación de conservació
mecánica para flujo compresible quedará, a partir de la e
como

$$\oint_{S_C} \rho(p/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = \int_{V_C} p \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\, dV$$

donde el término a la derecha representa la potencia de expa
o compresión (negativa). Si se recuerda el análisis del térmi
esfuerzo para un fluido newtoniano, la ley de Navier-Poisso
1.3, se comprobará que $\partial v_k / \partial x_k$ era la velocidad de deforma

La clave para entender este problema es que se supone q
variaciones de presión inducidas por la altura, éstas sólo son r
el punto de vista mecánico para causar flotabilidad; pero que
de vista termodinámico, el gas tanto dentro como fuera de
puede tratar como un gas ideal a presión atmosférica. Es d

Hay que aplicar:1) En entradas y salid

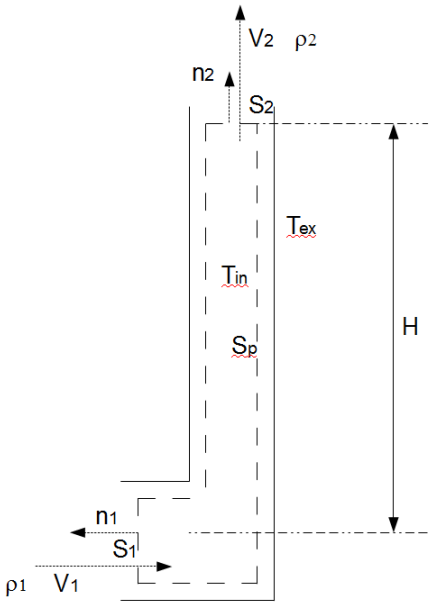


Figura 3.7: Esquema simplificado de una chimenea.

que las variaciones de presión son muy pequeñas en comparación con la presión media atmosférica en los términos termodinámicos donde aparece la presión absoluta pero que, de todos modos, influyen a la capacidad de flotación del aire caliente sobre el frío por actuar en ese caso por diferencias (presiones relativas de un punto respecto a otro). Esto significa que, en el segundo término de la ecuación (3.16) la presión se puede sacar de la integral y suponerla constante e igual a la atmosférica (es un término que depende del valor absoluto de la presión). Ese segundo término quedará

$$p \int_{V_C} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \, dV$$

que por un teorema de análisis matemático llamado teorema de la divergencia se puede convertir en una integral de sobre la superficie que limita a V_C

$$p \oint_{S_X} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

que se puede sustituir en la ecuación (3.16) para obtener

$$\oint_{S_C} \rho(p/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n} \, dS - p_{atm} \int_{S_C} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \qquad (3.17)$$

Expresión válida siempre que la presión, en valor absoluto, se pueda tomar como constante (variaciones de presión despreciables frente a su valor medio).

Puesto que, de acuerdo a la figura sólo hay entradas y salidas de flujo por la entrada al hogar, 1, y la salida de la chimena, 2, se aplica a esos dos puntos la ecuación (3.17) suponiendo que los integrandos son constantes sobre cada superficie de integración

$$p_2 v_2 S_2 + (v_2^2/2)Q_M + gHQ_M - p_1 v_1 S_1 - (v_1^2/2)Q_M = p_{atm}(v_2 S_2 - v_1 S_1)$$

donde se ha empleado de modo sistemático la relación de continuidad $Q_M = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$. La presión a la entrada del hogar se corresponde con la presión externa en ese punto, es decir, la atmosférica a nivel de suelo, $p_1 = p_{atm}$. Por su parte la presión en la parte superior de la chimenea se corresponde con la presión atmosférica a nivel de una altura H que, para diferencias de altura pequeñas se puede aproximar aerostáticamente por $p_2 = p_{atm} - \rho_1 gH$. Este último punto es el más importante: se asume que las variaciones de densidad en el aire exterior a la chimenea son despreciables para una altura H; por otra parte, hay que tener en cuenta que S_2 está abierto a la atmósfera exterior por lo que la densidad que hay que emplear en la expresión aerostática correspondiente se corresponde a la del aire frío externo en lugar de a la del aire caliente interno.

Hechas las salvedades previas y pasando todos los términos que dependen de la presión a la derecha, se llega a

$$(v_2^2/2)Q_M + gHQ_M - (v_1^2/2)Q_M = \rho_1 gH v_2 S_2 = (\rho_1/\rho_2)gHQ_M$$

y simplificando Q_M, quedará

$$(v_2^2/2) - (v_1^2/2) = [(\rho_1/\rho_2) - 1]gH$$

Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal y aplicando la versión de la ecuación de estado de los gases ideales en función de la densidad másica en lugar de en función del número de moles y el volumen, $p = \rho R^* T$, se tendrá que $\rho_1 = p_{atm}/(R^* T_{ex})$ y $\rho_2 = p_{atm}/(R^* T_{in})$

Por lo que, finalmente, se obtendrá la ecuación de la chimenea

$$Q = S_2\sqrt{v_1^2 + 2gH\frac{T_{in} - T_{ex}}{T_{ex}}}$$

En la literatura, esta ecuación se suele encontrar en la siguiente versión

$$Q = CS_2\sqrt{2gH\frac{T_{in} - T_{ex}}{T_{ex}}}$$

donde C recibe el nombre de coeficiente de descarga y es un coeficiente experimental que sirve para compensar los errores introducidos por las hipótesis empleadas: no fricción, no variaciones de presión en los términos termodinámicos, ... además del error introducido por la suposición implícita en esta variante de la ecuación de la chimenea de que la velocidad del aire a la entrada del hogar, v_1 es despreciable frente a v_2 [4]

3.6. Viscosidad y turbulencia.

De todas las hipótesis planteadas en los análisis previos, la de despreciar el efecto de las pérdidas internas causadas por fricción (suponer coeficientes de viscosidad nulos en la ley de Navier-Poisson) es la que menos sentido tiene en flujos realistas.

Supóngase un flujo descompuesto en un gran número de volúmenes de control.

Si el transporte de momento lineal, debido al caudal que fluye entre distintos volúmenes de control, es menor que la fuerza producida por los esfuerzos viscosos sobre las superficies de control por las que tiene lugar el flujo, las líneas de corriente son muy regulares y estables; las capas de fluido resbalan ordenadamente como las cartas de una baraja.

En el caso contrario (el transporte por caudal domina sobre los esfuerzos viscosos), el flujo se desordena, aparecen componentes caóticas con estructura de remolinos (también llamados torbellinos o vórtices) de tamaños muy diferentes y el transporte global de la energía se dirige desde los torbellinos grandes, hacia los pequeños donde la energía finalmente se disipa en forma de calor (término de fricción interno a cada volumen de control).

A las escalas donde tiene lugar la disipación, el flujo parece localmente laminar, el problema viene cuando se aumenta la escala de visibilidad y esas pequeñas zonas laminarizadas se enlazan configurando una estructura caótica de vórtices a escalas intermedias y grandes.

Experimentalmente, se sabe que la transición entre un régimen y otro está controlada por el número de Reynolds, definido como: $Re = \rho V D/\mu$. Se trata del número adimensional que se obtiene combinando la densidad media de momento lineal del flujo, ρV, la escala característica de variacipn de sus propiedades, D, y el coeficiente de viscosidad dinámica, μ. La inmensa

[4]Esta suposición tiene sentido si el aire está mucho más caliente a la entrada que a la salida y las áreas de ingesta de aire y de salida del mismo son del mismo orden de magnitud. En ese caso, la conservación de masa implica que $v_2 >> v_1$ para mantener el gasto másico constante con una densidad mucho menor.

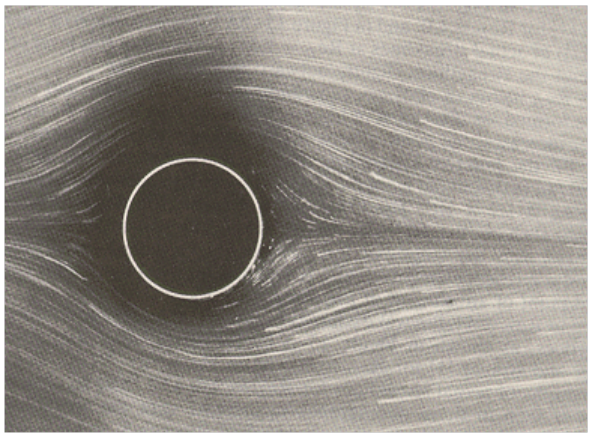


Figura 3.8: Flujo laminar alrededor de un cilindro.

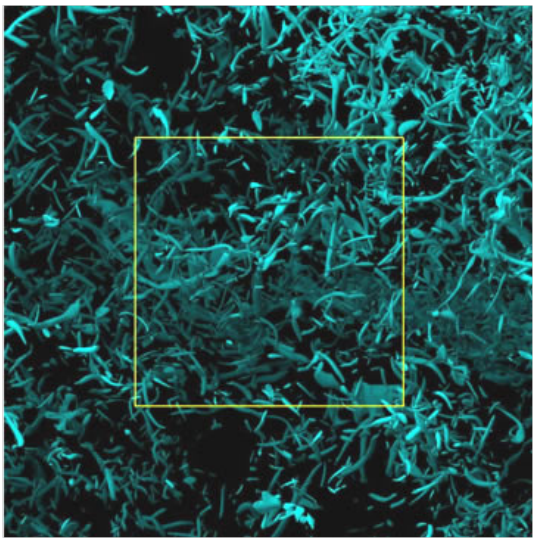


Figura 3.9: Flujo turbulento a escala media.

mayoría de los flujos que tienen lugar en la naturaleza son turbulentos. Una notable excepción es el flujo sanguíneo en individuos sanos.

Las pérdidas viscosas se pueden representar por una pérdida de altura hidráulica en la ecuación de Bernouilli. Se plantearía que la altura hidráulica a la salida sería igual a la altura hidráulica a la entrada menos la altura hidráulica equivalente a las pérdidas por fricción. Este último parámetro o bien se toma como dato a partir de tablas tabuladas, o bien es la incógnita a determinar.