AERODINÁMICA.

CUD de Zaragoza.

15 de noviembre de 2019

1. Introducción.

Para una introducción sobre la importancia de la aerodinámica en el estudio del comportamiento de los misiles, véase la sección 3.1 de **?**.

El resto de este tema se estructura es dos bloques: Fundamentos de Mecánica de Fluidos y Fundamentos de Aerodinámica. Las referencias empleadas para redactar el primer bloque son **?** y **?**. Para el segundo bloque se ha empleado **?**, **?**,**?**, **?**, **?** y **?**.

A continuación algunos comentarios sobre el epígrafe 3.1.2 de **?**.

A efectos aerodinámicos, la velocidad importante es la velocidad relativa entre la aeronave y el aire circundante. Si no sopla viento, concide con la velocidad con respecto a una referencia en tierra; pero si sopla viento, la velocidad de la aeronave, relativa al viento se convierte en $\vec{v}_{misil-viento} = \vec{v}_{misil-tierra} - \vec{v}_{viento-tierra}$. Cuando la velocidad del misil relativa a tierra es mucho mayor que la del viento, se puede despreciar el efecto de éste último y dejarlo como una fuente de error a compensar por el sistema de control de la aeronave.

Los ejes de guiñada, cabeceo y balanceo o alabeo (yaw, pitch and roll en inglés) son unos ejes intrínsecos a la propia aeronave (no dependen de ninguna referencia externa) que sirven para determinar completamente los giros de la aeronave, entendida como sólido rígido, desde una determinada orientación hasta otra. Los ángulos girados con respecto a cada uno de esos ejes reciben el mismo nombre que los respectivos ejes; así, hay ángulos de guiñada, de cabeceo y de balanceo (o alabeo).

El eje de balanceo es el eje longitudinal.

En aeronaves con un plano de simetría, el eje de guiñada es el eje perpendicular al longitudinal que está contenido en el propio plano de simetría y el eje de cabeceo es el perpendicular a los otros dos. Véase la figura 1 y la figura 6 del capítulo 2 de **?**.

En aeronaves con múltiples planos de simetría, el eje de guiñada es el eje perpendicular al eje longitudinal que está contenido en un plano de simetría orientado verticalmente (la vertical pertenece al plano) y el de cabeceo es el perpendicular a los otros dos. Véase la figura 1 y la figura 1 del capítulo 3 de **?** en la que el eje Z sería el de guiñada, el eje Y el de cabeceo y el eje X el de balanceo.

Ángulo de ataque. Se representa por α. En aeronaves con un plano de simetría es el ángulo entre la proyección del vector velocidad sobre dicho plano de simetría y el eje longitudinal de la aeronave. En aeronaves con múltiples planos de simetría es el ángulo entre la proyección del vector velocidad sobre un plano de simetría orientado verticalmente y el eje longitudinal de la aeronave.

Ángulo de deslizamiento. Se representa por β. En aeronaves con un plano de simetría es el ángulo que sirve para proyectar el vector velocidad sobre dicho plano (el ángulo complementario al

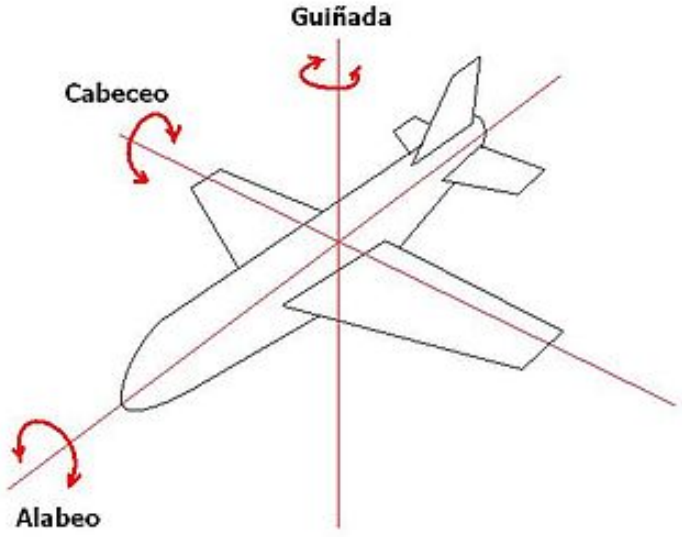


Figura 1: Los tres ejes de rotación principales de un avión.

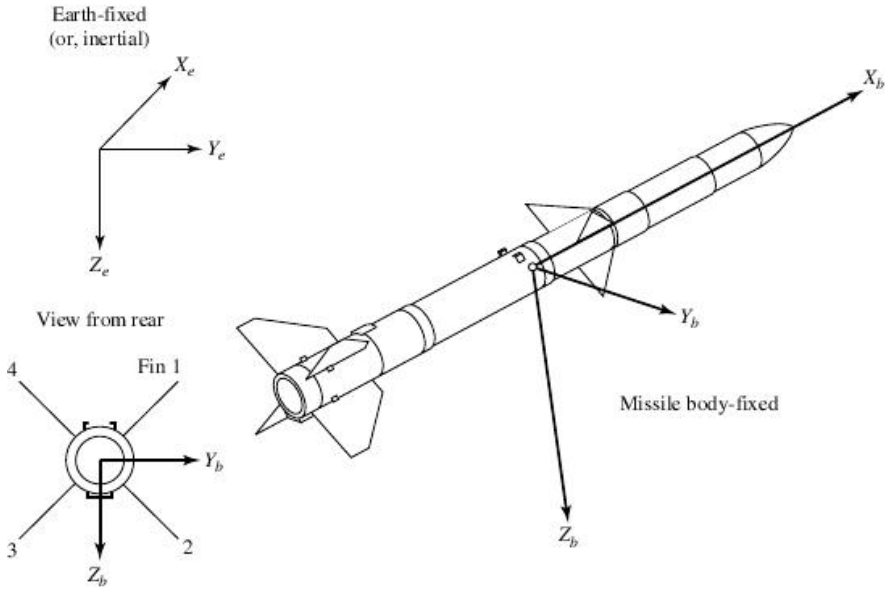


Figura 2: Los tres ejes de rotación principales de un misil con alta simetría, en comparación con unos ejes inerciales asociados a tierra.

ángulo entre el vector y la perpendicular al plano de simetría). En aeronaves con múltiples planos de simetría es el ángulo que sirve para proyectar el vector velocidad sobre un plano de simetría orientado verticalmente.

Una maniobra del misil que consistiera en rotar el eje longitudinal del misil mediante un cabeceo igual al ángulo de ataque, con signo cambiado, seguido de una guiñada igual al ángulo de deslizamiento, con signo cambiado, haría que el eje longitudinal del misil quedase alineado con su vector velocidad.

Toda el estudio de las fuerzas y momentos de origen aerodinámico se puede reducir a los siguientes pasos:

1) Descomponer la superficie de contacto entre un sólido y el aire circundante en un conjunto de elementos discretos de tamaño infinitesimal.

2) Obtener el campo de presiones y de velocidades del fluido alrededor del sólido. A partir del campo de velocidades, obtener los esfuerzos dinámicos sobre el fluido. Las presiones son, directamente, los esfuerzos estáticos, presentes incluso cuando el fluido está en reposo.

4) Asignar a cada uno de los elementos en que se ha dividido la superficie de contacto el valor de los esfuerzos que se hayan calculado para dichos elementos a partir del comportamiento del medio fluido, con el signo cambiado. Por el principio de acción-reacción, se obtienen de ese modo las fuerzas que el fluido ejerce sobre el sólido.

5) Integrar (sumar sobre todos los elementos de la discretización) los valores de las fuerzas y de sus momentos con respecto al centro de gravedad. El resultado será la fuerza aerodinámica total y el momento aerodinámico total. Por estar trabajando en tres dimensiones, ambas resultantes tendrán, en general, tres componentes cada una.

6) El centro de presiones, CP, se define como el punto con respecto al cual el momento resultante de las fuerzas aerodinámicas se anula y que, además, se encuentre a distancia mínima del eje longitudinal de la aeronave. Recordando la asignatura de Mecánica, si la fuerza total se supone aplicada en el centro de presiones, su momento con respecto al c.d.g. será igual al momento total previamente calculado. Puesto que las fuerzas son vectores deslizantes, la condición de momento nulo se cumple sobre toda la línea paralela a la propia fuerza que pase por el centro de presiones; hay una indeterminación en la posición exacta del CP que se resuelve añadiendo la condición de que se encuentre a distancia mínima [1] al eje longitudinal de la aeronave.

El punto 2) es el más complejo del esquema previo. Aunque modernamente los ordenadores ya empiezan a tener potencia de cálculo suficiente como para atacar ese problema, históricamente el desarrollo de la Aerodinámica partió del uso de modelos simplificados y de datos empíricos. Este enfoque para el estudio de la matería tiene la ventaja de que proporciona más intuición física sobre la naturaleza de los fenómenos que están ocurriendo que una resolución numérica de las ecuaciones que regulan la dinámica de un medio fluido.

Las fuerzas y momentos aerodinámicos se pueden estudiar según dos sistemas de referencia asociados al propio misil: uno basado en el eje longitudinal del misil y otro basado en su vector velocidad.

[1] En el caso óptimo estaría superpuesto

1) Tomando como ejes de referencia los de balanceo (eje X), cabeceo (eje Y) y guiñada (eje Z). Es decir, el eje longitudinal del misil y dos ejes perpendiculares al mismo y entre sí, uno de ellos superpuesto a o bien el plano de simetría de la aeronave (sistemas con un plano de simetría), o bien el plano de simetría de la aeronave con orientación vertical (sistemas con muchos planos de simetría).

2) Tomando como ejes de referencia el vector velocidad (eje X) relativa del aire con respecto a la aeronave y dos ejes perpendiculares al mismo. Uno de ellos (eje Z) contenido en el plano de simetría en sistemas con un sólo plano y el otro (eje Y) perpendicular a los otros dos. En sistemas con muchos planos de simetría se considera aquél plano de simetría que contenga a la vertical a la hora de definir el eje X.

Según el primer sistema de referencia, las componentes de la fuerza aerodinámica resultante reciben el nombre de axial, A, según el eje de alabeo; normal, N, según el eje de guiñada; y lateral (side en inglés), S, según el eje de cabeceo.

Según el segundo sistema de referencia, las componentes de la fuerza aerodinámica resultante reciben el nombre de arrastre (drag en inglés), D, en paralelo a la velocidad, eje X; sustentación (lift en inglés), L, según el eje Z; y cruzada (crosswind en inglés), C, según el eje Y.

Para los momentos, se emplea la misma nomenclatura, según el eje al que corresponda cada componente en el sistema de referencia elegido.

En la figura 5 de **?** se puede ver una representación simultánea de estas dos posibles descomposiciones de las fuerzas en unas vistas que son de perfil (imagen superior) y de planta (imagen inferior).

Convenio no usual. En **?** se da la impresión de que la fuerza axial es sólo la componente del arrastre en paralelo al eje longitudinal, mientras que la fuerza normal es sólo la componente de la sustentación en perpendicular a dicho eje. Este convenio no es el más usual en los textos de Aerodinámica, **?** ó **?**, donde las fuerzas axiales y normales son las componentes totales según el eje de la aeronave o en perpendicular al mismo. En efecto, de acuerdo al convenio usado por **?**, la sustentación también tendría una componente en paralelo al eje longitudinal que no menciona y el arrastre también tendría una componente en perpendicular a dicho eje, que tampoco menciona.

2. Fundamentos de Mecánica de Fluidos.

2.1. Medios continuos.

Un medio o material continuo es aquél cuyas propiedades mecánicas y termodinámicas, tomadas como promedios sobre todas las moléculas contenidas en elementos de volumen representativos (RVE) en torno a cada punto, se pueden representar como campos dependientes de las coordenadas espaciales y de la variable temporal [2] cuyas escalas de variación características sean mucho mayores que las escalas a las que varían las propiedades moleculares.

Cuando se trabaja en un medio gaseoso, como la atmósfera, el que la hipótesis del continuo tenga sentido o no se puede medir a través del número de Knudsen definido como el cociente entre

[2] Funciones continuas que asocian a cada punto y cada instante, en los que esté definido el cuerpo estudiado, un único valor de la variable de interés.

el recorrido libre medio (distancia media recorrida entre dos colisiones sucesivas) de las moléculas que constituyen el gas y una escala de longitud representativa del fenómeno físico que se esté estudiando. Para hacerse una idea de las magnitudes involucradas, véanse los siguientes datos extraídos a partir de los datos de la "Atmósfera Estándar Internacional" (ISO 2533:1975):

- A una altitud de 0m, 101325Pa de presión y $288,15K$ de temperatura, el recorrido libre medio es de unos $6,63\text{nm} = 6,63 \cdot 10^{-8}\text{m}$.

- En la tropopausa, a unos 11km de altura, 22632Pa y $216,65K$, el recorrido libre medio es de unas $0,233\mu\text{m} = 2,233 \cdot 10^{-7}\text{m}$.

- En la estratopausa, a unos 47km, 110Pa y $270,65K$, el recorrido libre medio es de unas $56,92\mu\text{m} = 5,692 \cdot 10^{-5}\text{m}$.

- En la mesopausa, a unos 85km, $0,373$Pa y $186,9K$, el recorrido libre medio es de unos $11,7\text{mm} = 1,17 \cdot 10^{-2}\text{m}$.

- A 150km de altura, el recorrido libre medio ya ha crecido hasta los 39m y el sonido deja de propagarse. Mientras que a 455km, en el límite entre la termósfera y la exósfera, toma valores del orden de los 67km.

En el estudio de un medio continuo conviene distinguir entre el estudio de los principios físicos generales, las ecuaciones constitutivas que sirven para caracterizar cada tipo de material (por ejemplo, la ley de Hooke para un medio elástico) y las teorías especializadas que buscan soluciones particulares a problemas específicos planteados sobre un material concreto (por ejemplo: ¿qué fuerzas aparecen debido a la interacción entre el aire y una superficie sólida?).

2.2. Esfuerzo y velocidad de deformación.

Desde el punto de vista mecánico, la principal propiedad de un medio sólido es su resistencia a sufrir deformaciones bajo la acción de una fuerza externa aplicada sobre el mismo (rigidez). Por el contrario, los medios fluidos son capaces de deformarse de forma indefinida. Para sistematizar de un modo riguroso la apreciación anterior es necesario recordar el concepto de esfuerzo o tensión, que ya se estudió en la asignatura de Resistencia de Materiales, y la distinción entre esfuerzos normales y tangenciales. Dada una superficie contenida en el interior o en el contorno de un medio continuo y una fuerza que actúa sobre la misma, se llama esfuerzo normal a la fuerza por unidad de área ejercida en dirección perpendicular a la superficie. Por otra parte, se llama esfuerzo tangencial o cortante a la fuerza por unidad de área ejercida en dirección tangencial a la superficie [3].

A partir de la definición previa de esfuerzo tangencial, se puede definir un medio fluido como todo cuerpo que, bajo la acción de un esfuerzo tangencial finito, se deforma de modo continuo [4]. Más en concreto, los fluidos newtonianos (aire, agua, gasolina, alcoholes, amoniaco, ...) son aquéllos cuyos esfuerzos internos obedecen a la siguiente ley constitutiva, ley de Navier-Poisson:

$$\tau_{ij} = \mu\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) + \Big(\zeta - \frac{2}{3}\mu\Big)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - P\delta_{ij} \tag{1}$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica, ζ es el coeficiente de viscosidad volúmica y se ha incluido la presión (esfuerzo estático, presente incluso en reposo). La presencia de un ζ no nulo es

[3] Nota sobre nomenclatura. Dependiendo de la referencia que se consulte, el esfuerzo se representa tanto por σ como por τ e, incluso, las componentes normales se representan por σ y las tangenciales por τ.

[4] Un sólido experimenta deformaciones finitas frente a tensiones tangenciales finitas.

responsable del amortiguamiento de las ondas sonoras. En algunas referencias se distingue entre presión termodinámica, P, y presión mecánica, $P - \zeta v_{k,k}$. Cuando se quiera aislar la presión del esfuerzo dinámico, se empleará la nomenclatura $\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau'_{ij}$, donde τ es el esfuerzo total, τ' el esfuerzo dinámico y P es la presión o esfuerzo estático.

Se trata de una ley constitutiva que establece, por un lado, el carácter de la presión como esfuerzo estático normal y, por otro lado, la aparición de esfuerzos dinámicos linealmente dependientes de los gradientes de velocidad.

2.3. Cinemática del movimiento de los fluidos.

2.3.1. Descripciones euleriana y lagrangiana.

La descripción del movimiento de un fluido es diferente a la usual en otros ámbitos de la mecánica. De acuerdo a lo visto en otras asignaturas, lo normal sería describir la posición y la velocidad de cada una de las partículas presentes en el problema; lo que en medios continuos de traduce en cada una de las partes en las que se puede dividir dicho medio para su estudio. Es la descripción lagrangiana de la cinemática y tiene la ventaja de que las leyes de la física se aplican de modo natural a porciones de materia que mantengan su identidad a lo largo del proceso al que se vean sometidas. Sin embargo, tiene el problema a la hora de emplearse con un medio fluido de que, al no presentar los fluidos resistencia a las deformaciones tangenciales, cualquier porción de fluido que se elija inicialmente acabará completamente deformada y entremezclada con sus vecinas, dando lugar a una descripción cinemática muy complicada.

Por el contrario, en mecánica de fluidos se suele usar una descripción cinemática llamada euleriana en la que no se pretende seguir a porciones materiales fijas, sino que se fijan posiciones en el espacio y la descripción se limita a la de la porción de materia fluida que en cada instante se encuentre en dicha posición; sin preocuparse de que lo que se estudia en cada momento no sea el mismo material que el que se estudió antes o que el que se estudiará después. La descripción cinemática se simplifica sobremanera al poder considerar una descomposición del medio fluido en un conjunto de porciones con formas regulares y sencillas, que no hay que recalcular debido a las deformaciones que puedan sufrir. Se tiene el problema de que las leyes de la física no son de aplicación directa puesto que la identidad de la materia que ocupa una misma posición del espacio no se mantiene constante en el tiempo.

En la figura 2.3.1 se puede ver una imagen de un plato donde se ha mezclado pintura blanca con negra. En una descripción lagrangiana habría que detallar cómo cada porción de pintura negra ha ido describiendo cada una de las líneas negras visibles y cuánto se ha deformado. En una descripción euleriana se dividiría el plato en porciones fijas y la descripción se limitaría a la de la cantidad de pintura blanca y negra presente en cada porción en cada instante.

2.3.2. Definiciones.

A continuación vienen algunas definiciones empleadas en la cinemática de fluidos.

1) Línea de corriente: es una línea imaginaria que, para cada instante de tiempo, se define como una curva cuya tangente en cada punto es el vector velocidad. Conocido el campo de velocidad, las líneas de corriente se obtienen siguiendo, en cada instante, las direcciones indicadas por los vectores



Figura 3: Plato de mezcla de pintura blanca y negra. Situación extremadamente simple en comparación con la que tiene lugar en una mezcla de humo y aire, por ejemplo.

velocidad. Es un concepto análogo al de líneas de campo introducido en Física II para el estudio de los campos electromagnéticos.

2) Trayectoria: es el camino seguido por una misma partícula fluida a lo largo del tiempo. Ejemplo: el camino que sigue una burbuja de cerveza dentro de un vaso.

3) Traza: es la línea formada por las partículas que han pasado por un mismo punto en instantes anteriores. Ejemplo: el penacho de una chimenea.

4) Tubo de corriente: objeto con forma de tubo formado por la unión de todas las líneas de corriente que pasan por un curva cerrada cualquiera, definida dentro del medio fluido.

5) Sección transversal: es la superficie limitada por la curva cerrada empleada para definir un tubo de corriente.

En la figura 2.3.2 se puede ver una ilustración de los conceptos de tubo de corriente y sección transversal.

NOTA.
Si el flujo es estacionario en sentido euleriano (la velocidad definida como función de la posición no cambia con el tiempo), las líneas de corriente, las trayectorias y las trazas son coincidentes.
En efecto, en el instante inicial cada partícula fluida sigue la trayectoria indicada en ese momento por la velocidad; si la velocidad, como función del espacio, no cambia con el tiempo, el proceso se repetirá desde la nueva posición espacial a la que haya llegado y la trayectoria irá siguiendo el camino descrito por las líneas de corriente; además todas las partículas que vengan detrás harán lo mismo por lo que la traza también será coincidente.
Por el contrario, en una situación no estacionaria, la partícula fluida, tras llegar a una nueva posición, se encuentra con un mapa de líneas de corriente distinto al que tenía en el instante previo y, por lo tanto, irá describiendo una trayectoria basada en las líneas de corriente cambiantes en cada instante que no coincidirá con ninguna línea de corriente instantánea; por su parte, las partículas que vengan detrás partirán ya desde su posición inicial con una velocidad distinta y describirán una trayectoria distinta, por lo que la traza no coincidirá ni con trayectorias ni con líneas de corriente.

6) Flujo: El flujo de una propiedad, C, a través de una superficie finita es la integral sobre dicha superficie del valor de la propiedad, multiplicado por la proyección de la velocidad del medio fluido en dirección perpendicular a la superficie.

$$\Phi(C) = \int_S C\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS \tag{2}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie considerada de acuerdo al siguiente criterio de signos: para superficies cerradas se define siempre hacia fuera del volumen que queda encerrado por la superficie (flujo saliente positivo, flujo entrante negativo); para superficies abiertas queda una ambigüedad resoluble recurriendo al criterio de las fuerzas de presión: la normal apunta en dirección opuesta a aquella en la que se quiera computar el efecto de la presión.

El flujo se define de modo que sirva para calcular la cantidad de una propiedad cualquiera que atraviesa una superficie, arrastrada por la velocidad del fluido.

Si se considera un tubo de corriente, a través de las caras laterales no habrá flujo puesto que la velocidad (empleada para definir las líneas de corriente que delimitan un tubo) no tiene componente normal a sí misma. Únicamente habrá flujo nulo a través de las secciones transversales.

7) Circulación: La circulación de una propiedad vectorial, en este curso se utilizará sólo la de la velocidad, es la integral a lo largo de una línea cerrada (lazo) de la proyección del vector sobre la tangente a dicha línea.

$$\oint_L \vec{v} \cdot \hat{t}\, dL \tag{3}$$

2.4. Teorema del transporte de Reynolds.

Sirve para aplicar las leyes de la física, que son válidas sobre porciones del medio fluido entendidas en sentido lagrangiano, a una partición euleriana del espacio físico ocupado por el fluido.

Se considera por un lado un volumen fluido definido como el volumen ocupado por una misma porción de medio fluido conforme avanza el tiempo y, por el otro, un volumen de control definido

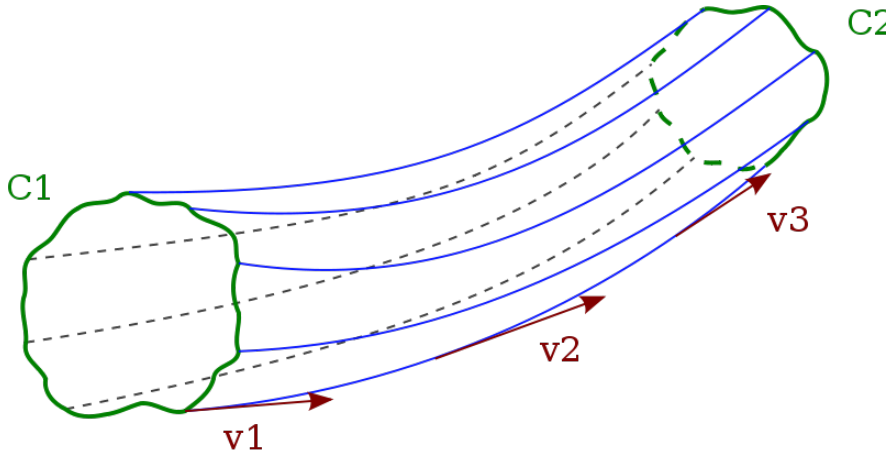


Figura 4: Líneas de corriente definiendo un tubo de corriente que une las secciones transversales $C1$ y $C2$. Vectores velocidad superpuestos, en tres puntos, para una de las líneas de corriente.

como una región arbitraria del espacio cuyo límite se llama superficie de control. Considérese ahora, para un instante de tiempo, un volumen de control arbitrario y el volumen fluido que, en ese instante (pero ni antes ni después) coincide con dicho volumen de control. El teorema queda así:

La variación temporal de cualquier magnitud física definible como una integral sobre un volumen fluido [5] *viene dada por la variación temporal de dicha magnitud en el interior del volumen de control que coincida con el volumen fluido en el instante tomado como referencia más el valor del flujo neto de la magnitud física en cuestión a través de la superficie de control.*

$$\frac{d}{dt}\int_{V_F} C\,dV = \int_{V_C} \frac{\partial C}{\partial t}\,dV + \oint_{S_C} C\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS \tag{4}$$

donde C es una magnitud física cualquiera.

El término a la izquierda representa la velocidad de variación que experimenta una propiedad física definida en el interior del volumen fluido que puede desplazarse y deformarse con respecto al volumen de control. A este término se le pueden aplicar de modo directo las leyes de la física.

El primer término a la derecha se llama término inercial y es la variación temporal computada en sentido euleriano dentro del volumen de control. En situaciones estacionarias se anula.

El segundo término a la derecha se llama término convectivo y representa el balance entre los flujos salientes (signo positivo) y entrantes (signo negativo) a través de la superficie de control.

2.5. Dinámica de fluidos. Conservación de masa.

Si se define un volumen fluido como el volumen ocupado por un cierto número de moles que siempre sean los mismos, el principio de conservación de la masa nos dice que la masa contenida en su interior será siempre la misma (mismo número de moles, misma masa) y, por lo tanto, su derivada temporal se anulará.

La masa contenida en un volumen se define como la integral de la densidad sobre dicho volumen.

[5] Por ejemplo, la masa contenida en un volumen fluido sería la integral de la densidad sobre dicho volumen.

La aplicación del teorema del transporte de Reynolds a la densidad, $C = \rho$ en (4), quedará

$$\int_{V_C} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \oint_{S_C} \rho \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{5}$$

que recibe el nombre de ecuación de continuidad.

En situaciones estacionarias el primer término se anula. En situaciones incompresibles la densidad es constante por lo que el primer término también se anula y se puede extraer de la integral en el segundo término, por lo que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\oint_{S_C} \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{6}$$

que se puede interpretar diciendo que el caudal entrante es igual al caudal saliente para cada volumen de control.

Si, en una situación estacionaria, se considera un tubo de corriente infinitesimal con una sección de entrada y otra de salida, se puede suponer que la velocidad es uniforme sobre cada una de dichas secciones (por ser infinitesimales) y la ecuación de continuidad quedará

$$-\rho_e v_{n,e} A_e + \rho_s v_{n,s} A_s = 0 \tag{7}$$

donde el subíndice e se refiere a entrada y el s a salida, el símbolo A se refiere a las áreas de entrada y salida y el símbolo v_n se emplea para referirse a la componente del vector velocidad perpendicular a las áreas de entrada y salida. El primer sumando va con signo menos ya que, al estar limitado el tubo de corriente por una superficie cerrada, se supone que la normal apunta siempre hacia fuera (al contrario que la velocidad entrante y con el mismo sentido que la saliente).

2.6. Segunda ley de Newton.

La segunda ley de Newton establece que la derivada temporal de la cantidad de movimiento (momento lineal) de un sistema físico viene dada por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicho sistema.

Sobre un volumen cualquiera, el momento lineal se define como la integral sobre todo el volumen de la densidad de momento lineal: $\vec{p} = \int_V \rho \vec{v}\, dV$.

Como fuerzas, se considerarán el peso, dado por la masa total del fluido multiplicada por la gravedad, $\int_V \rho \vec{g}\, dV$, y el esfuerzo total que actúa sobre la superficie límite del volumen considerado.

La aplicación del teorema del transporte de Reynolds a la componente i-ésima de la densidad de momento lineal [6] queda

$$\int_{V_C} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t}\, dV + \oint_{S_C} \rho v_i \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = -\int_{V_C} \rho g \delta_{i3}\, dV - \oint_{s_c} P n_i\, dS + \oint_{S_C} \tau'_{ij} n_j\, dS \tag{8}$$

que recibe el nombre de ecuación del movimiento de Cauchy. El símbolo δ_{i3}, que vale 0 excepto para $i = 3$ (eje z) en que vale 1, se ha introducido en el término del peso para representar que la gravedad sólo tiene componente vertical.

En situaciones estacionarias, el primer término se anula. En situaciones incompresibles la densidad, ρ, se puede extraer de las integrales si se sustituye la presión, P, y el esfuerzo dinámico, τ',

[6] i representa una componente genérica, puede valer tanto x ó 1, como y ó 2, como z ó 3.

por P/ρ y $\tau^{'}/\rho$, respectivamente. En este caso, se suele trabajar con $\nu = \mu/\rho$, que recibe el nombre de coeficiente de viscosidad cinemática, y la ley de Navier-Poisson se simplifica a

$$\tau_{ij} = \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (P/\rho)\delta_{ij} \tag{9}$$

donde, por ahorro de notación, no se especifica que la nueva τ debería ser en realidad τ/ρ.

A partir de la ecuación 8 se puede entender la afirmación de que el estudio de las fuerzas y momentos aerodinámicos se reduce al de la distribución de presiones y esfuerzos viscosos sobre la superficie del cuerpo considerado. En fecto, si se considera una celda euleriana en la zona de contacto entre el fluido y el sólido, una de sus caras coincidirá con la entrefase. Para resolver las ecuaciones de la dinámica del fluido es necesario conocer el esfuerzo total (presión más viscoso) que actúa sobre todas las caras de dicha celda, incluida la que está en contacto con el sólido. Por el principio de acción-reacción, sobre el sólido actuará una fuerza igual y de sentido contrario que se puede suponer aplicada, a efectos del cómputo de momentos, en el punto central del elemento de superficie considerado. Repitiendo el análisis para todas las celdas eulerianas que tengan alguna superficie de contacto con el sólido y sumando sus contribuciones queda resuelto el problema de la Aerodinámica: obtener las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo sumergido en un medio fluido.

2.7. Primer principio de la termodinámica. Ecuación de Bernouilli.

La energía total se define como la suma de la energía interna más la mecánica. En fluidos, para un volumen cualquiera, su valor se obtendrá como la integral de volumen de la densidad de energía total: $\int_V \rho(u+v^2/2+gz)\,dV$; con ρu densidad de energía interna, $\rho v^2/2$ densidad de energía cinética y $\rho g z$ densidad de energía potencial gravitatoria.

El primer principio de la termodinámica, para la energía total queda así: la derivada temporal de la energía total contenida en un volumen fluido será igual al flujo de calor que se le suministre externamente menos la potencia mecánica ejercida por el medio fluido sobre la superficie que lo limita. Aplicando el teorema del tranporte de Reynolds para la energía total

$$\begin{aligned}\int_{V_C} \frac{\partial \rho(u+v^2/2+gz)}{\partial t}\,dV + \oint_{S_C} \rho(u+v^2/2+gz)\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS = \\ - \oint_{S_C} P\vec{v}\cdot\hat{n}\,dS + \oint_{S_C} v_i \tau_{ij}^{'} n_j\,dS + \dot{Q}_{ext}\end{aligned} \tag{10}$$

donde los dos primeros términos a la derecha representan los trabajos mecánicos realizados por la tensión estática (la presión) y la dinámica, respectivamente; mientras que el último término representa el flujo de calor suministrado o bien desde el exterior hacia el volumen de control (signo positivo) o bien desde el volumen de control hacia el exterior (signo negativo). El intercambio de calor puede tener lugar tanto por radiación (término de volumen) como por conducción (término de superficie).

En situaciones estacionarias el primer término se anula. Si no hay flujo de calor (proceso adiabático), el término correspondiente se anula. Los términos de trabajo sobre la superficie de control se anulan si éstas coinciden con paredes fijas. Si, además de todo lo anterior, se puede despreciar la potencia ejercida por el esfuerzo dinámico sobre las superficies de control libres (aquéllas por donde

el flujo puede entrar y salir sin limitaciones), la ecuación (10) se simplifica a

$$\oint_{S_C} \rho(u + P/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{11}$$

donde el término dependiente de la presión se ha pasado a la izquierda de la igualdad. La expresión (11) es la versión compresible de la ecuación de Bernouilli en formato integral.

La energía interna está acoplada con la mecánica a través del trabajo de dilatación y compresión (una dilatación es positiva como energía mecánica y negativa como energía interna, lo contrario ocurre con una compresión) que se anula para el caso incompresible y, también, a través de la disipación viscosa que tiene lugar en el interior de cada volumen de control, convirtiendo energía cinética en interna.

Por lo tanto, para las situaciones incompresibles en las que se pueda despreciar el efecto de la viscosidad, la energía interna se desacopla de la mecánica y se puede extraer de la ecuación (11), que queda:

$$\oint_{S_C} \rho(P/\rho + v^2/2 + gz)\vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \tag{12}$$

que es la versión integral de la ecuación de Bernouilli incompresible.

Si se retoma el tubo de corriente infinitesimal estudiado al final de la subsección 2.5 (ecuación de continuidad) y se le aplica la ecuación 12, se tendrá que

$$-\rho_e v_{n,e} S_e (P/\rho + v^2/2 + gz)_e + \rho_s v_{n,s} S_s (P/\rho + v^2/2 + gz)_s = 0 \tag{13}$$

y recordando como quedaba la ecuación de continuidad en este caso, ecuación 7, la expresión anterior se podrá reescribir como

$$\rho_s v_{n,s} S_s [(P/\rho + v^2/2 + gz)_s - (P/\rho + v^2/2 + gz)_e] = 0$$

es decir, la expresión que habitualmente aparece en los libros de Física cuando se habla de la ecuación de Bernouilli

$$(P/\rho + v^2/2 + gz)_s = (P/\rho + v^2/2 + gz)_e = \text{constante} \tag{14}$$

En principio, $P/\rho + v^2/2 + gz$ podría tener un valor distinto para cada tubo de corriente de sección infinitesimal. Sin embargo, las situaciones en las que la ley de Bernouilli es de utilidad son aquéllas en las que $P/\rho + v^2/2 + gz$ es una constante para todo el flujo, en lugar de tomar un valor distinto para cada tubo de corriente infinitesimal. Por ejemplo: una masa de aire atmosférico con un mismo origen y velocidad a la escala de los fenómenos que se quieran estudiar tiene un valor único de la constante de Bernouilli; dos tuberías que se juntan provinientes de sendos depósitos a distinta altura dan lugar a un fluido con dos valores distintos de la constante de Bernouilli, según cual haya sido el origen del tubo de corriente que se considere.

2.8. Ecuaciones de Navier-Stokes.

La ecuación de continuidad 5, la segunda ley de Newton 8 y el primer principio de la Termodinámica 10 foman un sistema de cinco ecuaciones con seis incógnitas: ρ, v_x, v_y, v_z, P y u. Se necesita una ecuación adicional que viene dada por la ecuación de estado termodinámica

$$PV = nRT$$

ya que la temperatura, T, y la densidad de energía interna, u, están relacionadas a través de la integral del calor específico por unidad de masa: $\int_{T0}^{T} c_v(T')\,dT' = u - u_0$, entre un nivel de referencia (con una cierta energía interna de formación) y la T del medio. Se ha supuesto que se puede trabajar con la atmósfera como si fuese un gas ideal.

Puesto que la variable de interés mecánico es la densidad de masa, ρ, en lugar de la molar, n/V, se multiplica y divide la ecuación de estado por el peso molecular medio M_A para pasar de moles a masas, de modo que la ecuación de estado queda como

$$P = \rho R^* T \tag{15}$$

donde $R^* = R/M_A$ ya no es una constante universal de los gases, sino que depende del gas con el que se trabaje (de su peso molecular medio).

Al añadir la ecuación de estado, ya se tiene un conjunto resoluble con tantas ecuaciones como incógnitas que, habitualmente, se conoce como ecuaciones de Navier-Stokes. La versión aquí explicada sería la versión integral de las mismas; también existe una versión diferencial que no es necesaria para los propósitos de este curso.

2.9. Viscosidad y turbulencia.

La viscosidad es la responsable de que aparezcan esfuerzos internos en el interior de un fluido que se oponen al movimiento relativo de una capa de fluido con respecto a las capas vecinas.

Flujo laminar. Si el transporte convectivo de momento lineal, debido al caudal que fluye entre distintos volúmenes de control, es menor que la fuerza producida por los esfuerzos viscosos sobre las superficies de control por las que tiene lugar el flujo, las líneas de corriente son muy regulares y estables; las capas de fluido resbalan ordenadamente entre sí como las cartas de una baraja.

Flujo turbulento. En el caso contrario (el transporte convectivo domina sobre los esfuerzos viscosos), el flujo se desordena, aparecen componentes caóticas con estructura de remolinos (también llamados torbellinos o vórtices) de tamaños muy diferentes y aparece un fenómeno de transporte de la energía mecánica desde los torbellinos grandes hacia los pequeños donde la energía mecánica finalmente se disipa en forma de calor (energía interna). Estos fenómenos de transporte de la energía mecánica van acompañados con un incremento de los procesos de mezcla en el caso de que haya distintos componentes en el medio fluido. Aun cuando el coeficiente de viscosidad sea muy pequeño, los gradientes de velocidad acaban creciendo hasta que acaben por no ser despreciables los esfuerzos viscosos.

Experimentalmente, se sabe que la transición entre un régimen y otro está controlada por el número de Reynolds, definido como: $Re = \rho V L/\mu$. Se trata del número adimensional que se obtiene combinando la densidad media de momento lineal del flujo, ρV, la escala longitudinal característica de variación de sus propiedades, L, y el coeficiente de viscosidad dinámica, μ. La inmensa mayoría de los flujos que tienen lugar en la naturaleza son turbulentos. La interpretación física se puede ver más claramente si se define el transporte convectivo de momento lineal como proporcional a $\rho V^2 S$ y las fuerzas viscosas como proporcionales a $\mu(V/L)S$, donde S es la superficie de control considerada y V/L es una estimación del gradiente de la velocidad, basada en alguna escala de longitudes característica del flujo estudiado; el número de Reynolds es el cociente entre ambas magnitudes.

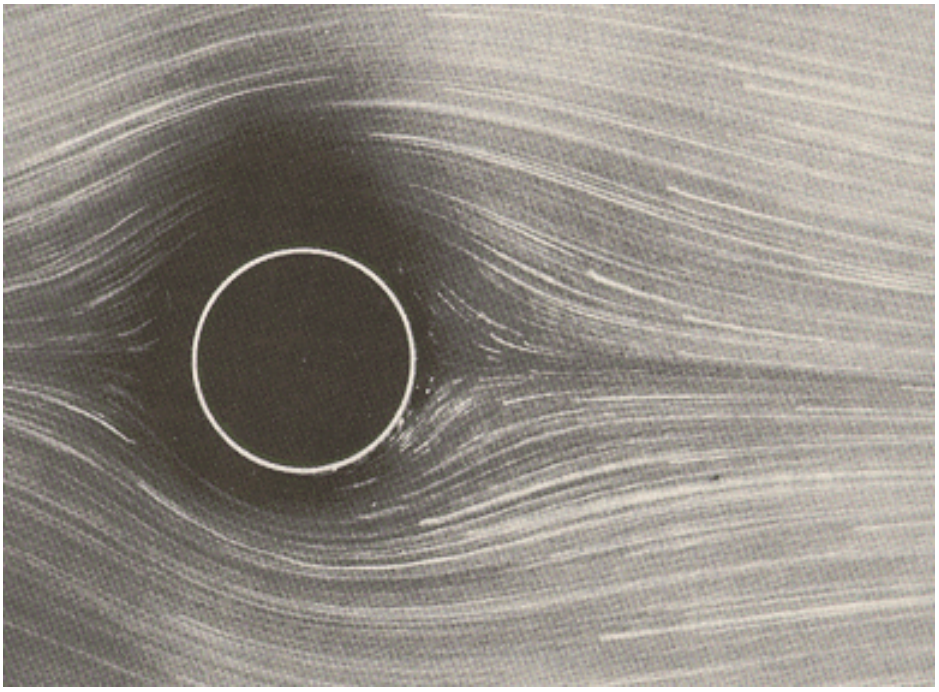


Figura 5: Flujo laminar alrededor de un cilindro. Se representan las líneas de corriente.

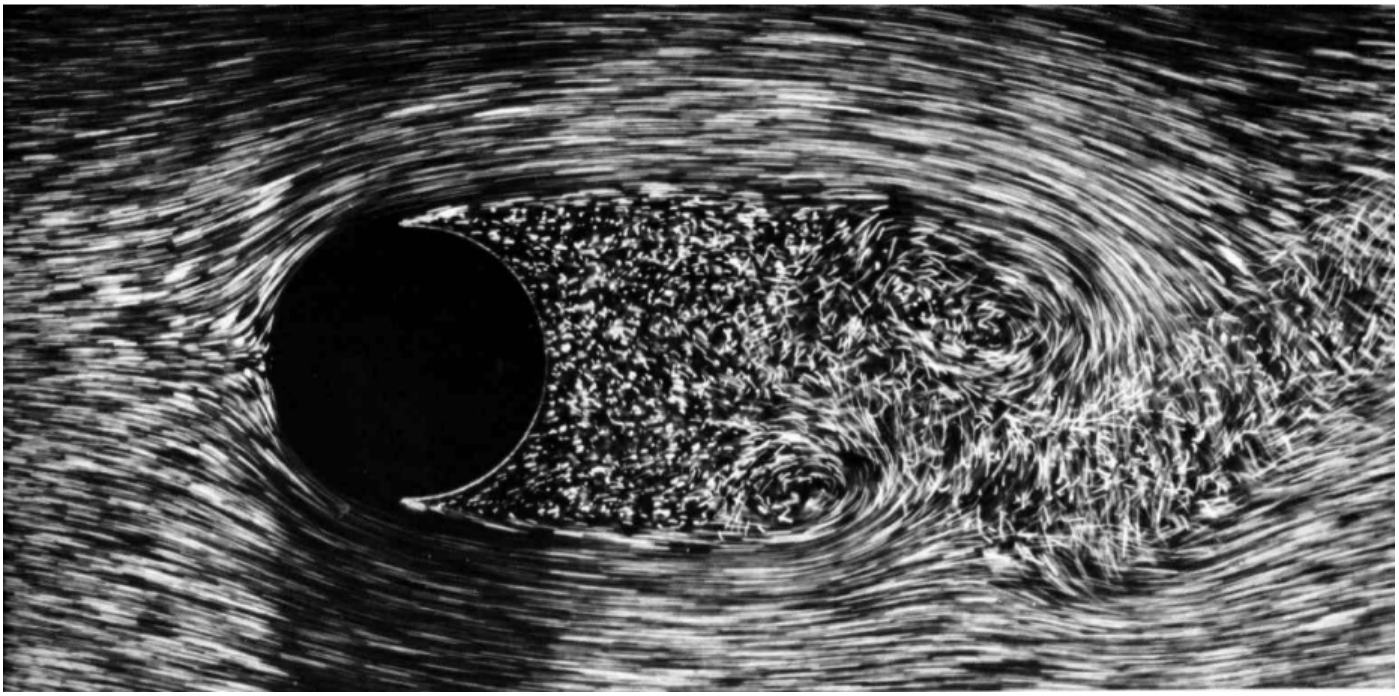


Figura 6: Flujo turbulento detrás de un cilindro. Se representan las líneas de corriente.

3. Fundamentos de aerodinámica.

3.1. Fuerzas y momentos de origen aerodinámico.

La existencia de fuerzas aerodinámicas debidas a la interacción entre el aire y un cuerpo sólido sumergido en el mismo era bien conocida desde la antigüedad y, de hecho, se había llegado a deducir que dichas fuerzas dependían de la velocidad relativa entre sólido y aire. Tanto es así que este conocimiento supuso una de las principales resistencias en la aceptación de las teorías de Galileo que proponían que las fuerzas eran proporcionales a las aceleraciones.

Cuando se comenzó el estudio riguroso de las fuerzas aerodinámicas partiendo de la aplicación de las leyes de Newton, se despreció el efecto de las fuerzas viscosas pensando que, si el número de Reynolds era lo suficientemente alto, eso significaría que su importancia relativa en el balance de momentos lineales sería menor. Con esta hipótesis de partida, D'Alambert procedió a calcular el valor de la fuerza aerodinámica que experimentaría un cuerpo sumergido en un chorro de aire y obtuvo un valor nulo, es el resultado conocido como paradoja de D'Alambert. La resolución de esta paradoja no se consiguió hasta 1904 con la teoría de la capa límite de Prandtl y supuso un freno tremendo en el desarrollo de la Aerodinámica. Básicamente, Prandtl supuso que en las proximidades de la superficie de contacto entre el cuerpo sólido y el aire surgen gradientes de velocidad lo basante altos, recuérdese la ley constitutiva de un fluido newtoniano [7] vista en la subsección 2.2, como para que los esfuerzos viscosos dejen de ser despreciables en dicha zona, conocida como capa límite.

Aunque se tardó muchos años en conseguir una comprensión teórica de lo que ocurría en la interacción entre un sólido y el aire, los experimentalistas siguieron trabajando midiendo las fuerzas y momentos aerodinámicos que, de hecho, aparecen. Su principal herramienta de trabajo son los túneles de viento que se basan en que, a efectos de la Aerodinámica, la magnitud relevante es la velocidad relativa entre sólido y aire y, por lo tanto, lo mismo da medir fuerzas sobre un sólido moviéndose con respecto al aire en reposo a una cierta velocidad, $\vec{v}$, que medirlas sobre un sólido en reposo haciendo frente a un viento que tenga la misma velocidad que en el caso anterior pero sentido opuesto, $-\vec{v}$.

A la hora de interpretar los resultados y, puesto que interesa medir fuerzas, se fueron a buscar éstas en la segunda ley de Newton, ecuación 8, adaptada a un medio fluido. Suponiendo que se trabaja en un situación estacionaria, las fuerzas aerodinámicas pueden depender del flujo de momento (transporte convectivo), del término de presión y del término viscoso. Haciendo un análisis basado simplemente en órdenes de magnitud, se tendrían como variables relevantes: F_A, $\rho V^2 S$, PS y $\mu(V/L)S$. F_A es la fuerza aerodinámica que se quiere estudiar, $\rho V^2 S$ es una estimación del transporte convectivo basado en la velocidad del centro de masas del sólido con respecto al aire y la superficie de contacto entre sólido y chorro de aire, PS es una estimación de las fuerzas de presión basada en un valor característico de la presión y la misma superficie que en el caso anterior y, finalmente, $\mu(V/L)S$ es una estimación de las fuerzas viscosas basada en la velocidad relativa del centro de masas del sólido con respecto al aire, la misma superficie que en los casos anteriores y una longitud característica de las dimensiones del sólido [8].

[7] Los esfuerzos viscosos son proporcionales al gradiente de velocidad.

[8] Si se aproxima el gradiente como la variación de velocidad sobre una cierta distancia espacial, se supone que un sólido puede inducir perturbaciones en el campo de velocidades que lo rodea sobre escalas espaciales del mismo orden de magnitud que su tamaño.

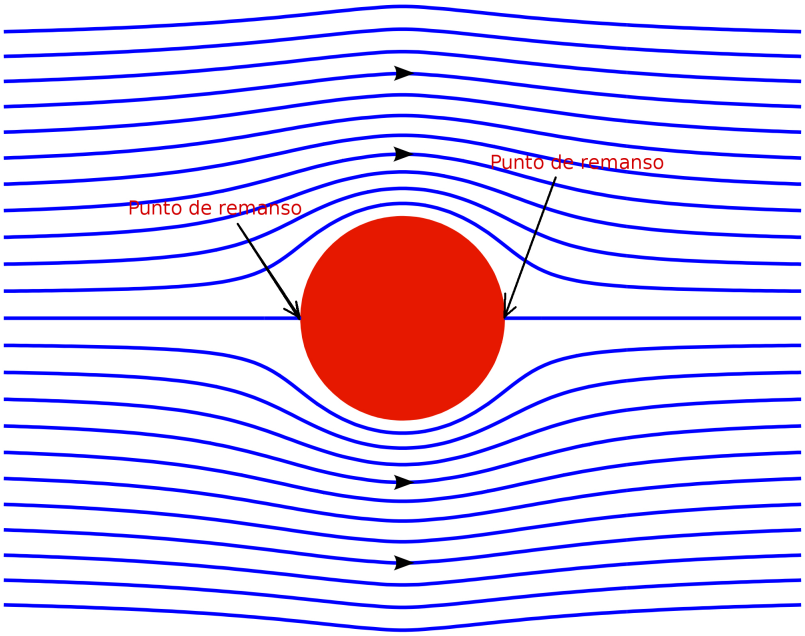


Figura 7: Líneas de corriente alrededor de un cilindro, flujo sin viscosidad. Se representan los puntos de remanso. Aguas arriba a la izquierda de la figura, aguas abajo a la derecha.

En el análisis previo no se ha tenido en cuenta el efecto de la fuerza de gravedad sobre el fluido, un término que sería proporcional a $\rho g\,\mathrm{Vol}$ donde Vol es el volumen del fluido. Dicho término, en Aerodinámica, sería igual al peso del fluido desalojado por el sólido y su contribución sería la de la flotación estudiada por Arquímedes [9] que, a menos que se esté trabajando con globos aerostáticos, se puede despreciar en estudios aerodinámicos.

Allí donde el chorro de aire impacte directamente contra el sólido se tiene un punto de remanso en el que la velocidad se anula, aplicando el teorema de Bernouilli para fluidos incompresibles en ese punto se tendrá que: $P = P_\infty + \rho V^2/2$, donde P_∞ es la presión en el chorro de aire sin perturbar por el sólido, aguas arriba del mismo, véase la figura 7. La presión sin perturbar es uniforme para las escalas relevantes en Aerodinámica [10] que son del orden del tamaño del cuerpo que se estudie, por lo que actúa por igual sobre todas las caras del sólido y no ejerce fuerza neta. La fuerza debida a la presión dependerá a lo sumo de la diferencia que haya entre la presión real sobre la superficie de contacto y la presión sin perturar, $(P - P_\infty)S$, que, en una estimación basada únicamente en el orden de magnitud, se puede tomar como la contribución dinámica a la constante de Bernouilli en el punto de remanso [11] multiplicada por el área del sólido bañada por el chorro de aire, $\rho V^2 S/2$.

Con esto último se obtiene un resultado importante: las fuerzas de presión son del mismo orden de magnitud que los términos de transporte convectivo y no se necesita estudiar por separado su efecto en un análisis basado en los órdenes de magnitud de las variables del problema.

Además de las variables previas, F_A, $\rho V^2 S/2$ y $\mu(V/L)S$; los experimentos realizados durante los siglos XVIII y XIX demostraron que las fuerzas aerodinámicas también dependían del ángulo

[9] Ya vista en Física I en los estudios del grado.
[10] No ocurriría así en escalas relevantes para la Meteorología, por ejemplo.
[11] No tomará ese valor en todos los puntos de contacto, es simplemente una estimación del orden de magnitud.

de ataque, α.

Cuando a lo largo del siglo XX se comenzaron a estudiar flujos a altas velocidades en comparación con la del sonido, se vio que había que incluir de algún modo los efectos debidos a la compresibilidad [12] y que el modo más fácil de conseguirlo era a través del número de Mach definido como el cociente entre la velocidad del centro de masas del sólido y la velocidad de propagación del sonido en el fluido que lo envuelve, $\mathrm{Ma} = V/c$. Así que, finalmente, los estudios experimentales de la Aerodinámica consisten en proporcionar los valores de

$$\frac{F_A}{\rho V^2 S/2} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) \tag{16}$$

donde la interpretación física consiste en que se trata de determinar la importancia relativa de las fuerzas aerodinámicas con respecto a la presión dinámica en el punto de remanso en función de los números de Reynolds (importancia relativa de la viscosidad), de Mach (importancia relativa de la compresibilidad) y del ángulo de ataque (importancia relativa de la orientación del sólido con respecto al flujo sin perturbar).

Así, para las fuerzas de arrastre y de sustentación, se definen los coeficientes de arrastre y de sustentación:

$$C_L(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) = \frac{L}{\rho V^2 S/2} \tag{17}$$

$$C_D(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) = \frac{D}{\rho V^2 S/2} \tag{18}$$

Puesto que, en Aerodinámica no sólo se producen fuerzas sino también momentos de fuerzas con respecto al centro de masas, se introducen los coeficientes de cabeceo, guiñada y balanceo como

$$C_P(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) = \frac{M_P}{\rho l_P V^2 S/2} \tag{19}$$

$$C_Y(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) = \frac{M_Y}{\rho l_Y V^2 S/2} \tag{20}$$

$$C_R(\mathrm{Re}, \mathrm{Ma}, \alpha) = \frac{M_R}{\rho l_R V^2 S/2} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

donde l_P, l_Y y l_R son sendas longitudes características de la aeronave, que sirven para la estimación de los respectivos momentos.

Para que las expresiones previas sean de utilidad; por ejemplo, para que un intérprete de órdenes pueda emplearlas para despejar el ángulo de ataque necesario para producir una determinada fuerza aerodinámica, es necesario conocer:

a) Una serie de propiedades de la capa de aire en contacto con la aeronave. La densidad, ρ, la viscosidad dinámica, μ, y la velocidad del sonido, c, que o bien se estiman a partir de las valores tabulados para atmósfera estándar en función de la altura de vuelo, o bien requieren de la presencia de sensores a bordo que permitan medir dichas propiedades.

[12] Recuérdese que las presiones se han estimado basándose en la versión incompresible del teorema de Bernouilli.

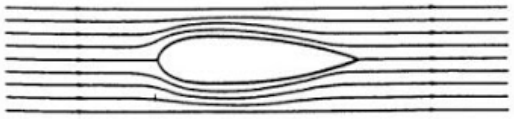


Figura 8: Cuerpo estilizado. Vista de perfil.

b) El valor de la velocidad relativa entre la aeronave y la capa de aire adyacente. No sólo interviene directamente como cociente elevado al cuadrado de las fuerzas y momentos, sino indirectamente a través de los números de Reynolds y Mach. Se determina o bien a partir de estimaciones basadas en la velocidad de crucero de la aeronave, o bien en la integración de la señal proporcionada por los acelerómetros de control, o bien a partir de información suministrada desde un radar situado en tierra que sigue a la aeronave, o bien a partir de una señal GPS, o bien a partir de sensores que midan la velocidad del viento relativo a la aeronave.

c) Las propiedades geométricas de la célula aerodinámica empleada para calcular fuerzas y momentos. En particular qué valor se toma como superficie y qué longitudes se emplean para adimensionalizar los momentos.

3.2. Geometría de las células aerodinámicas.

Para cuerpos estilizados, aquéllos cuyas dimensiones a lo largo de la dirección del flujo de aire son mucho mayores que su sección transversal al mismo, el área relevante a efectos aerodinámicos es su superficie en planta. Se toma como plano para hacer la proyección en planta, si el cuerpo es estilizado, aquél cuya orientación sea tal que el área proyectada del cuerpo resulte máxima. En la figura 8 se representa un cuerpo estilizado visto de perfil.

Para cuerpos romos, aquéllos cuyas dimensiones a lo largo de la dirección del flujo de aire son o del mismo orden de magnitud que su sección transversal o mucho menores que la misma, el área relevante a efectos aerodinámicos es la sección transversal del cuerpo con respecto a la dirección del flujo de aire. Por ejemplo: una esfera de radio R, tiene una sección transversal frente a cualquier flujo incidente igual a su círculo máximo: πR^2. En la figura 9 se representa un cuerpo romo visto de perfil. Un mismo cuerpo puede ser estilizado o romo según cuál sea su ángulo de ataque. Por ejemplo: si se sopla a lo largo del filo de un folio, éste se comporta como cuerpo estilizado; si se sopla frontalmente contra el mismo, éste se comporta como un cuerpo romo.

Para caracterizar la configuración de un cuerpo estilizado, por ejemplo un ala, se introducen los conceptos de borde de ataque, borde de salida, extradós, intradós, cuerda, espesor, envergadura, cuerda media, superficie alar y alargamiento. Véase la figura 10 para una vista en planta de un ala y la figura B.9.a del tema 3 de **?** para una vista en perfil de un ala.

a) Borde de ataque: es el borde delantero del ala, la línea que une los puntos de curvatura máxima de todos los perfiles que forman el ala, por la zona enfrentada al flujo. Suele tener forma de circunferencia de radio pequeño con un centro bien definido, por lo que no hay un único punto

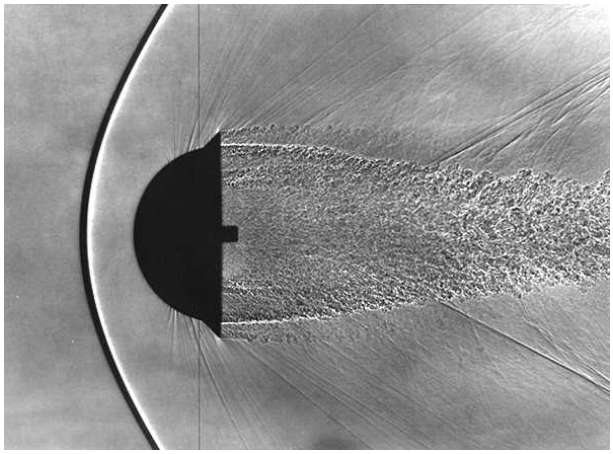


Figura 9: Cuerpo romo en flujo supersónico. Vista de perfil.

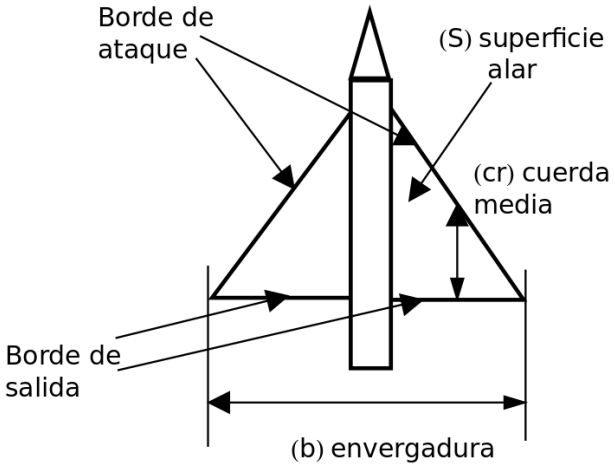


Figura 10: Vista en planta de un ala.

de curvatura máxima, sino que se emplea el centro de dicha circunferencia para construir la cuerda y la línea de curvatura.

b) Borde de salida o de fuga: es el borde posterior del ala, es decir la línea que une la parte posterior de todos los perfiles del ala; o dicho de otra forma: la parte del ala por donde el flujo de aire perturbado por ella, retorna a la corriente libre. Suele tener forma de filo cortante.

c) Extradós: parte superior del ala comprendida entre los bordes de ataque y salida.

d) Intradós: parte inferior del ala comprendida entre los bordes de ataque y salida.

e) Cuerda: es la línea recta imaginaria trazada entre los bordes de ataque y de salida de cada perfil. Si no hay un punto de curvatura máxima sino una circunferencia, se traza entre el borde de salida y el centro de la circunferencia de ataque, prolongando la línea hasta que corte al perfil.

f) Curvatura media: es la línea curva equidistante del intradós y el extradós que pasa por el borde de ataque y el de salida. Si se tiene una circunferencia de ataque pasa por su centro y por el borde de salida.

g) Espesor, e: distancia entre el extradós y el intradós, medida en perpendicular a la cuerda.

h) Envergadura, b: distancia entre los dos extremos del ala.

i) Cuerda media, c_r: en general, cada perfil puede tener una cuerda distinta a avanzar a lo largo de la envergadura. Se define la cuerda media geométrica mediante la relación: $\int_{-b/2}^{b/2} c(x)\,dx/b$.

j) Superficie alar, S: superficie total correspondiente al ala. Es el producto de la envergadura por la cuerda media.

k) Alargamiento: cociente entre la envergadura (longitud del ala) y la cuerda media (anchura del ala), b/c_r.

3.3. Propiedades de la fuerza de sustentación.

Cuando se representa el coeficiente de sustentación, C_L, para números de Reynolds y Mach constantes frente al ángulo de ataque, las gráficas que se obtienen, véase la figura 11, se corresponden con un rango de valores en los que C_L crece linealmente con el propio ángulo de ataque, para ángulos pequeños; conforme sigue creciendo el ángulo de ataque, las gráficas acaban suavizando su pendiente y alcanzando un máximo, a partir del cual C_L cae, fenómeno conocido como entrada en pérdidas y que limita la capacidad de maniobra por gobierno aerodinámico. En un dispositivo como un misil, en el que interesa que los dispositivos de control no sean excesivamente complicados, se suele trabajar de manera que los ángulos de ataque caigan siempre dentro del rango lineal. Esto restringe la maniobrabilidad, pero simplifica el diseño del intérprete de órdenes que, para producir una determinada sustentación (una determinada fuerza perpendicular a la velocidad del misil) sólo necesita conocer el valor de una constante en función de los números de Reynolds y Mach, en lugar de tener en su memoria guardada la forma completa de una línea curva.

$$L = \frac{\rho V^2 S}{2} C_{L,\alpha}\alpha \tag{23}$$

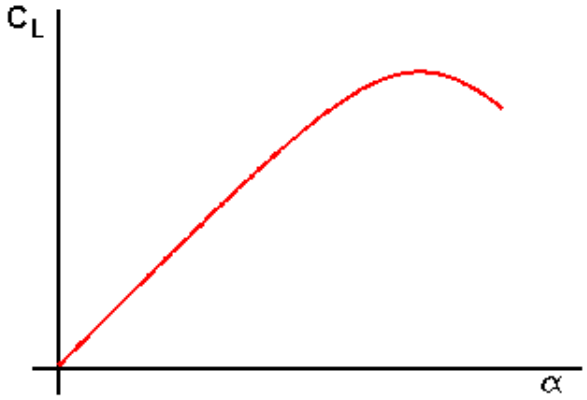


Figura 11: Coeficiente de sustentación frente a ángulo de ataque para números de Reynolds y de Mach constantes.

donde $C_{L,\alpha} = dC_L/d\alpha$.

Al estudiar las líneas de corriente en torno a un cuerpo sumergido en el aire, se observó que, antes de entrar en pérdidas, hay una capa de fluido inmediatamente adyacente al cuerpo en la cual se producen fuertes variaciones de velocidad en el seno del fluido: en la superficie de contacto fluido-sólido su velocidad es la del propio sólido, mientras que a pequeñas distancias en perpendicular a la superficie de contacto se alcanzan velocidades similares a las que se tendrían si la viscosidad fuese despreciable. Es la zona conocida como capa límite, ver Anexo A, en cuyo interior el efecto de las fuerzas viscosas no es despreciable. La entrada en pérdidas se caracteriza porque la capa límite, entendida como capa delgada con una distribución regular del fluido, se separa de la superficie de contacto, pasando su lugar a ser ocupado por una estela turbulenta, ver Anexo A; fenómeno asociado a una pérdida de la sustentación y un incremento del arrastre. En la fotografía 21 se puede ver una imagen de un cuerpo esbelto a bajo ángulo de ataque que únicamente tiene una pequeña estela enganchada a su borde de salida junto con otra imagen del mismo cuerpo a gran ángulo de ataque, habiendo entrado en pérdidas y con casi toda la capa límite del extradós desprendida.

Un aumento del número de Reynolds implica una transición más temprana entre la capa límite laminar y la capa límite turbulenta, ver Anexo A. Puesto que la capa límite turbulenta se desprende con más dificultad, aumenta el valor del ángulo de entrada en pérdidas.

En cuanto a la dependencia con el número de Mach: durante el régimen subsónico no hay apenas variación, en el régimen transónico se aprecian cambios intensos en el valor de la sustentación que dan paso a valores más regulares y ligeramente decrecientes, una vez que se penetra dentro del rango plenamente supersónico, ver la figura 12. La principal consecuencia de esta dependencia es que interesa no mantener el vuelo en el régimen transónico; ya que, un mismo error en la determinación de la velocidad, se traduce en un error mayor en la determinación del ángulo de ataque necesario para producir una cierta sustentación.

3.4. Propiedades de la fuerza de arrastre.

Para estudiar la fuerza de arrastre conviene tener en cuenta que su valor total se debe a la suma de cuatro efectos distintos:

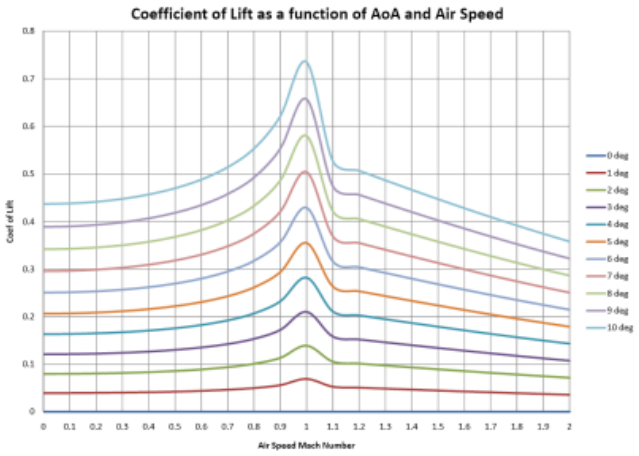


Figura 12: Dependencia del coeficiente de sustentación, C_L, con el número de Mach para varios ángulos de ataque.

1) Término de fricción superficial.

2) Término de forma.

3) Arrastre inducido por la sustentación.

4) Término de onda.

3.4.1. Fricción supercial.

Es la integral de los esfuerzos tangenciales sobre la superficie de contacto entre el sólido y el fluido. La presencia de una capa límite implica que las velocidades alineadas con la entrefase fluido-sólido tienen gradientes (variaciones) altas en dirección perpendicular a la entrefase. Es decir, recordando la ley constitutiva de un fluido, ecuación 1, esfuerzos tangenciales viscosos importantes.

No presenta una gran dependencia con el ángulo de ataque. En cambio, sí que presenta una dependencia clara con el número de Reynolds según que la capa límite sea laminar o turbulenta, véase la figura 13.

Depende del acabado del cuerpo, de la rugosidad de la superficie de contacto entre el cuerpo y el fluido.

3.4.2. Término de forma.

Está asociado al desprendimiento de la capa límite y la aparición de una estela turbulenta aguas abajo del cuerpo sólido.

En el punto de remanso, aguas arriba, se tiene una presión elevada debido a que el flujo se frena en la zona donde el teorema de Bernouilli es de aplicación, antes de penetrar en la capa límite. Por el contrario una estela turbulenta está asociada a una zona de bajas presiones ya que una buena parte de la energía aparece en forma de torbellinos sujetos a rotación. El efecto neto es el de una fuerza aerodinámica sobre el cuerpo que tiende a arrastrarlo aguas abajo, junto con el flujo medio.

Su dependencia frente al ángulo de ataque es de tipo función cuadrática, curva parabólica.

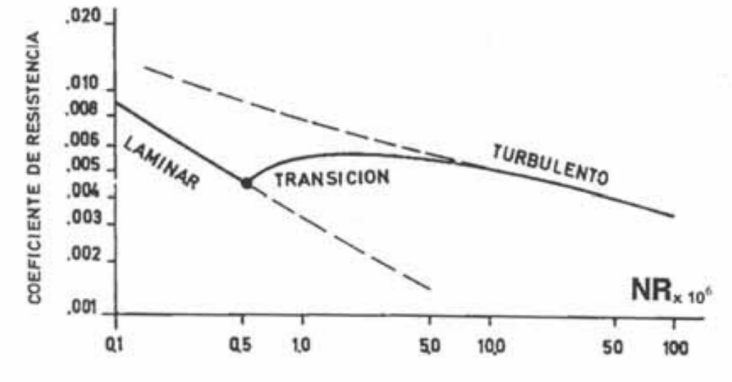


Figura 13: Contribución de la fricción superficial al coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds.

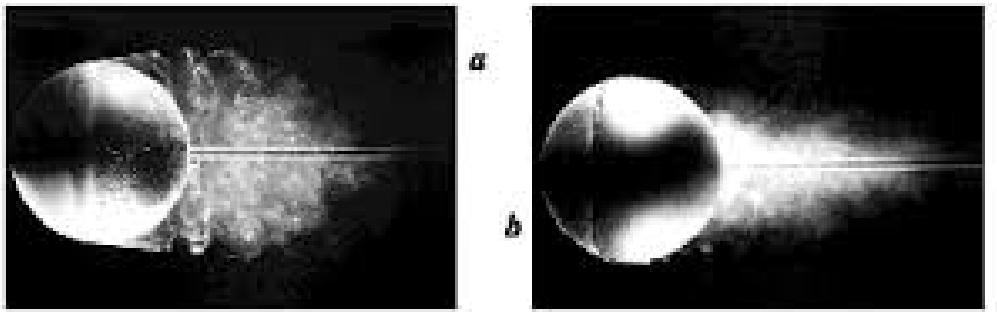


Figura 14: Figura de la izquierda: esfera con capa límite laminar. Figura de la derecha: esfera con capa límite turbulenta. Se observa como en el paso de laminar a turbulenta se incrementa el área mojada por la capa límite y disminuye el tamaño de la estela.

Su dependencia frente al número de Reynolds permite discriminar las situaciones en las que se produce el fenómeno del reapego de la capa límite. Existen algunos cuerpos en los que, al producirse la transición de capa límite laminar a capa límite turbulenta, si la capa límite estaba desprendida, la mayor estabilidad de la capa límite turbulenta, ver Anexo A, hace que ésta se vuelva a pegar al cuerpo y la subsecuente separación de la misma se retrase hasta un punto situado aguas abajo de lo que estaba ocurriendo. Como resultado, el término de forma sufre una disminución brusca. Véase la fotografía 14 para visualizar el efecto de un incremento del número de Reynolds con reapego de la capa límite sobre una esfera y la figura 15 para una representación del valor del coeficiente de arrastre para varios cuerpos en función del número de Reynolds.

3.4.3. Resistencia parásita.

En todo cuerpo sumergido en el aire aparece tanto término de fricción superficial como término de forma, su suma se llama resistencia parásita. Los cuerpos esbeltos, con valores menores de la suma de ambas contribuciones, se caracterizan porque predomina la contribución de la fricción superficial sobre el término de forma. Los cuerpos romos, con valores mayores de la suma de ambas contribuciones, se caracterizan porque predomina el término de forma sobre la fricción superficial.

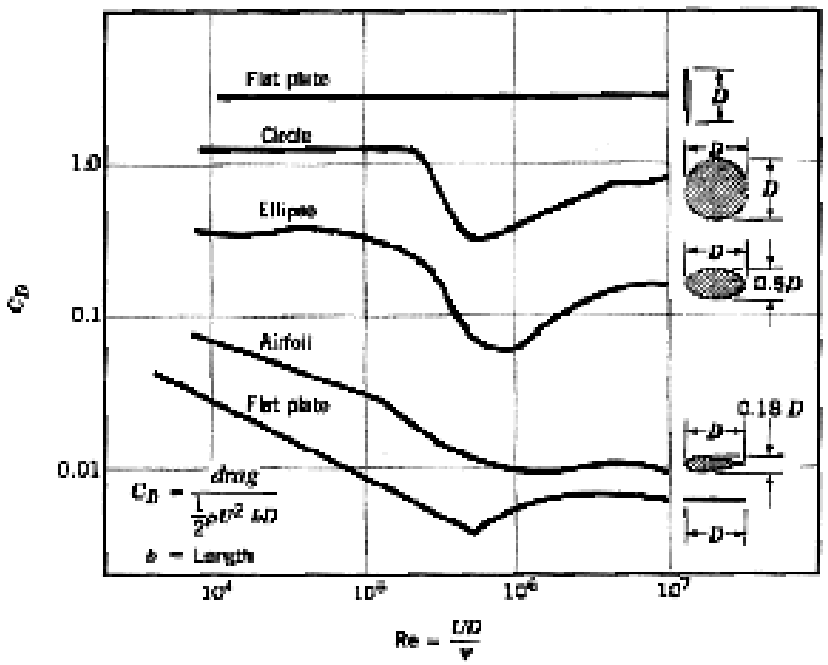


Figura 15: Contribución del término de forma al coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para varios cuerpos. Se aprecia en algunos de ellos la disminución del valor del término de forma provocada por el reapego de la capa límite turbulenta.

3.4.4. Arrastre inducido por la sustentación.

Es un término que aparece debido a la tridimensionalidad de las alas. Los términos estudiados hasta ahora aparecerían incluso en alas infinitamente largas (perfiles en dos dimensiones).

Si un ala ejerce sustentación, la presión en el extradós es menor que en el intradós. Como efecto secundario, cuando las líneas de corriente del intradós llegan a la punta del ala se encuentran con una zona de menor presión en la que se intentan introducir. Como resultado, las líneas de corriente del intradós y del extradós se arremolinan en la punta del ala, véase la figura 16 formando un vórtice que se desprende del ala y adquiere una componente no nula de momento lineal hacia abajo, flujo descendente, véase la fotografía 17. En última instancia, los torbellinos generados en cada punta de ala están girando en sentido contrario de modo que el torbellino de un extremo induce un flujo hacia abajo en el torbellino del otro extremo y viceversa, véase la figura 18

La sustentación real es perpendicular a la dirección local del viento sobre el perfil de ala que coincide con la de dicho flujo descendente, en lugar de hacerlo con la del flujo incidente. Como resultado, la sustentación tendrá una componente perpendicular al flujo incidente, la sustentación por definición que aparece en las tablas, y una componente alineada con la dirección del flujo incidente que se suma al arrastre, es el arrastre inducido por sustentación, veáse la figura 19.

Puesto que se trata de un fenómeno tridimensional producido en la punta del ala, éste término disminuye si se trabaja con alas con un gran valor del alargamiento. La minimización de este término es la razón del ser de la forma alargada de las alas de los aviones subsónicos o de las alas de las aves que tienen que volar largas distancias planeando. No obstante, el alargamiento tiene un límite impuesto por la resistencia estructural de la superficie sustentadora que disminuye al aumentar el

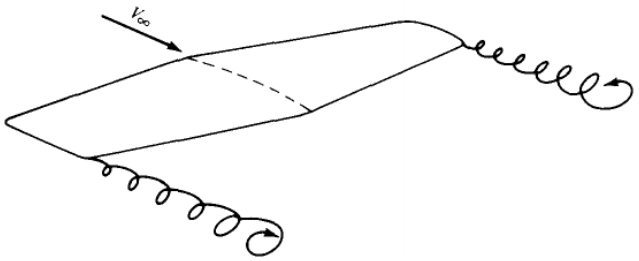


Figura 16: Vórtices (remolinos) asociados a la punta de un ala tridimensional.



Figura 17: Fotografía del efecto del flujo descendente sobre una capa de nubes por debajo de un avión.

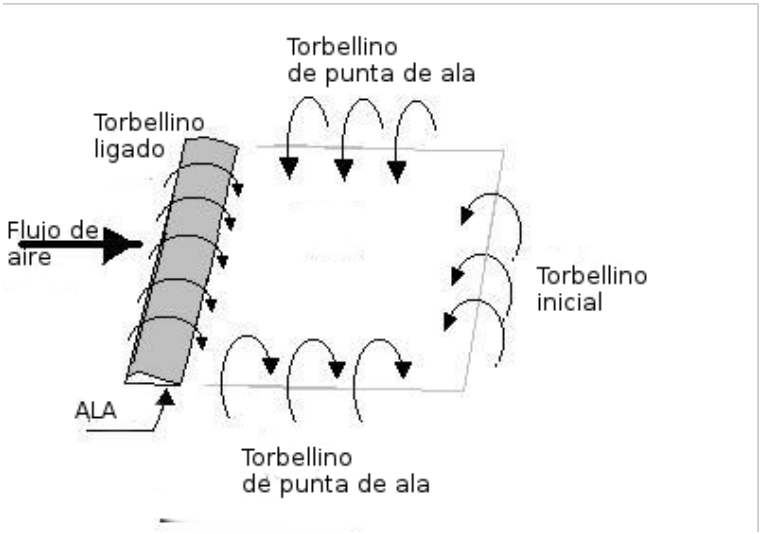


Figura 18: Esquema de las líneas de corriente asociadas a los vórtices que se forman en torno a un ala tridimensional finita.

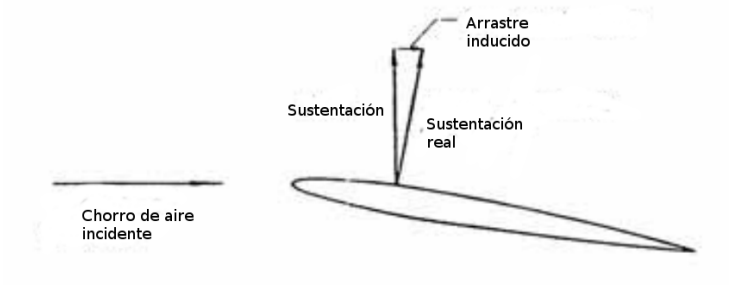


Figura 19: Descomposición de la sustentación real en sustentación y arrastre inducido por la sustentación.

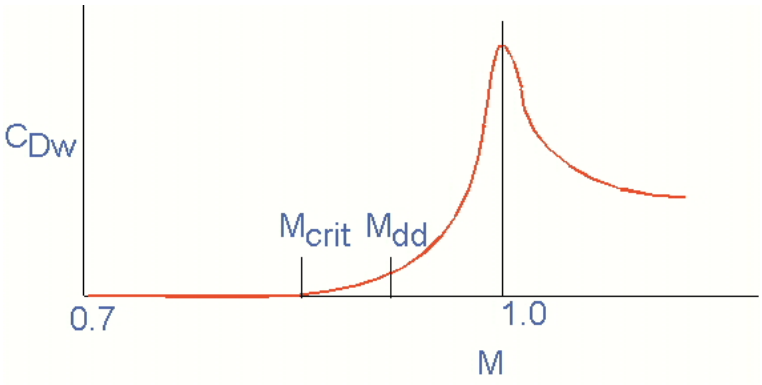


Figura 20: Ejemplo de variación del coeficiente de arrastre inducido por onda frente a número de Mach.

alargamiento.

En cuando a su dependencia funcional, se trata de un término cuadrático en el coeficiente de sustentación. Es decir de trata de un contribución a C_D que es $\propto C_L^2$. Si se trabaja en el rango lineal de la sustentación, $C_L \propto \alpha$ y el término de arrastre inducido por la sustentación se suma a la contribución cuadrática en el ángulo de ataque proviniente del término de forma.

3.4.5. Término de onda.

Es un término que aparece en el flujo supersónico asociado a la aparición de ondas de choque, ver Anexo B y que es proporcional al cuadrado de la razón entre el área de la sección transversal al flujo y la longitud del cuerpo supersónico.

Es prácticamente independiente del ángulo de ataque. Sin embargo, se muestra como un brusco incremento en el valor de la fuerza de arrastre a partir del momento en el que se penetra en el régimen transónico. Véase la figura 20. A partir del momento en que se entra en el régimen transónico, $Ma_{critico}$, se empieza a formar una onda de choque pegada al cuerpo con un fuerte incremento de la resistencia aerodinámica que alcanza un máximo alrededor de $Ma = 1$. Posteriormente, en el flujo plenamente supersónico, el valor del arrastre de onda disminuye con respecto a su valor máximo; pero no se anula.

Debido a que en la interacción entre onda de choque y capa límite, se desprende la capa límite,

interesa que los perfiles de ala supersónicos queden completamente dentro del cono de Mach, repásese la asignatura Física II, de ángulo $\theta = \text{arcsen}(1/Ma)$, que se forma a partir de la punta del cuerpo supersónico, supuesta afilada. La necesaria sustentación en estas condiciones se optimiza tomando alas con forma triangular en planta.

3.5. Origen de las fuerzas aerodinámicas.

Las explicaciones populares sobre el origen de las fuerzas aerodinámicas suelen emplear el teorema de Bernouilli: el aire va más deprisa por el extradós que por el intradós y, consecuentemente, la presión es menor en el extradós por lo que surge una fuerza de sustentación por diferencia de presiones.

Sin embargo, dicha explicación sólo es válida una vez que ya se haya creado la capa límite para analizar las líneas de corriente inmediatamente por fuera de la misma como responsables de sustentar tanto al sólido como al fluido contenido dentro de la capa límite.

En cuanto al porqué surge la propia capa límite, hay un teorema debido a Kelvin que demuestra que, bajo las hipótesis bajo las que es válido el teorema de Bernouilli, la circulación del campo de velocidad de un medio fluido es un invariante. Esto significa, literalmente, que si se puede aplicar Bernouilli en todo el dominio fluido y en todo instante de tiempo, es imposible que una aeronave vuele.

En efecto, si se tiene un chorro de aire uniforme incidiendo contra un cuerpo estilizado, no cuesta mucho trabajo comprobar que la circulación en el chorro de aire uniforme vale cero, sin más que tomar un camino rectangular alineado con la dirección del chorro por un lado, perpendicular por otros dos lados y antialineado por el cuarto lado. Las contribuciones perpendiculares se anulan ya que la circulación implica el producto escalar del vector $\vec{v}$ por el camino recorrido y las otras dos contribuciones son iguales pero de signo contrario (ángulos entre $\vec{v}$ y caminos recorridos de valores 0 y π radianes, respectivamente, con idénticos módulos). Por su parte, si se repite el cálculo alrededor del cuerpo estilizado, la contribución procedente el extradós (mayor velocidad) será mayor que la procedente del intradós y la circulación total será no nula.

Este resultado, de acuerdo al teorema de Kelvin, es imposible que ocurra si el teorema de Bernouilli también es de aplicación. ¿Qué está pasando?

La respuesta se puede encontrar analizando la solución que obtuvo D'Alambert para el flujo alrededor de un cuerpo sólido, sin tener en cuenta la viscosidad, y que le dio un valor nulo para las fuerzas aerodinámicas.

En las figuras B.19.a y B.19.b del tema 3 de **?** se puede ver como quedaría la solución de D'Alambert alrededor de un perfil y de una placa plana con la aparición de dos puntos de remanso: uno a la entrada y otro a la salida. Sin embargo, para que el flujo pasase desde el intradós hacia el punto de remanso posterior, tendría que curvarse hacia atrás (en dirección contraria a la que llevaba) lo que produciría valores extremadamente altos de la velocidad [13] en la zona próxima al borde de salida. Esos valores tan altos, variando en una zona pequeña, implican valores muy fuertes de la viscosidad en cuanto ésta se incluya en el análisis, independientemente de lo pequeño que sea el coeficiente de viscosidad.

Como consecuencia, el flujo procedente el intradós se frena en la zona del borde de salida creando una zona de bajas presiones que tiende a ser ocupada por una aceleración del flujo procedente del

[13] Infinitos, de hecho, con bordes de salida perfectamente afilados.

extradós: empieza a formarse una pequeña capa límite alrededor del cuerpo (flujo procedente del extradós acelerado) que se desprende en el propio borde de salida (flujo procedente del intradós frenado) formando un torbellino con circulación de la misma magnitud y sentido contrario que la circulación que va apareciendo sobre el propio cuerpo. Esta fase se puede observar en la figura B.19.bis.c del tema 3 de **?** y es perfectamente compatible con el teorema de Kelvin que prohibe la aparición de circulación neta a partir de un chorro incidente de circulación nula; pero no el que aparezcan regiones dentro de la zona estudiada con circulaciones iguales y de sentido contrario (total nulo). Tómese nota de que el chorro de salida todavía sigue orientado en la misma dirección que el de entrada; por acción-reacción esto significa que todavía no ha aparecido una fuerza de sustentación sobre el cuerpo que empuje al chorro en sentido contrario.

A continuación ese torbellino procedente del desprendimiento de la capa límite en la zona del borde de salida, llamado vórtice de inicio, es arrastrado aguas abajo por el flujo que empieza a ordenarse con circulación no nula alrededor del perfil estudiado, véase la figura B.19.bis.d del tema 3 de **?**. En cuanto se produce la separación, el chorro de aire saliente tiene una componente hacia abajo que por acción-reacción significa que, si ha adquirido momento lineal hacia abajo es porque el cuerpo está experimentando una fuerza hacia arriba (la sustentación).

Este mecanismo de generación de circulación por pares globalmente nulos, asociado a la aparición de fuertes términos viscosos en las proximidades del borde de salida es el auténtico responsable del origen de la capa límite y, por ende, de las fuerzas aerodinámicas tal y como las conocemos e implica un pequeño retardo asociado a la formación y desprendimiento del vórtice de inicio como condición para que pueda haber cambios en la sustentación. Una vez que se ha creado la circulación y la capa límite alrededor del perfil, ya es posible hacer uso del teorema de Bernouilli para estudiar lo que pasa con las capas de aire adyacentes a la capa límite, pero por fuera de la misma.

A. Capa límite y estela turbulenta.

En tanto en cuanto sea válida la hipótesis del continuo [14], la velocidad del fluido en contacto con un sólido sumergido en el mismo coincide con la del propio sólido (velocidad relativa nula en los puntos de contacto).

No obstante, esa velocidad cambia muy rápido sobre una zona delgada pegada al cuerpo en cuestión, hasta adquirir el valor que le correspondería a un flujo libre en cuyo interior hubiese un remolino de circulación igual a la que se asocie al sólido estudiado para impedir la aparición de un punto de remanso posterior. Dicha capa se llama capa límite y su existencia fue propuesta experimentalmente por Lanchester y teóricamente por Prandtl entre finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Su espesor se toma por convenio como aquel comprendido entre la superficie de contacto y el punto donde la corriente toma un valor igual al 99 % de su valor libre.

Se puede asociar un número de Reynolds a la capa límite tomando como longitud característica su espesor en lugar de las dimensiones de todo el cuerpo. El resultado es un número de Reynolds bajo que comienza siendo característico del flujo laminar (capa límite laminar). Conforme el flujo se aleja del borde de ataque, el espesor de la capa límite crece y con él el número de Reynolds crece hasta que se produce la transición a flujo turbulento (capa límite turbulenta). Véase la figura A.5 del tema 3 de **?**.

[14] Números de Knudsen mayores o iguales que 10 en un gas.

Por un lado, la capa límite turbulenta tiene una mayor resistencia de fricción superficial que la capa límite laminar; pero por otro lado se desprende con mayor dificultad. Para cuerpos estilizados, en los que no hay desprendimiento de la capa límite interesa mantener su carácter laminar y aumentar el rango de ángulos de ataque antes de que se entre en pérdidas mediante mecanismos de succión. Para cuerpos romos, como una pelota de golf, en los que la capa límite se desprenderá de todas formas, interesa incrementar la turbulencia dándole rugosidad a la superficie de contacto sólido-fluido para que dicho desprendimiento se retrase lo más posible.

El desprendimiento de la capa límite se puede observar en las fotografías 21 y está, principalmente, asociado al crecimiento del ángulo de ataque. El que la capa límite se desprenda no significa que surja el vacío sino que el hueco que deja es ocupado por una **estela turbulenta**: una zona en la que el fluido tiene un comportamiento aparentemente caótico, con torbellinos fluctuantes de tamaño similar a la distancia entre los puntos en los que la capa límite se separa [15], en la que la presión y el movimiento de traslación del fluido como un todo disminuyen para que la mayor parte de la energía quede almacenada en los torbellinos recirculantes que aparecen.

Por el contrario, en una capa límite turbulenta, los torbellinos turbulentos que aparecen son de una escala limitada por el espesor de la propia capa límite y, a pesar de su presencia como fluctuaciones aparentemente caóticas, el valor del flujo estadísticamente promediado sigue conservando una gran regularidad en el interior de la capa límite.

B. Ondas de choque.

Una onda de choque es una superficie de discontinuidad [16], a través de la que se produce un cambio brusco en las propiedades termodinámicas del fluido y en su velocidad de propagación.

Puesto que, a cada lado de una onda de choque las presiones son distintas, aparecen fuerzas netas sobre la misma responsables del arrastre por onda. La capa de aire alrededor de la aeronave supersónica se ve frenada por la onda de choque y, para mantener su velocidad, tiene que extraer una fuerza igual y de sentido contrario a partir de las presiones y términos viscosos que se desarrollen en su contacto con la aeronave.

[15] Uno por el extradós y otro por el intradós, alguno de ellos puede ser coincidente con el borde de salida.
[16] En realidad no es una superficie pura, tiene espesores en el rango de las micras.

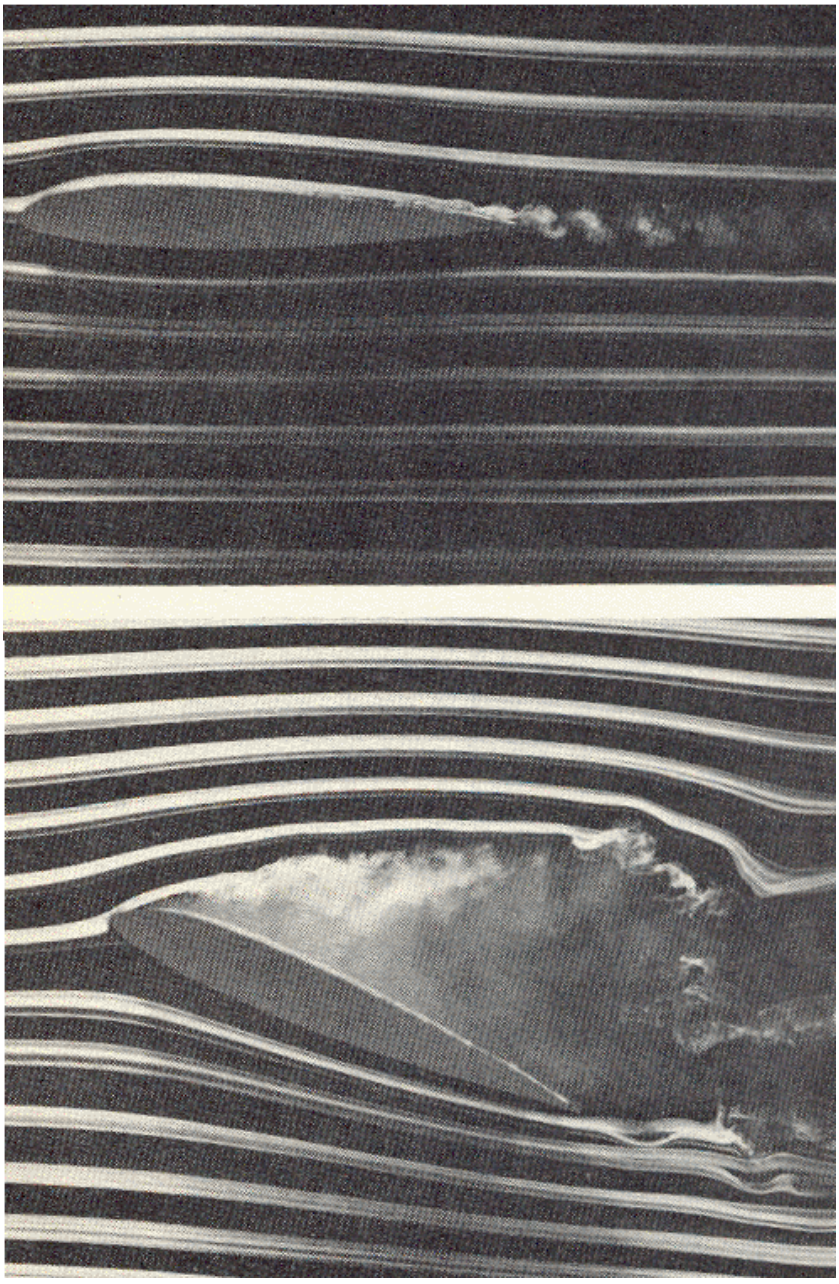


Figura 21: Imágenes tomadas con humo. Superior: capa límite adherida, bajo ángulo de ataque. Inferior: capa límite separada, alto ángulo de ataque.