

Aritmética básica

Esta parte es fundamental, y son los elementos básicos de cualquier curso de matemáticas:

- Operaciones aritméticas básicas. Para repasar esta parte debéis mirar en operaciones básicas (¡recordad el **navegador Explorer**!).
- Sistema métrico decimal. En operaciones básicas.
- Radicación. En operaciones básicas.
- Razones y proporciones. En operaciones básicas.

De cada parte, tenéis los ejercicios resueltos en el *Bloque I: Aritmética Básica* (formato pdf).

Notación matemática

Brevemente también, algunas cosas en cuanto a la notación:

- $f(x)$ representa a una función (llamada "f") que se aplica al valor x (en nuestro caso, siempre va a ser un número real). Se lee "efe de x". A x se le denomina variable independiente, y a la función de x (a $f(x)$) que se le asigna también por y, se le llama variable dependiente.
- (x_i, y_i) representa un punto arbitrario en el plano, de coordenadas x_i (horizontal), y_i (vertical). El subíndice i es un número entero positivo, $i = 0, 1, 2, ...$
- El sumatorio $\sum x_i$, indica que sumamos en ese subíndice. Supongamos que tenemos 10 valores x_i, entonces $i = 1, 2, ..., 10$. Para sumar todos esos valores, podemos escribirlo

  $$\sum x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10},$$

  indicando de dónde a dónde va el subíndice i, o sin indicar nada, con lo que automáticamente debemos suponer que suma en todos los valores de i. Pero si sólo queremos sumar unos cuantos valores, por ejemplo el x_5, x_6 y x_7, sí debemos indicar esto en el sumatorio

  $$\sum_{i=5}^{7} x_i = x_5 + x_6 + x_7.$$

- La misma idea para el símbolo del producto $\prod z_i$, indica que multiplicamos en ese subíndice. Supongamos que tenemos 7 valores z_i, entonces $i = 1, 2, ..., 7$. Para sumar todos esos valores, podemos escribirlo

  $$\prod z_i = \prod_{i=1}^{n} z_i = z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_7,$$

  indicando de dónde a dónde va el subíndice i, o sin indicar nada, con lo que automáticamente debemos suponer que multiplica en todos los valores de i. Pero si sólo queremos multiplicar unos cuantos valores, por ejemplo el z_2, z_3, z_4 y z_5, sí debemos indicar esto en el símbolo del producto

  $$\prod_{i=2}^{5} z_i = z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5.$$

Números complejos

Como los vamos a necesitar, muy brevemente, en la página siguiente, adjunto un breve resumen, suficiente para nosotros, proporcionado por la profesora M. Angeles Prieto de la UCM.

Números complejos

1. Introducción

Podemos pensar en las progresivas ampliaciones de los conjuntos numéricos como el método necesario para resolver ecuaciones algebraicas progresivamente complicadas. Así, el paso de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ se justificaría por la necesidad de dar solución a una ecuación como

$$x + 5 = 0,$$

y el paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ por la necesidad de dar solución a ecuaciones de la forma

$$5x = 1.$$

El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ es más complicado de explicar en este momento, puesto que es más topológico que algebraico, pero permite además dar solución a ecuaciones como

$$x^2 - 2 = 0.$$

El paso de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ viene motivado históricamente por la necesidad de trabajar con las soluciones de ecuaciones como

$$x^2 + 1 = 0,$$

es decir, con raíces cuadradas de números negativos. Inicialmente, se trabajaba con dichas raíces, llamadas *números imaginarios* por Descartes, como paso intermedio hasta llegar a un número real (típicamente elevando el número imaginario al cuadrado en algún momento de los razonamientos). Posteriormente, en los siglos XVIII y XIX, se formaliza la noción de número complejo, lo que convierte a estas entidades algebraicas en "miembros de pleno derecho" de las familias numéricas.

2. Definición

La manera más sencilla de trabajar con los números complejos es dar un nombre abreviado a $\sqrt{-1}$. A esta cantidad la llamaremos i. Hecho eso, y suponiendo inicialmente que esta cantidad "se portará bien", ya podemos realizar cálculos como

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)(25)} = \sqrt{-1}\sqrt{25} = 5i.$$

Necesitaríamos poder sumar y multiplicar estos nuevos números. Está claro que si $b, c \in \mathbb{R}$, se debiera tener

$$bi + ci = (b + c)i.$$

Por otro lado, para $a, b \in \mathbb{R}$ no podremos simplificar la expresión $a + bi$.

Veamos el producto. En primer lugar está claro que si hemos definido i como $\sqrt{-1}$, entonces

$$i^2 = -1.$$

Por otro lado, si vamos a tener un producto asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, se deberá tener

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Con esto ya sabríamos sumar y multiplicar complejos.

3. Formalización

Como siempre en matemáticas, estas ideas intuitivas se pueden (y se deben) formalizar. Una de las formalizaciones más habituales es pensar en los complejos como pares $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con una suma y un producto definidos por

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b)(c,d) &= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned}$$

Es un ejercicio sencillo comprobar que la suma es conmutativa, asociativa, que existe un elemento neutro (el $(0,0)$) y que todo elemento tiene simétrico. Igualmente fácil es comprobar que el producto es conmutativo, asociativo, que existe un elemento neutro (el $(1,0)$) y que todo elemento distinto de $(0,0)$ tiene inverso. También es fácil comprobar que el producto es distributivo respecto de la suma. Decimos entonces que los números complejos tienen estructura de *cuerpo conmutativo*, noción que ya conoceréis más adelante.

Es obvio que esta formalización (cuya notación apenas utilizaremos) coincide con la noción intuitiva descrita en la sección anterior, sin más que identificar

$$(a,b) \equiv a+bi.$$

A cualquiera de estas dos notaciones se las conoce como *forma binómica* del número complejo.

Llamaremos $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos con la suma y producto definidos.

Es muy fácil darse cuenta de que podemos identificar de manera natural un elemento a de $\mathbb{R}$ con el complejo $a+0i=(a,0)$. De esta forma podemos considerar $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$.

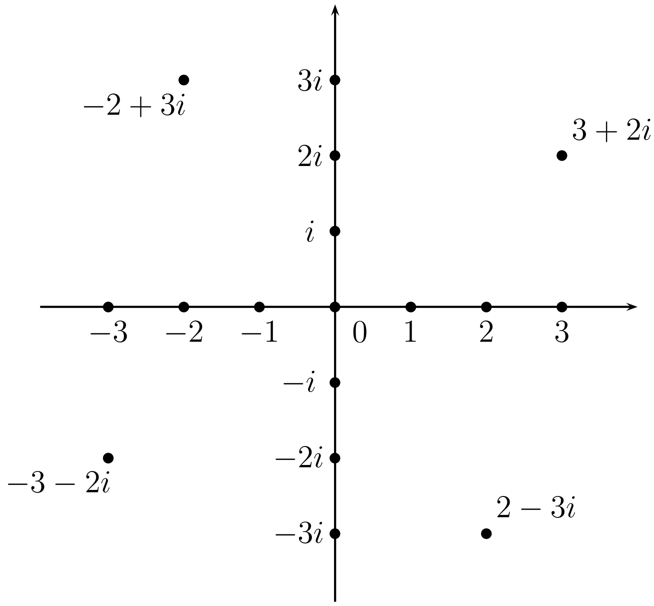
Análogamente, tendríamos un conjunto destacado de números complejos formado por aquellos de la forma $bi = 0+bi = (0,b)$. A estos números se les denomina a menudo *imaginarios puros*.

Dado un complejo $z=a+bi$ nos referiremos a a como su *parte real* y a b como su *parte imaginaria*

$$\begin{aligned} a &= \Re z, \\ b &= \Im z. \end{aligned}$$

4. Interpretación geométrica

Puesto que podemos ver un número complejo como un par $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es natural interpretarlo como un punto del plano. Llamaremos *plano complejo* al plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cuando pensamos en él como formado por números complejos. Es claro que en el plano podemos identificar el eje de abscisas con la recta de los números reales, y el eje de ordenadas con la recta formada por los números imaginarios puros.



5. Conjugación

Una noción muy importante al usar números complejos y que es propia de éstos es la noción de *conjugación*.

Definición 5.1. Dado un complejo $z = a + bi$ definimos su conjugado $\overline{z}$ como

$$\overline{z} = a - bi.$$

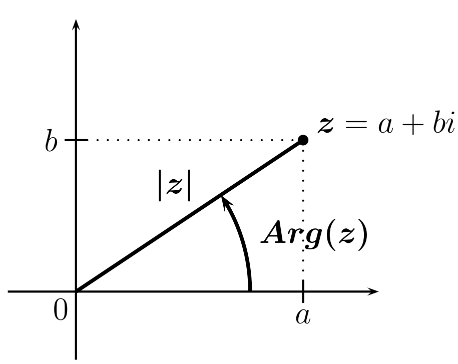
Observamos que si $z = a + 0i$ es real, $\overline{z} = z$. Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = z \text{ y } z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

6. Forma módulo-argumental

Si pensamos en un complejo $z = a+bi$ como un punto del plano, podemos referirnos a él de varias formas. La primera, con la propia notación binomial. Otra forma de describir ese punto del plano sería decir a qué distancia está el punto del origen y qué ángulo forma el segmento que une 0 con z con la parte positiva del eje de abscisas. Llamaremos *módulo* de z a la longitud del segmento que une 0 con z, y lo denotaremos como $|z|$ (una cantidad estrictamente positiva, salvo en el caso de $z = 0$, que es nula). Utilizando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

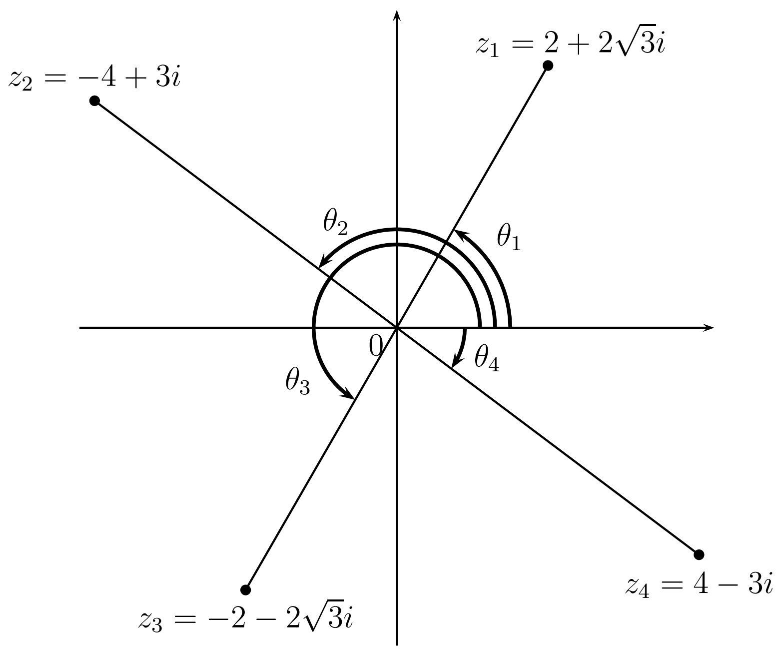


El *argumento* de un número complejo z distinto de 0, denotado $Arg(z)$, es el ángulo que forma el segmento que une 0 con z con la parte positiva del eje de abscisas, siendo el sentido positivo para la medida de dicho ángulo, como es habitual, el contrario al de las agujas del reloj.

Se puede ver que

$$Arg(z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right),$$

teniendo en cuenta que podemos tener que sumar o restar π al ángulo así obtenido, en función de los signos de a y b.



$\theta_1 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$; $\quad \theta_3 = \pi + \theta_1 = \frac{4\pi}{3}$
$\theta_4 = \operatorname{arc\,tg}(-0.75) = -0.6435; \quad \theta_2 = \pi + \theta_4 = 2.4981.$

Por supuesto, debiera ser posible (y de hecho lo es) recuperar la forma binómica del complejo a partir de su módulo y su argumento. Sea $z = a + bi$. Llamando $\rho = |z|$ y $\theta = Arg(z)$, se puede ver que

$$a = \rho \cos\theta, \qquad b = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

de manera que tenemos

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Notad que esta presentación del complejo es formalmente binomial, pero a la vez deja a la vista quiénes son el módulo y el argumento de θ.