

Apuntes de:

Teoría de Circuitos

y

Laboratorio de Electricidad

(Anillo Digital Docente de la Universidad de Zaragoza)

Autores:

- Jesús Sallán Arasanz*
- Andrés Llombart Estopiñán*
- Miguel Ángel García García*
- Julio J. Melero Estela*
- Miguel García Gracia*

***Departamento de Ingeniería Eléctrica
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza***

1. LEYES DE KIRCHHOFF

1.1. Introducción

Se llama *circuito eléctrico* a un conjunto de elementos conectados entre sí a través de los cuales existe la posibilidad de que circule una corriente eléctrica.

La *Teoría de Circuitos* se dedica al estudio de las propiedades y el comportamiento de los circuitos eléctricos.

Analizar un circuito consiste en hallar, para cada elemento que lo compone, la expresión de la diferencia de potencial existente entre sus bornes, así como la expresión de la corriente eléctrica que lo atraviesa. Para ello, se supondrá conocida la configuración del circuito, los elementos que lo integran y sus condiciones iniciales de funcionamiento.

En este capítulo se introducen los conceptos de tensión y corriente eléctrica, además de enunciarse las leyes de Kirchhoff.

1.2. Definiciones básicas

Se define la *corriente eléctrica* como el número de cargas que circulan por una sección dada de un conductor por unidad de tiempo debido a la existencia de una diferencia de potencial eléctrico entre sus extremos. Expresando matemáticamente esta definición se tiene que:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Se define la *tensión* entre dos puntos 1 y 1' como la diferencia entre los potenciales eléctricos de esos puntos, esto es:

$$u_{11'} = V_1 - V_{1'} \quad (3)$$

Se define *rama* de un circuito al elemento o grupo de elementos que presenta dos terminales y del que se puede conocer la relación entre la tensión entre sus terminales y la corriente que lo atraviesa.

Se define *nudo* de un circuito al punto de unión de dos o más ramas.

1.3. Referencias de polaridad

Para indicar la tensión o la intensidad que circula por un elemento de un circuito no basta con indicar el valor de dichas magnitudes, sino que también es necesario determinar el sentido en que circula la corriente por el elemento, o bien cuál de sus dos extremos se encuentra a mayor potencial eléctrico. Para poder determinar de una forma sencilla estos sentidos, es necesario asignar a cada elemento de un circuito lo que se denominan *referencias de polaridad*.

Por convenio, se toma como sentido de la corriente el opuesto al movimiento de los electrones, esto es, el sentido del movimiento de unas supuestas cargas ideales positivas.

Dado un conductor por el que circula una corriente eléctrica, la forma de dar una referencia de corriente a dicho conductor consiste en dibujar sobre él una flecha en sentido arbitrario. Si las cargas ideales positivas se desplazan en el sentido de la flecha dibujada, la corriente se considerará positiva, y, en caso contrario, se considerará que dicha corriente es negativa.

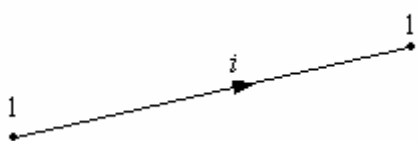


FIGURA 1

Otra manera de establecer la referencia de corriente en un conductor consiste en la utilización de un doble subíndice. De esta forma, si se tiene que la corriente $i_{11'} = 3 \text{ A}$, significará que las cargas ideales positivas circulan del punto 1 al 1'. Por el contrario, si se tiene que $i_{11'} = -3 \text{ A}$, significará que dichas cargas circularán del punto 1' al 1. Esto último es lo mismo que decir que $i_{1'1} = 3 \text{ A}$, esto es, se cumple que:

$$i_{11'} = -i_{1'1} \quad (2)$$

Dados dos puntos de un circuito, una forma de dar referencia a la tensión que existe entre estos dos puntos es a través de los subíndices, colocando en primer lugar el subíndice correspondiente al punto a mayor potencial eléctrico. Así, si se tiene que $u_{11'} = 8 \text{ V}$, quiere decir que el potencial eléctrico del punto 1 es 8 V superior al potencial eléctrico del punto 1'. Por el contrario, si se tiene que $u_{11'} = -8 \text{ V}$, querrá decir que el potencial del punto 1' es 8 V superior al potencial del punto 1. De lo anterior se deduce que siempre se cumple que:

$$u_{11'} = -u_{1'1} \quad (4)$$

Existe otra manera de dar referencias a la tensión que existe entre dos puntos, y consiste en dibujar una flecha que, partiendo de uno de dichos puntos, apunte al otro. Se entenderá que la tensión que indica la flecha corresponde a la diferencia entre el potencial eléctrico del punto del que parte y el potencial eléctrico del punto al que apunta.

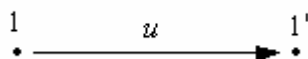


FIGURA 2

De esta forma, de acuerdo con la referencia de tensión indicada en la figura 2, si se escribe que la tensión $u = 8 \text{ V}$, se estará indicando que $V_1 - V_{1'} = 8 \text{ V}$, es decir, que el potencial del punto 1 es 8 V superior al potencial del punto 1'. Si, por el contrario, $u = -8 \text{ V}$, querrá decir que $V_1 - V_{1'} = -8 \text{ V}$, es decir, que el potencial del punto 1' es 8 V superior al potencial del punto 1.

1.4. Leyes de Kirchhoff

En un circuito, las conexiones realizadas entre los diferentes elementos que lo constituyen imponen una relación entre las tensiones existentes en los bornes de dichos elementos, así como una relación entre las intensidades que atraviesan cada uno de ellos. Estas relaciones, que se conocen como *leyes de Kirchhoff*, se establecieron empíricamente, y su enunciado se debe a Gustav Kirchhoff.

1.4.1. Primera Ley de Kirchhoff

Enunciado: dado un circuito, la suma algebraica de todas las intensidades que entran (salen) en un nudo a través del conjunto de conductores que concurren en él es, *en todo instante*, cero.

Así, si varios conductores concurren en un nudo tal y como se muestra en la figura 3, y para las referencias de intensidad en ella indicadas, se puede escribir que:

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad (5)$$

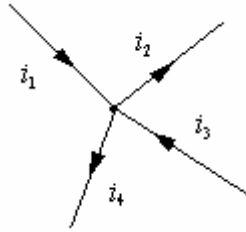


FIGURA 3

que también puede escribirse como:

$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}} \quad (6)$$

es decir, se cumple que la suma de todas las intensidades que entran en un nudo es igual, en todo instante, a la suma de todas las intensidades que salen de él.

La *generalización* de esta 1.^a Ley de Kirchhoff se enuncia de la siguiente manera: la suma algebraica de todas las intensidades que entran (salen) en un recinto cerrado es, en todo instante, cero.

Sea el recinto cerrado de la figura 4. Dicho recinto se ve atravesado por cuatro conductores en los que se ha establecido una referencia de corriente para cada uno de ellos.

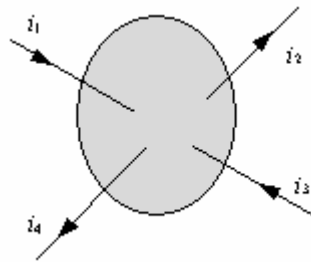


FIGURA 4

De acuerdo con la generalización de la 1.^a Ley de Kirchhoff, y para las referencias indicadas, se debe cumplir que:

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad (7)$$

1.4.2. Segunda Ley de Kirchhoff

Enunciado: dado un circuito, la suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es, *en todo instante*, cero.

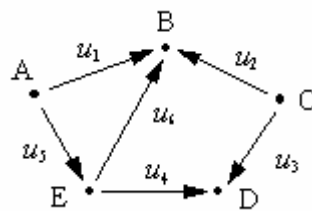


FIGURA 5

Aplicando la 2.^a Ley de Kirchhoff a las tensiones dibujadas en la figura 5 y considerando diferentes trayectorias, se podrá escribir que:

$$\begin{aligned}
 \text{Trayectoria } ABCDEA & \dots\dots\dots u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_5 = 0 \\
 \text{Trayectoria } ABEA & \dots\dots\dots u_1 - u_6 - u_5 = 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

esto es, que la tensión entre dos puntos es siempre la misma, sea cual sea la trayectoria seguida para ir entre estos dos puntos.

2. ELEMENTOS DE CIRCUITOS

2.1. Introducción

Se denomina *dipolo* a todo circuito eléctrico, compuesto por uno o varios elementos simples, que presenta dos terminales accesibles. Su representación esquemática es:

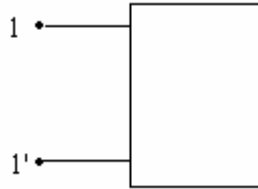


FIGURA 1

Se denomina *cuadripolo* a todo circuito eléctrico, compuesto por uno o varios elementos simples, que presenta cuatro terminales accesibles, de tal manera que su puerta de entrada es independiente de su puerta de salida. Su representación esquemática es:

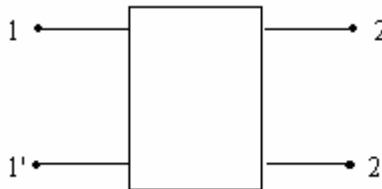


FIGURA 2

Se denomina *elemento activo* a aquel elemento de un circuito que es capaz de absorber o ceder potencia eléctrica.

Se denomina *elemento pasivo* a aquel elemento de un circuito que almacena o disipa energía eléctrica que otros elementos de dicho circuito le han comunicado, pero que en ningún caso es capaz de ceder más potencia eléctrica de la que previamente ha almacenado.

2.2. Elementos pasivos

En este apartado, se va a caracterizar cada uno de los elementos pasivos que componen los circuitos por una relación funcional entre la intensidad que circula a través de ellos y la caída de tensión entre sus terminales, esto es, relaciones del tipo:

$$u = \pm f(i) \quad (1)$$

$$i = \pm g(u) \quad (2)$$

Estas ecuaciones que modelan matemáticamente el comportamiento de dichos elementos se denominan *ecuaciones de definición*.

2.2.1. Dipolos

Dentro de este apartado se van a ver las ecuaciones de definición de los elementos pasivos simples con dos terminales accesibles, como son: resistencia, bobina y condensador.

El signo de las ecuaciones de definición dependerá del sentido relativo entre las referencias de tensión y de intensidad que tomemos para el dipolo considerado. Los diferentes sentidos relativos entre estas referencias, para un dipolo genérico, se muestran en la figura 3.

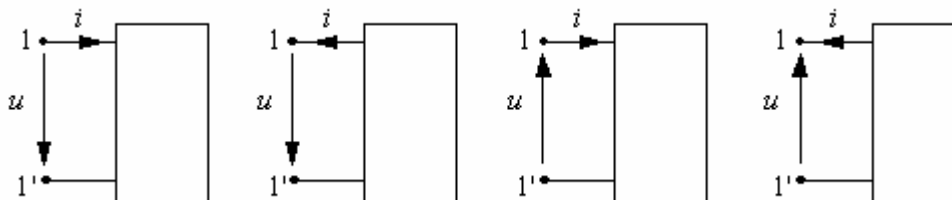


FIGURA 3

2.2.1.1. Resistencia

Se trata de un elemento físico tal que, al circular por él una corriente eléctrica, disipa energía en forma de calor (efecto *Joule*). En una resistencia se cumple siempre que la caída de tensión entre sus terminales es proporcional a la corriente que circula a través de ella. A esta propiedad se la conoce como *Ley de Ohm*.

A la constante de proporcionalidad entre tensión y corriente se la denota con la letra R y se la conoce como *resistencia*. Las unidades de la resistencia son los *OHMIOS* (Ω), siempre que la tensión venga dada en voltios y la intensidad en amperios.

Expresando matemáticamente esta propiedad queda:

$$u(t) = \pm R \cdot i(t) \quad (3)$$

que es la *ecuación de definición* de una resistencia.

El signo de la ecuación de definición será *positivo* si las referencias de tensión e intensidad llevan el mismo sentido sobre la resistencia, y su signo será *negativo* si ambas referencias llevan sentidos contrarios.

Otra forma de expresar la ecuación de definición de una resistencia, es decir, la Ley de Ohm, es:

$$i(t) = \pm G \cdot u(t) \quad (4)$$

en donde se cumple que:

$$G = 1/R \quad (5)$$

parámetro que se denomina *conductancia* y sus unidades son los *SIEMENS* (S o mho).

Casos particulares:

- Si $R = 0$ ($G = \infty$), se cumple que la caída de tensión entre sus terminales es, en todo instante, igual a cero ($u(t) = 0$). A este elemento se le denomina *cortocircuito*.
- Si $R = \infty$ ($G = 0$), se cumple que la corriente que circula por ella es, en todo instante, igual a cero ($i(t) = 0$). A este elemento se le denomina *circuito abierto*.

Hasta ahora se ha visto el comportamiento ideal de una resistencia. La constitución de la propia resistencia es un factor que puede alejarla del comportamiento ideal. Así, si una resistencia es de hilo bobinado, aparecerá en determinadas condiciones un efecto de inducción que habrá que considerar. El circuito equivalente que, utilizando elementos ideales, aproxima el

comportamiento de una resistencia real teniendo en cuenta este efecto de inducción, que posteriormente se analizará al estudiar las bobinas, es:

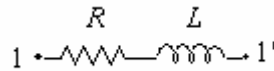


FIGURA 4

2.2.1.2. Condensador

Se trata de un elemento constituido por dos conductores enfrentados separados por un medio aislante llamado dieléctrico. Al aplicar una tensión entre estos dos conductores se depositan cargas eléctricas de signos contrarios en cada uno de ellos, apareciendo un campo eléctrico en el medio aislante.

La cantidad de carga que se deposita en cada conductor es proporcional a la tensión aplicada, esto es:

$$q(t) = C \cdot u(t) \tag{6}$$

donde C se denomina *capacidad* y puede interpretarse como la medida de la carga que es capaz de mantener un condensador cuando se le aplica una determinada tensión entre sus terminales, sin que llegue a producirse la ruptura dieléctrica. Sus unidades son los *FARADIOS* (F).

Si se derivan ambos miembros de la expresión anterior con respecto al tiempo, y considerando que el dieléctrico que se encuentra entre las placas es lineal e invariante con el tiempo, se tendrá:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{7}$$

Teniendo en cuenta que, como se ha visto al definir la corriente eléctrica, $dq(t)/dt = i(t)$, la expresión anterior puede escribirse como:

$$i(t) = \pm C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{8}$$

que es la *ecuación de definición* de un condensador.

El signo de esta ecuación vendrá determinado por las referencias de tensión e intensidad consideradas sobre el condensador.

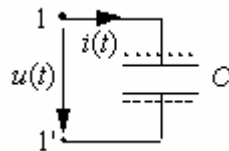


FIGURA 5

Dadas las referencias de la figura 5, y considerando un instante en el que $u(t) > 0$ y $du(t)/dt > 0$, se tendrá que el punto 1 se encuentra a mayor potencial eléctrico que el punto 1'. En el condensador, las cargas «+» se encuentran en la placa sometida a mayor tensión, y, como se ha supuesto que $du(t)/dt > 0$, es decir, la tensión es creciente, cada vez habrá más cargas positivas sobre dicha placa. Estas cargas vendrán del circuito exterior entrando por el terminal 1, esto es, siguiendo el sentido que se le ha dado a la referencia de la intensidad. Por lo tanto, $i(t) > 0$, con lo cual tendremos que:

$$i(t) = + C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad (9)$$

Se cumple que el signo de la ecuación de definición de un condensador sólo depende del sentido relativo de las referencias de tensión e intensidad consideradas para el elemento, al igual que en el caso de un resistencia. Si sobre el condensador ambas referencias llevan el mismo sentido, el signo de la ecuación de definición será positivo. Si, por el contrario, llevan sentidos opuestos, el signo de la ecuación de definición será negativo.

Integrando la ecuación (25) resultará:

$$u(t) = \pm \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \pm \frac{1}{C} \left[\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \right] = u(t_0) \pm \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (10)$$

obteniéndose una nueva expresión de la ecuación de definición para el condensador:

$$u(t) = u(t_0) \pm \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (11)$$

donde $u(t_0)$ es la tensión en bornes del condensador en el instante $t = t_0$, y se denomina tensión inicial del condensador. Como en la ecuación de definición (8), el signo de la ecuación de definición (11) dependerá del sentido relativo de las referencias de tensión e intensidad sobre el condensador.

Por otra parte, a partir de la expresión:

$$i(t) = \pm C \frac{du(t)}{dt} \quad (12)$$

se deduce que la tensión en bornes del condensador ha de ser una función continua en el tiempo, ya que la existencia de puntos de discontinuidad implicaría la existencia de instantes en los que la intensidad sería infinita, algo físicamente imposible.

A partir de esta expresión puede verse también que, si la tensión en bornes de un condensador tiene un valor constante en el tiempo (caso de corriente continua), su derivada respecto del tiempo es cero y, por lo tanto, $i(t) = 0$, es decir, no circulará intensidad por el condensador. En este caso el condensador se comporta como un *circuito abierto*.

En cuanto al comportamiento real de estos elementos, cabe decir que el circuito más habitualmente empleado para modelar el comportamiento de un condensador real es:

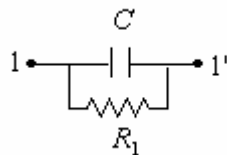


FIGURA 6

La resistencia R_1 , que representa el camino de la corriente de fugas en el dieléctrico, es la causante de la autodescarga de un condensador cuando éste se desconecta de un circuito. En un condensador ideal, al desconectarlo de un circuito, la tensión entre sus bornes se mantendrá constante a lo largo del tiempo. En un condensador real se observa que esta tensión disminuye según una curva exponencial, y la pendiente de esta curva es mayor cuanto más pequeña es la resistencia R_1 .

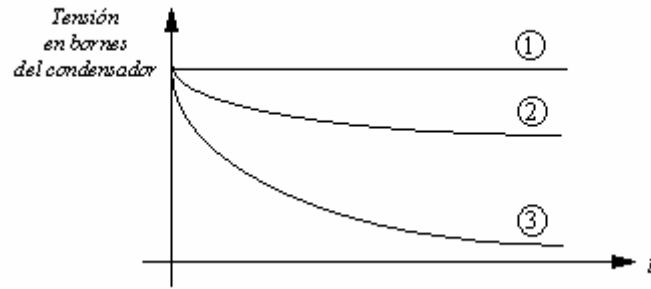


FIGURA 7

La curva 1 de la figura 7 corresponde a la evolución de la tensión en bornes de un condensador ideal cuando se le desconecta de un circuito. La curva 2 corresponde a la evolución de la tensión en un condensador real con una resistencia de fugas (R_1) alta. La curva 3 corresponde a la evolución de la tensión en un condensador real con una resistencia de fugas pequeña.

2.2.1.3. Bobina

Se trata de un elemento constituido por un conductor arrollado en forma de hélice alrededor de un núcleo. Cada una de las vueltas del arrollamiento se denomina espira.

Al circular una intensidad por el conductor arrollado, ésta crea un campo magnético en el interior del núcleo de la bobina y en la dirección de su eje. El sentido de este campo es el del avance de un sacacorchos que gira con la corriente («regla del sacacorchos»).

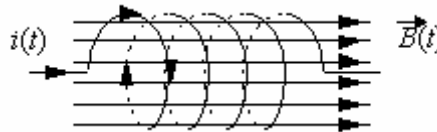


FIGURA 8

Se comprueba que, si el material del núcleo es lineal, existe una proporcionalidad entre la intensidad que circula por la bobina y el flujo magnético que aparece en su interior, es decir:

$$N \cdot \phi(t) = \pm L \cdot i(t) \tag{13}$$

siendo $\phi(t)$ el flujo medio concatenado con una espira y N el número de espiras de la bobina. El parámetro L se denomina *coeficiente de autoinducción* y sus unidades son los *HENRIOS* (H). El signo de esta ecuación depende de las referencias que se den a la intensidad y al flujo en la bobina.

Prescindiendo del signo, si se derivan ambos miembros de la ecuación anterior respecto del tiempo, suponiendo un medio magnético lineal e invariante con el tiempo, se tiene:

$$N \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \tag{14}$$

La *Ley de Faraday* dice: «la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en una espira es igual a la velocidad de variación del flujo inductor». Por lo tanto, si se consideran las N espiras que forman una bobina, la fuerza electromotriz que se induce en ella será:

$$|u(t)| = \left| N \frac{d\phi(t)}{dt} \right| \tag{15}$$

Si se comparan los términos de esta ecuación con la ecuación (14), se puede escribir que:

$$|u(t)| = \left| L \frac{di(t)}{dt} \right| \quad (16)$$

o lo que es lo mismo:

$$u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt} \quad (17)$$

que es la *ecuación de definición* de una bobina.

El signo de esta ecuación vendrá determinado por las referencias de tensión e intensidad consideradas sobre la bobina. En este caso también se pueden dar referencias para el flujo magnético, pero para determinar el signo del flujo en función de estas referencias sería necesario dibujar las bobinas en representación espacial. Como esto es incómodo, generalmente se representan las bobinas en 2 dimensiones y se asocia la referencia del flujo con la de la intensidad. De esta manera, de ahora en adelante se va a suponer que si $i(t) > 0$, implica que $\phi(t) > 0$.

Sean las referencias de la figura 9 y se supone un instante en el que $i(t) > 0$ y $di(t)/dt > 0$, esto es, la intensidad es creciente. Según la referencia dada a la intensidad, ésta circulará del punto 1 al 1'. Al circular una corriente, variable con el tiempo, por la bobina, se inducirá una f.e.m. entre sus bornes ($e(t)$).

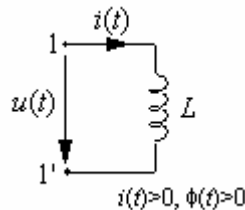


FIGURA 9

La *Ley de Lenz* dice: «la tensión inducida en una bobina debido a la variación de un flujo (o de una intensidad) tiende a oponerse a dicha variación». Así pues, dado que se ha supuesto que la intensidad es creciente, la f.e.m. inducida en la bobina tenderá a contrarrestar el aumento de dicha intensidad «inyectando cargas positivas» hacia el punto 1. Para que esto sea así, la f.e.m. inducida en la bobina, $e(t)$, será mayor que cero para la referencia mostrada en la figura 10.

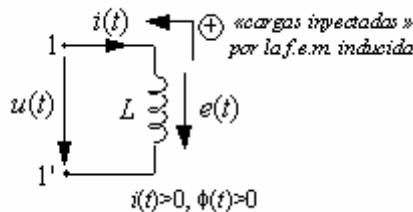


FIGURA 10

Si se aplica la 2.^a Ley de Kirchoff en este circuito, se tendrá:

$$u(t) = e(t) > 0 \Rightarrow u(t) = +L \frac{di(t)}{dt} \quad (18)$$

Se cumple que el signo de la ecuación de definición de una bobina sólo depende del sentido relativo de las referencias de tensión e intensidad consideradas para el elemento. Si sobre la bobina ambas referencias llevan el mismo sentido, el signo de la ecuación de definición será positivo. Si llevan sentidos contrarios, el signo de la ecuación de definición será negativo.

Integrando la ecuación de definición (17):

$$i(t) = \pm \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \pm \frac{1}{L} \left[\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right] = i(t_0) \pm \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (19)$$

se obtiene una nueva expresión de la ecuación de definición para la bobina:

$$i(t) = i(t_0) \pm \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (20)$$

donde $i(t_0)$ es la intensidad que circula por la bobina en el instante $t = t_0$ y se denomina corriente inicial de la bobina. El signo de esta ecuación depende, al igual que el de la ecuación (14), del sentido relativo de las referencias de tensión e intensidad sobre la bobina.

A partir de la expresión:

$$u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt} \quad (21)$$

se deduce que la intensidad que circula por una bobina ha de ser una función continua en el tiempo, ya que la existencia de puntos de discontinuidad implicaría la existencia de instantes en los que la tensión entre sus bornes sería infinita, algo físicamente imposible.

A partir de esta expresión se deduce también que, si la intensidad que circula por una bobina es constante en el tiempo (caso de circuitos de corriente continua), su derivada con respecto al tiempo es cero y, por lo tanto, la tensión en bornes de la bobina es en todo instante cero. En este caso, la bobina se comporta como un cortocircuito.

El modelo más simplificado, y el que más se utiliza, para modelar el comportamiento real es el modelo de la figura 11.

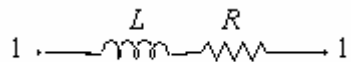


FIGURA 11

2.2.2. Cuadripolos

2.2.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

Dos circuitos se dice que están acoplados cuando intercambian energía. Las variables que se presentan en cada uno de ellos no dependen únicamente de los parámetros de sus propios elementos, sino que también dependen de parámetros de acoplamiento o mutuos.

Propiedad: Dado un medio magnético lineal, se cumple que el flujo magnético en una sección debido a la acción conjunta de dos intensidades es igual a la suma de los flujos en esta misma sección debido a la acción de cada intensidad considerándolas por separado.

Sean dos bobinas con acoplamiento magnético, como las mostradas en la figura 12.

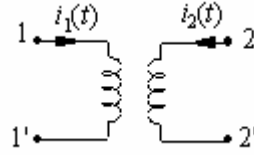


FIGURA 12

Llamando $\phi_1(t)$ al flujo medio por espira concatenado con la bobina 1 debido a las intensidades que circulan por las dos bobinas, y teniendo en cuenta la propiedad anterior, se cumple que:

$$\phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) \quad (22)$$

siendo:

- $\phi_{11}(t)$ la parte de $\phi_1(t)$ que crea la intensidad $i_1(t)$
- $\phi_{12}(t)$ la parte de $\phi_1(t)$ que crea la intensidad $i_2(t)$

De igual manera, si $\phi_2(t)$ es el flujo medio por espira concatenado con la bobina 2, se cumplirá que:

$$\phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) \quad (23)$$

siendo:

- $\phi_{22}(t)$ la parte de $\phi_2(t)$ que crea la intensidad $i_2(t)$
- $\phi_{21}(t)$ la parte de $\phi_2(t)$ que crea la intensidad $i_1(t)$

De todo el flujo que concatena la bobina 1 debido a la intensidad $i_1(t)$, es decir, $\phi_{11}(t)$, parte atravesará la bobina 2, $\phi_{21}(t)$, y parte no concatenará a esta bobina, $\phi_{s1}(t)$. Éste último es el llamado *flujo de dispersión*.

$$\phi_{11}(t) = \phi_{21}(t) + \phi_{s1}(t) \quad (24)$$

De la misma manera, se cumplirá que:

$$\phi_{22}(t) = \phi_{12}(t) + \phi_{s2}(t) \quad (25)$$

Agrupando estas ecuaciones, se puede escribir:

$$\phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) = \phi_{s1}(t) + \phi_{21}(t) + \phi_{12}(t) \quad (26)$$

$$\phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) = \phi_{s2}(t) + \phi_{12}(t) + \phi_{21}(t) \quad (27)$$

Si se denota por $\phi_m(t)$, *flujo mutuo*, al flujo común a las dos bobinas, esto es:

$$\phi_m(t) = \phi_{21} + \phi_{12} \quad (28)$$

entonces:

$$\phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) = \phi_{s1}(t) + \phi_m(t) \quad (29)$$

$$\phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) = \phi_{s2}(t) + \phi_m(t) \quad (30)$$

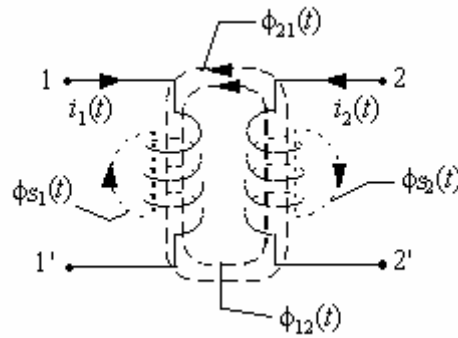


FIGURA 13

Relacionando flujos e intensidades, se tendrá:

$$N_1 \cdot \phi_{11}(t) = \pm L_1 \cdot i_1(t) \quad (31)$$

$$N_1 \cdot \phi_{12}(t) = \pm M_{12} \cdot i_2(t) \quad (32)$$

$$N_2 \cdot \phi_{21}(t) = \pm M_{21} \cdot i_1(t) \quad (33)$$

$$N_2 \cdot \phi_{22}(t) = \pm L_2 \cdot i_2(t) \quad (34)$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción de las bobinas, los parámetros M_{12} y M_{21} se denominan *coeficientes de inducción mutua* y sus unidades son *HENRIOS* (H).

Para determinar el signo de las ecuaciones anteriores, sería necesario dibujar las bobinas acopladas en representación espacial y dar también referencias para los flujos. En la práctica, para evitar dar éstas referencias y poder dibujar las bobinas en representación plana, se utiliza el concepto de *terminales correspondientes*. Se llaman así al conjunto de terminales (un terminal de cada una de las bobinas acopladas) para los que se verifica que, si entra (o sale) por ellos simultáneamente intensidad en cada una de las bobinas, se originan líneas de campo magnético comunes *del mismo sentido*.

Gráficamente, para el caso de 2 bobinas acopladas:

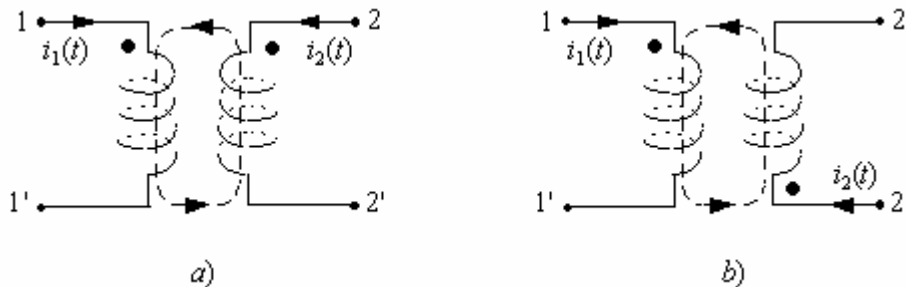


FIGURA 14

En la figura 14-a), los terminales 1 y 2 son terminales correspondientes, ya que, si $i_1(t)$ e $i_2(t)$ entran simultáneamente por estos dos terminales, crean líneas de campo del mismo sentido. En cambio, en la figura 14-b) los terminales correspondientes son el terminal 1 y el 2', ya que líneas de campo del mismo sentido las crean las intensidades que entran por estos terminales. Los terminales correspondientes de las bobinas se indican colocando dos puntos,

uno en cada uno de los terminales. Se cumple que los terminales no marcados también son correspondientes entre sí.

Una vez conocidos los terminales correspondientes, basta indicar el signo del flujo para una referencia dada de intensidad en una de las bobinas para que queden establecidos los signos de los flujos en todas las bobinas acopladas con ella.

Sean las bobinas acopladas de la figura 15, con las referencias indicadas en ella.

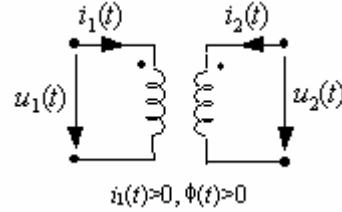


FIGURA 15

Para estas bobinas se puede escribir:

$$N_1 \phi_{11}(t) = L_1 i_1(t) \quad (35)$$

$$N_1 \phi_{12}(t) = M_{12} i_2(t) \quad (36)$$

$$N_2 \phi_{21}(t) = M_{21} i_1(t) \quad (37)$$

$$N_2 \phi_{22}(t) = L_2 i_2(t) \quad (38)$$

y derivando estas ecuaciones con respecto al tiempo:

$$N_1 \frac{d\phi_{11}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (39)$$

$$N_1 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (40)$$

$$N_2 \frac{d\phi_{21}(t)}{dt} = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (41)$$

$$N_2 \frac{d\phi_{22}(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (42)$$

Anteriormente se ha visto que:

$$\phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) \quad (43)$$

$$\phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) \quad (44)$$

Por lo tanto:

$$N_1 \phi_1(t) = N_1 \phi_{11}(t) + N_1 \phi_{12}(t) \quad (45)$$

$$N_2 \phi_2(t) = N_2 \phi_{22}(t) + N_2 \phi_{21}(t) \quad (46)$$

Si derivamos estas expresiones respecto del tiempo:

$$N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{11}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt} \quad (47)$$

$$N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{22}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{21}(t)}{dt} \quad (48)$$

Según la Ley de Faraday, la tensión en bornes de ambas bobinas será:

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt} \quad (49)$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad (50)$$

entonces:

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi_{11}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (51)$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_{22}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{21}(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (52)$$

En general:

$$u_1(t) = \pm L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (53)$$

$$u_2(t) = \pm L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (54)$$

que son las *ecuaciones de definición* de 2 bobinas acopladas magnéticamente.

Los signos de estas ecuaciones de definición no dependen de las referencias de flujo, sólo dependen de los sentidos relativos entre las referencias de tensión e intensidad y de los terminales correspondientes de las bobinas.

El signo de los términos que contienen el coeficiente L se obtienen fijándose en las referencias de tensión e intensidad, tal y como se hace en el caso de dos bobinas por separado.

El signo de los términos que contienen el coeficiente M se obtiene de la siguiente forma: para el término de M_{12} , se considera, por ejemplo, un instante en el que $i_2(t) > 0$ y creciente, es decir, $di_2(t)/dt > 0$, y las referencias consideradas para la tensión y la intensidad.

De acuerdo con lo visto anteriormente, $i_2(t)$ crea un campo magnético que atravesará la bobina 1 en el mismo sentido que el que crearía una intensidad que circulando por esta bobina entrase por el terminal correspondiente del terminal por el que entra $i_2(t)$.

Si el sentido de esta intensidad equivalente coincide con la referencia de tensión dada para $u_1(t)$, el signo del término de M_{12} será positivo. En caso contrario, es decir, si el sentido de la intensidad equivalente es contrario a la referencia de tensión dada para $u_1(t)$, el signo del término será negativo. Para el término de M_{21} se procede de igual manera pero suponiendo, por ejemplo, un instante en el que $i_1(t) > 0$ y creciente, es decir, $di_1(t)/dt > 0$.

Ejemplo: Escribir las ecuaciones de definición de las dos bobinas acopladas de la figura 30 , para las referencias en ella indicadas.

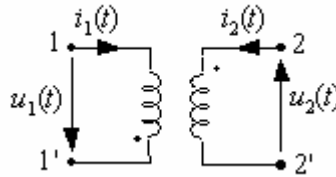


FIGURA 16

Los signos de los diferentes términos serán:

- *Término de L_1* : Signo positivo, ya que las referencias de tensión e intensidad llevan el mismo sentido sobre la bobina 1.
- *Término de L_2* : Signo negativo, ya que las referencias de tensión e intensidad tienen sentidos contrarios sobre la bobina 2.
- *Término de M_{12}* : Si se supone un instante en el que $i_2(t) > 0$ y $di_2(t)/dt > 0$, $i_2(t)$ entrará por el terminal marcado, es decir, el terminal 2. Esta intensidad creará un campo magnético sobre la bobina 1 en el mismo sentido que el que crearía una intensidad que entrase por el terminal correspondiente al 2, es decir, el terminal 1'. Esta intensidad equivalente circularía del terminal 1' hacia el 1, esto es, en sentido contrario al de la referencia de tensión dada para $u_1(t)$. Según lo dicho anteriormente, el signo de este término sería negativo.
- *Término de M_{21}* : Si se supone un instante en el que $i_1(t) > 0$ y $di_1(t)/dt > 0$, $i_1(t)$ entrará por el terminal no marcado, es decir, el terminal 1. Esta intensidad creará un campo magnético sobre la bobina 2 en el mismo sentido que el que crearía una intensidad que entrase por el terminal correspondiente al 1, es decir, el terminal 2'. Esta intensidad equivalente circularía del terminal 2' hacia el 2, o sea, en el mismo sentido de la referencia de tensión dada para $u_2(t)$. Según lo dicho anteriormente, el signo de este término sería positivo.

Las ecuaciones de definición serán entonces, en este caso:

$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (55)$$

$$u_2(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (56)$$

En general, se cumple que $M_{12} = M_{21} = M$.

2.2.2.2. Transformador

Es un elemento constituido por dos o más bobinas acopladas magnéticamente. El acoplamiento magnético entre las bobinas se consigue gracias a que éstas están arrolladas sobre un núcleo encargado de conducir el campo magnético que crean las intensidades que pueden circular por dichas bobinas.

Si la relación entre las intensidades que circulan por las bobinas y el flujo magnético en el núcleo es lineal, se hablará del transformador lineal.

Un transformador se considera ideal cuando cumple las siguientes condiciones:

- 1) Las bobinas que lo forman carecen de resistencia.
- 2) No existe flujo de dispersión en las bobinas. El acoplamiento entre ellas es perfecto.
- 3) La permeabilidad magnética del medio que conduce el campo magnético es infinita.

- 4) Dicho núcleo magnético carece de histéresis y en él no se inducen corrientes parásitas.
 5) No existen capacidades parásitas entre las espiras de las bobinas ni entre éstas.
 Sea el transformador ideal de la figura 17.

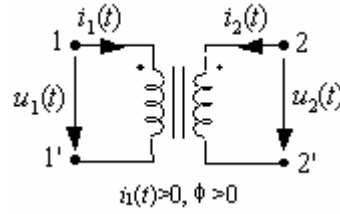


FIGURA 17

Para las referencias en ella mostradas, se puede escribir:

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt} \quad (57)$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad (58)$$

Para las bobinas acopladas magnéticamente se vio que:

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \frac{d\phi_{s1}(t)}{dt} + \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (59)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = \frac{d\phi_{s2}(t)}{dt} + \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (60)$$

entonces:

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_{s1}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (61)$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_{s2}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (62)$$

Si se aplica la condición de que el flujo de dispersión es cero, quedará:

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (63)$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad (64)$$

Dividiendo estas dos ecuaciones miembro a miembro y generalizando para cualquier referencia de tensión y/o intensidad, se obtiene:

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \pm \frac{N_1}{N_2} \quad (65)$$

que es la 1.^a ecuación de definición de un transformador ideal.

El signo viene dado por las referencias consideradas y los terminales correspondientes. Puede verse que, si las dos referencias de tensión apuntan (o parten) a terminales correspondientes entre sí, el signo de la ecuación es positivo. En caso contrario, el signo es negativo.

A la expresión:

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad (66)$$

se la denomina *relación de transformación*.

Generalmente, se denomina *devanado primario* a la bobina que recibe la energía eléctrica y *devanado secundario* a la bobina conectada al sistema receptor. Dependiendo de si $a > 1$, o bien $a < 1$, se dice que un transformador es *reductor* o *elevador*, respectivamente.

Se considera ahora el circuito magnético que constituye el transformador de la figura 18.

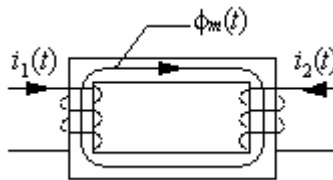


FIGURA 18

La Ley de Ampère dice que:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum N \cdot I \quad (67)$$

y, aplicada al circuito magnético anterior, queda:

$$H \cdot l = \sum N \cdot i(t) \quad (68)$$

siendo H el campo magnético y l la longitud media del camino que sigue el campo magnético. Al producto $N \cdot i(t)$ se le denomina *fuerza magnetomotriz (fmm)*.

Dado que:

$$B = \mu \cdot H \quad (69)$$

y que:

$$\phi = B \cdot S \quad (70)$$

la relación (68) es equivalente a:

$$\phi_m(t) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} = \sum N \cdot i(t) \quad (71)$$

donde $\phi_m(t)$ es el flujo magnético medio para una sección transversal del núcleo.

A la expresión:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} = \mathfrak{R} \quad (72)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio, l la longitud media del circuito magnético y S la sección transversal de dicho circuito, se la denomina *reluctancia* del camino magnético.

Por lo tanto, la relación (94) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\phi_m(t) \cdot \mathfrak{R} = \sum N \cdot i(t) \quad (73)$$

Fijándose en la expresión anterior, un circuito magnético es posible estudiarlo mediante un circuito eléctrico equivalente, en el que las *fmm* se representan mediante fuentes de tensión, la reluctancia del camino magnético mediante una resistencia y el flujo magnético mediante la intensidad que circula por el circuito eléctrico.

Así pues, el circuito eléctrico que representa al circuito magnético de la figura 19 es:

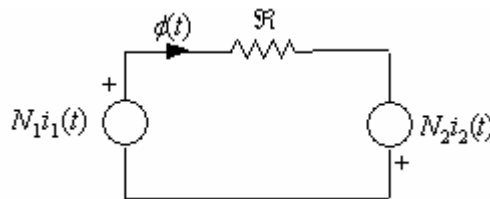


FIGURA 19

donde el signo «+» de las fuentes que representan las fuerzas magnetomotrices se colocan de tal forma que den lugar a sentidos de intensidad (flujo) positivos, de acuerdo con los terminales correspondientes y las referencias de intensidad dadas para el transformador.

Si se aplica la segunda Ley de Kirchhoff a este circuito, se tendrá que:

$$N_1 \cdot i_1(t) - \mathfrak{R} \cdot \phi(t) + N_2 \cdot i_2(t) = 0 \quad (74)$$

La tercera condición que se impone a un transformador ideal es que la permeabilidad magnética del medio es infinita, esto es, $\mu = \infty$, por lo que se tendrá que $\mathfrak{R} = 0$. En estas condiciones, la ecuación anterior queda:

$$N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) = 0 \quad (75)$$

En general, y dependiendo del sentido del arrollamiento de las bobinas del transformador, se cumple que:

$$N_1 \cdot i_1(t) \pm N_2 \cdot i_2(t) = 0 \quad (76)$$

que es la 2.^a ecuación de definición de un transformador ideal.

Mediante el circuito magnético y el circuito eléctrico asociado a él, es fácil ver que, en el caso de que las referencias de intensidad entren (o salgan) por terminales correspondientes, el signo de esta ecuación es positivo. En caso contrario, el signo de la ecuación es negativo.

2.3. Asociación de resistencias. Divisor de tensión y divisor de intensidad

2.3.1. Asociación de resistencias en serie. Divisores de tensión

Sean n resistencias conectadas en serie.

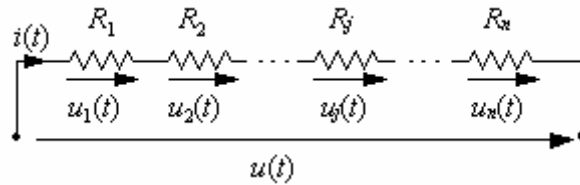


FIGURA 20

La intensidad que circula por todas las resistencias será la misma. Por lo tanto, se cumplirá que:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 \cdot i(t) \\ u_2(t) &= R_2 \cdot i(t) \\ &\vdots \\ u_j(t) &= R_j \cdot i(t) \\ &\vdots \\ u_n(t) &= R_n \cdot i(t) \end{aligned} \quad (77)$$

Si se aplica la 2.^a Ley de Kirchoff, se obtiene:

$$u(t) = \sum_{j=1}^n u_j(t) = \left(\sum_{j=1}^n R_j \right) \cdot i(t) = R_{eq} \cdot i(t) \quad (78)$$

y, por lo tanto:

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j \quad (79)$$

es decir, el valor de la resistencia equivalente de n resistencias conectadas en serie es igual a la suma del valor de todas ellas.

Al circuito formado por n resistencias conectadas en serie, es decir, que por todas ellas circula la misma intensidad, se le conoce como *divisor de tensión* resistivo.

Se ha visto que:

$$u(t) = \left(\sum_{j=1}^n R_j \right) \cdot i(t) \quad (80)$$

y como

$$u_j(t) = R_j \cdot i(t) \quad (81)$$

dividiendo ambas ecuaciones miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{u_j(t)}{u(t)} = \frac{R_j}{\sum_{j=1}^n R_j} \quad (82)$$

o lo que es lo mismo:

$$u_j(t) = \frac{R_j}{\sum_{j=1}^n R_j} u(t) \quad (83)$$

que es la ecuación de un divisor de tensión formado por resistencias.

2.3.2. Asociación de resistencias en paralelo.

Divisores de intensidad

Sean n resistencias (conductancias) conectadas en paralelo.

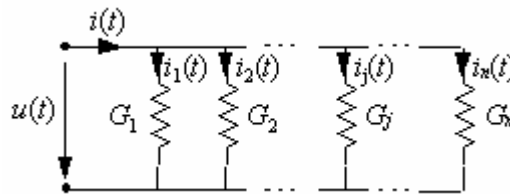


FIGURA 21

La tensión en bornes de todas las resistencias será la misma; por lo tanto, se cumple que:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= G_1 \cdot u(t) \\ i_2(t) &= G_2 \cdot u(t) \\ &\text{M} \\ i_j(t) &= G_j \cdot u(t) \\ &\text{M} \\ i_n(t) &= G_n \cdot u(t) \end{aligned} \quad (84)$$

Aplicando la 1.^a Ley de Kirchhoff se cumple que:

$$i(t) = \sum_{j=1}^n i_j(t) = \left(\sum_{j=1}^n G_j \right) \cdot u(t) = G_{eq} \cdot u(t) \quad (85)$$

y, por lo tanto:

$$G_{eq} = \sum_{j=1}^n G_j \quad (86)$$

es decir, el valor de la conductancia equivalente de n conductancias conectadas en paralelo es igual a la suma del valor de todas ellas.

Al circuito formado por n resistencias conectadas en paralelo, es decir, que todas ellas están sometidas a la misma tensión, se le conoce como *divisor de intensidad* resistivo.

Se ha visto que:

$$i(t) = \left(\sum_{j=1}^n G_j \right) \cdot u(t) \quad (87)$$

y como

$$i_j(t) = G_j \cdot u(t) \quad (88)$$

dividiendo ambas ecuaciones miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{i_j(t)}{i(t)} = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^n G_j} \quad (89)$$

o lo que es lo mismo:

$$i_j(t) = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^n G_j} i(t) \quad (90)$$

que es la *ecuación de un divisor de intensidad* formado por resistencias.

Caso particular: Si $n = 2$

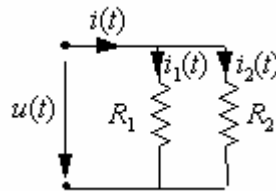


FIGURA 22

La resistencia equivalente valdrá:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (91)$$

y la intensidad que circula por cada una de las ramas del divisor:

$$i_1(t) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i(t) = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) \quad (92)$$

$$i_2(t) = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i(t) = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t) \quad (93)$$

2.4. Elementos activos

En este apartado se ven los elementos activos simples que van a formar parte de los circuitos. Estos elementos son las fuentes independientes de tensión, las fuentes independientes de intensidad y las fuentes dependientes tanto de tensión como de intensidad.

2.4.1 Fuente independiente de tensión

Se trata de un elemento de circuito que establece entre sus terminales una tensión bien definida a lo largo del tiempo. Dicha tensión es, además, independiente del resto del circuito al cual está conectada la fuente.

La representación gráfica de una fuente independiente de tensión *ideal* es:

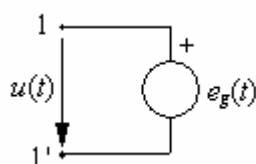


FIGURA 23

El signo «+» colocado en la fuente indica el terminal que se encuentra a mayor tensión si en un instante $e_g(t) > 0$. Es decir, si $e_g(t) > 0$, significa que el potencial eléctrico del punto 1 es mayor que el potencial eléctrico del punto 1', o, lo que es lo mismo, se cumple que $V_1 > V_{1'}$ en dicho instante.

La ecuación que define una fuente de tensión ideal es:

$$u(t) = \pm e_g(t) \quad (94)$$

Caso particular:

- Si una fuente de tensión es constantemente de valor cero, esto es $e_g(t) = 0$ (para todo t), se trata de un *cortocircuito*.

Dos fuentes *ideales* de tensión nunca pueden estar conectadas en paralelo, a no ser que sean del mismo valor. Si tenemos el circuito de la figura 3:

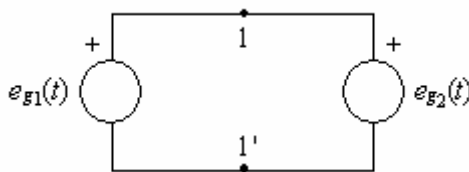


FIGURA 24

se deberá cumplir que $e_{g1}(t) = e_{g2}(t)$, en todo instante, para que se verifique la segunda Ley de Kirchhoff.

Para una fuente *ideal* de tensión se ha visto que la tensión en sus bornes es independiente de la intensidad que suministra. En una pila o batería, es decir, una fuente independiente de tensión *real*, se observa que la tensión en sus bornes disminuye conforme aumenta la intensidad que se solicita a dicha fuente. Este hecho, que se

constata experimentalmente, lleva a que el circuito que modela el comportamiento real de una fuente de tensión sea el de la figura 4.

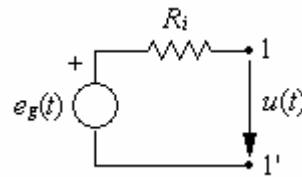


FIGURA 25

Dicho circuito equivalente está compuesto por una fuente ideal de tensión, de valor igual al valor de la tensión en bornes de la fuente real cuando se encuentra a circuito abierto, en serie con una resistencia.

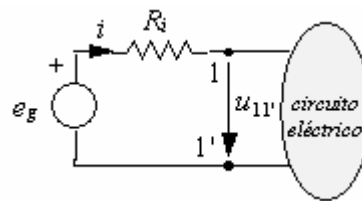


FIGURA 26

Si se aplica la 2.^a Ley de Kirchhoff al circuito de la figura 5, se ve que:

$$u_{11'} = e_g - R_i \cdot i \quad (95)$$

que, efectivamente, coincide con el hecho observado de que al aumentar la intensidad disminuye la tensión en bornes de la fuente. En la figura 27 se muestra la representación gráfica de esta ecuación.

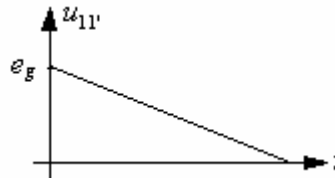


FIGURA 27

Esto, que es válido para una pila o batería, es válido para cualquier otro tipo de fuente de tensión real, aunque su modelado a través de un circuito equivalente no es el mismo en todos los casos. Por ejemplo, para una fuente real de tensión senoidal el circuito equivalente es:

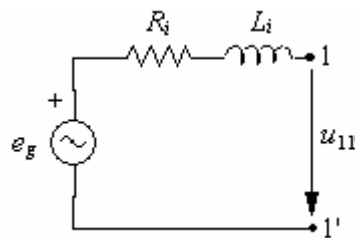


FIGURA 28

En general, una fuente independiente de tensión real se representa mediante una fuente ideal de tensión cuyo valor es igual a la tensión en bornes de la fuente real de

tensión cuando se encuentra a circuito abierto, en serie con una combinación de elementos pasivos.

2.4.3 Fuente independiente de intensidad

Se trata de un elemento de circuito que suministra una intensidad bien definida a lo largo del tiempo. Dicha intensidad es, además, independiente del resto del circuito al cual está conectada la fuente.

La representación gráfica de una fuente independiente de intensidad *ideal* es:

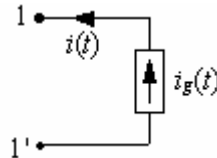


FIGURA 29

La flecha colocada en la fuente indica el sentido de la corriente que suministra, esto es, si en un instante $i_g(t) > 0$, significa que las cargas positivas circulan del punto 1' al punto 1.

La ecuación que define una fuente de tensión ideal es:

$$i(t) = \pm i_g(t) \quad (96)$$

Se cumple que la intensidad suministrada por una fuente independiente de intensidad ideal no depende de la tensión en bornes de la fuente. Además, esta tensión viene impuesta por el resto del circuito al cual está conectada la fuente.

Caso particular:

- Si una fuente de intensidad es constantemente de valor cero, esto es, $i_g(t) = 0$ (para todo t), se tratará de un *circuito abierto*.

Dos fuentes *ideales* de intensidad nunca pueden estar conectadas en serie, a no ser que sean del mismo valor. Si tenemos el circuito de la figura 30:

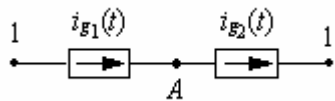


FIGURA 30

se deberá cumplir que $i_{g1}(t) = i_{g2}(t)$, en todo instante, para que en el nudo A se verifique la primera Ley de Kirchhoff.

En el caso de una fuente *real* de intensidad se observa que conforme aumenta la tensión entre sus bornes va disminuyendo la intensidad que suministra. El circuito que aproxima este comportamiento es el formado por una fuente ideal de intensidad en paralelo con una resistencia, tal y como se muestra en la figura 31.

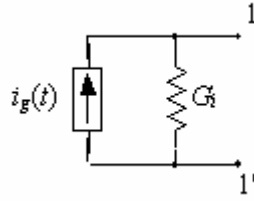


FIGURA 31

Para el circuito de la figura 32:

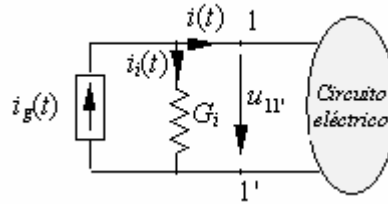


FIGURA 32

se cumplirá que:

$$i_i(t) = G_i \cdot u_{11'} \quad (97)$$

y, por lo tanto, aplicando la 1.^a Ley de Kirchoff al nudo superior se obtiene:

$$i(t) = i_g(t) - G_i \cdot u_{11'} \quad (98)$$

y se comprueba que la intensidad que suministra la fuente real disminuye conforme aumenta la tensión que existe entre sus bornes. La representación gráfica de esta ecuación es:

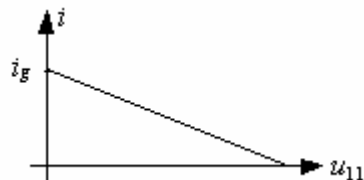


FIGURA 33

En general, el circuito que modela el comportamiento de una fuente real de intensidad será el formado por una fuente ideal de intensidad cuyo valor es igual a la intensidad que proporciona la fuente real cuando se encuentra cortocircuitada, en paralelo con un conjunto de elementos pasivos.

2.4.4 Fuentes dependientes

Son unos elementos tales que la tensión o intensidad que suministran depende de la tensión o intensidad en otra parte del circuito. Los tipos de fuentes dependientes que pueden encontrarse son: fuente de tensión dependiente de tensión, fuente de tensión dependiente de intensidad, fuente de intensidad dependiente de tensión y fuente de intensidad dependiente de intensidad. En la figura 34 se muestran las representaciones gráficas de las fuentes dependientes de tensión, mientras que en la figura 35 se muestran las representaciones gráficas de las fuentes dependientes de intensidad

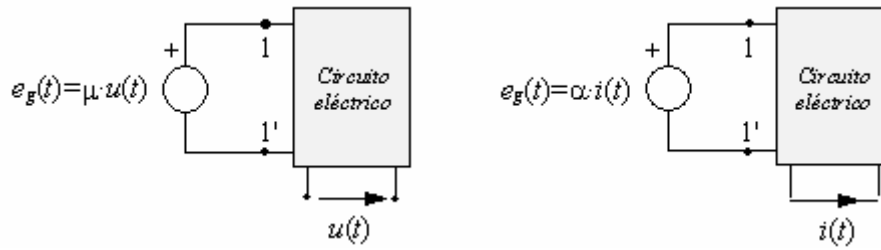


FIGURA 34

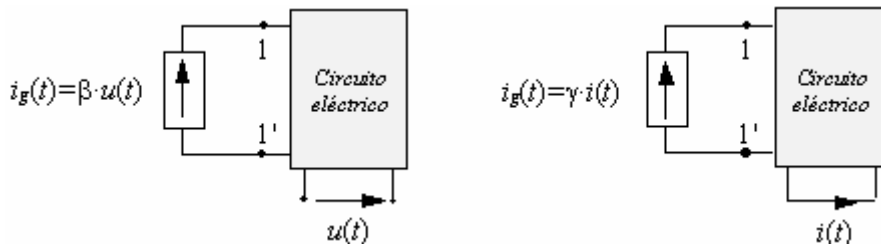


FIGURA 35

En estas figuras se presenta el esquema de las distintas fuentes dependientes unidas a una caja que representa el resto del circuito al que están conectadas, además de la tensión o la intensidad de dicho circuito de la cual dependen.

Estos elementos se utilizan frecuentemente para modelar el comportamiento de ciertos dispositivos electrónicos, tales como transistores, amplificadores operacionales, etc.

3. ENERGÍA Y POTENCIA

3.1. Introducción

En este capítulo se van a deducir las expresiones de la potencia y la energía instantánea para los diferentes elementos que componen los circuitos. Como se vio en el capítulo 2, estos elementos pueden dividirse en elementos pasivos y elementos activos, respectivamente, en función de si disipan o almacenan energía que les comunican otros elementos del circuito, pero en ningún caso ceden más potencia que la que han almacenado; o bien, por el contrario, son capaces de ceder o consumir potencia en función de los requerimientos del resto del circuito al cual están conectados.

3.2. Definiciones

Sea el dipolo de la figura 1.

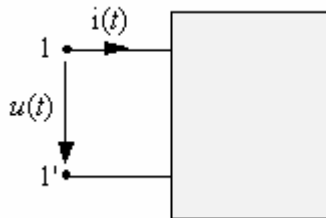


FIGURA 1

Para las referencias de tensión e intensidad indicadas en él, se define la *potencia absorbida* como el producto:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (1)$$

Se comprueba que:

- Si $p_{abs}(t) > 0$, el dipolo *absorbe* potencia.
- Si $p_{abs}(t) < 0$, el dipolo *cede* potencia.

Para las referencias de la figura 1, supóngase un instante en el que $u(t) > 0$ e $i(t) > 0$. En este instante, según la ecuación (1), $p_{abs} > 0$, es decir, el dipolo se encuentra absorbiendo potencia. Si $u(t) > 0$, el terminal 1 se encuentra a mayor tensión que el punto 1', y, como $i(t) > 0$, las cargas ideales positivas circulan del punto 1 al 1'. Como dichas cargas van del terminal a mayor potencial al terminal a potencial menor, pierden energía potencial, energía que por el principio de conservación será absorbida por el dipolo, es decir, en dicho instante está entrando energía en él.

Para todo dipolo se cumple que:

$$p_{ced}(t) = -p_{abs}(t) \quad (2)$$

Si la potencia es la energía absorbida o cedida por unidad de tiempo, esto es:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} \quad (3)$$

la *energía absorbida* por un dipolo puede calcularse como:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = w(t_0) + \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (4)$$

si suponemos que para cualquier dipolo $w(-\infty) = 0$.

3.3. Energía y potencia en dipolos

3.3.1. Resistencia

La ecuación de definición de una resistencia es:

$$u(t) = \pm R \cdot i(t) \quad (5)$$

Sean las referencias de la figura 2. Para estas referencias, la ecuación de definición de la resistencia es:

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (6)$$

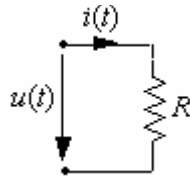


FIGURA 2

La *potencia absorbida* por una resistencia, para las referencias dadas, se calcula como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (7)$$

Relacionando tensión e intensidad en la resistencia mediante su ecuación de definición, la potencia absorbida queda:

$$p_{abs}(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} = G \cdot u^2(t) \quad (8)$$

es decir, la potencia absorbida por una resistencia es, en todo instante, mayor que cero.

La *energía absorbida* por una resistencia se calcula mediante:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t R \cdot i^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{u^2(\tau)}{R} d\tau \quad (12)$$

De esta expresión se deduce que la energía absorbida por una resistencia es siempre positiva. Además, esta energía que absorbe se disipa en forma de calor. Esto último constituye la llamada *Ley de Joule*.

3.3.2. Condensador

Su ecuación de definición es:

$$i(t) = \pm C \frac{du(t)}{dt} \quad (13)$$

Sean las referencias de la figura 4.

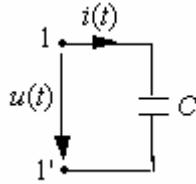


FIGURA 4

Para estas referencias, la ecuación de definición del condensador es:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (14)$$

y la *potencia absorbida* se calcula como:

$$P_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (15)$$

Entonces:

$$P_{abs}(t) = C \cdot u(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (16)$$

Si, por ejemplo, se supone un instante en el que $u(t) > 0$ y $du(t)/dt > 0$, según la ecuación (16) $p_{abs} > 0$, es decir, en dicho instante el condensador absorbe potencia. Si $u(t) > 0$, el terminal 1 está a mayor potencial que el terminal 1'. Por otra parte, $du(t)/dt > 0$, esto es, cada vez hay más cargas positivas en la placa superior del condensador y más cargas negativas en la inferior, es decir, dichas cargas vendrán del circuito exterior entrando por el terminal 1, a mayor tensión, y saliendo por el terminal 1', a menor tensión, es decir, las cargas pierden energía potencial, energía que se almacena en el campo eléctrico presente entre las placas del condensador. En este instante el condensador absorbe potencia.

Sean ahora las referencias de la figura 5.

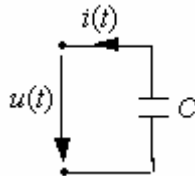


FIGURA 5

Para estas referencias, la ecuación de definición del condensador es:

$$i(t) = -C \frac{du(t)}{dt} \quad (17)$$

y la *potencia absorbida* se calcula como:

$$P_{abs}(t) = -u(t) \cdot i(t) \quad (18)$$

Entonces:

$$P_{abs}(t) = C \cdot u(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (19)$$

En un determinado instante, un condensador puede absorber o bien ceder potencia. La potencia que en un instante cede un condensador siempre es a costa de la energía que previamente ha almacenado en forma de campo eléctrico entre sus placas.

La *energía almacenada* por un condensador será:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t C \cdot u(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} C \cdot u \, du = \frac{1}{2} C [u^2(t) - u^2(-\infty)] \quad (20)$$

Si se supone que $u(-\infty)=0$, la energía almacenada por un condensador queda:

$$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t) \quad (21)$$

Esta expresión es, en todo instante, mayor o igual que cero. Además, puede verse que la energía almacenada en un condensador en un determinado instante sólo depende del valor de la tensión en ese momento y no de la forma en la que varía esta tensión.

Dado que:

$$q(t) = C \cdot u(t) \quad (22)$$

la energía se podrá calcular también como:

$$w(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2} q(t) \cdot u(t) \quad (23)$$

3.3.3. Bobina

Su ecuación de definición es:

$$u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt} \quad (24)$$

Sean las referencias de la figura 6.

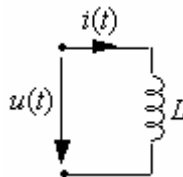


FIGURA 6

Para estas referencias, la ecuación de definición de la bobina es:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (25)$$

y la *potencia absorbida* se calcula como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (26)$$

Entonces:

$$p_{abs}(t) = L \cdot i(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (27)$$

Si, por ejemplo, se supone un instante en el que $i(t) > 0$ y $di(t)/dt > 0$, según la ecuación (27) $p_{abs} > 0$, es decir, en dicho instante la bobina absorbe potencia. Si $i(t) > 0$ y $di(t)/dt > 0$, significa que la intensidad crece. La f.e.m. inducida en la bobina $e(t)$ será mayor que cero para la referencia mostrada en la figura 7, y, por lo tanto, las cargas ideales positivas irán del punto a mayor tensión al punto a menor tensión, esto es, pierden energía potencial, energía que se almacena en el campo magnético presente en el núcleo de la bobina. Por lo tanto, en este instante la bobina absorbe potencia.

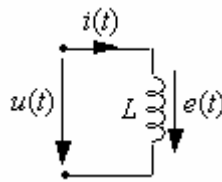


FIGURA 7

En un determinado instante, una bobina puede absorber o bien ceder potencia. La potencia que en un instante cede una bobina siempre es a costa de la energía que previamente ha almacenado en forma de campo magnético en su núcleo.

La *energía almacenada* por una bobina será:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t L \cdot i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} L \cdot i \, di = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(-\infty)] \quad (31)$$

Si se supone que $i(-\infty) = 0$, la energía almacenada será:

$$w(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) \quad (32)$$

Esta expresión es, en todo instante, mayor o igual que cero. Además, puede verse que la energía almacenada en una bobina en un determinado instante sólo depende del valor de la intensidad en ese momento, y no de la forma en la que varía esta intensidad.

Dado que:

$$L \cdot i(t) = N \cdot \phi(t) \quad (33)$$

la energía se podrá calcular también como:

$$w(t) = \frac{1}{2} \frac{N^2 \phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2} N \cdot \phi(t) \cdot i(t) \quad (34)$$

3.3.4. Fuente de tensión

Sea la fuente ideal de tensión de la figura 9.

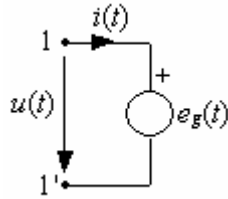


FIGURA 9

Para estas referencias, se define la *potencia absorbida* por la fuente como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = e_g(t) \cdot i(t) \quad (35)$$

La *energía absorbida* por la fuente de tensión, para las referencias dadas en la figura 9, se calcula como:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e_g(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \quad (36)$$

3.3.5. Fuente de intensidad

Sea la fuente ideal de intensidad de la figura 10.

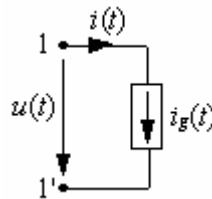


FIGURA 10

Para estas referencias, se define la *potencia absorbida* por la fuente como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot i_g(t) \quad (37)$$

La *energía cedida* por la fuente de intensidad, para las referencias dadas en la figura 9, se calcula como:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i_g(\tau) d\tau \quad (38)$$

3.4. Energía y potencia en cuadripolos

Sea el cuadripolo de la figura 11.

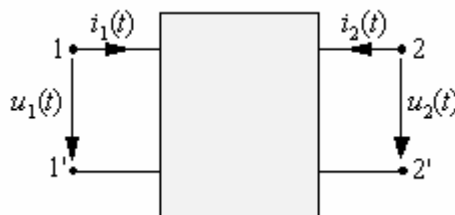


FIGURA 11

Un cuadripolo puede absorber potencia por cada par de terminales. Para las referencias indicadas en la figura 11, la *potencia absorbida* por el cuadripolo es la suma de la potencia absorbida por cada pareja de terminales, esto es:

$$p(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) \quad (39)$$

En cuanto a la energía:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t [u_1(\tau) \cdot i_1(\tau) + u_2(\tau) \cdot i_2(\tau)] d\tau \quad (40)$$

3.4.1. Bobinas acopladas magnéticamente

Para las referencias y terminales correspondientes indicados en la figura 12 sus ecuaciones de definición son:

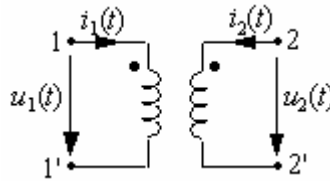


FIGURA 12

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned} \quad (41)$$

Para estas mismas referencias, la *potencia absorbida* por las bobinas será:

$$p(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) \quad (42)$$

entonces:

$$p(t) = L_1 i_1(t) \frac{di_1(t)}{dt} + M \left(i_1(t) \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \frac{di_1(t)}{dt} \right) + L_2 i_2(t) \frac{di_2(t)}{dt} \quad (43)$$

Esta expresión se puede escribir también como:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) \cdot i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \right) \quad (44)$$

Dos bobinas acopladas, en un determinado instante, pueden ceder o absorber potencia ambas, o bien una absorber y otra ceder potencia, pero siempre será a costa de la energía que anteriormente han almacenado.

En cuanto a la *energía almacenada* por dos bobinas acopladas:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) \cdot i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \quad (45)$$

Puede demostrarse que esta expresión es siempre mayor o igual que cero. Esta energía absorbida es almacenada, al igual que en el caso de una sola bobina, en forma de campo magnético en el núcleo.

3.4.2. Transformador ideal

Para las referencias y terminales correspondientes indicados en la figura 13 sus ecuaciones de definición son:

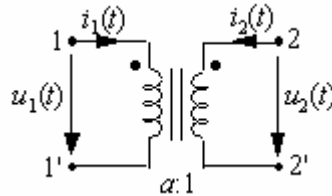


FIGURA 13

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a \cdot u_2(t) \\ i_1(t) &= -\frac{1}{a} i_2(t) \end{aligned} \quad (46)$$

La potencia absorbida por el transformador ideal será:

$$p(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t) \quad (47)$$

que, sustituyendo las ecuaciones anteriores, queda:

$$p(t) = a \cdot u_2(t) \left(-\frac{1}{a} i_2(t) \right) + u_2(t) \cdot i_2(t) \quad (48)$$

es decir:

$$p(t) = 0 \quad (49)$$

En todo instante, la potencia que absorbe el primario de un transformador ideal es igual a la potencia que cede el secundario. La potencia total absorbida por un transformador ideal es cero.

En cuanto a la *energía absorbida* por un transformador ideal:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = 0 \quad (50)$$

En consecuencia, el transformador no absorbe ni cede energía, es decir, la transferencia de potencia de un devanado a otro es total.

3.5. Balance de potencia en un circuito

Para un circuito cualquiera se cumple que, en todo instante, la suma algebraica de la potencia absorbida por todos sus elementos es siempre igual a cero, esto es:

$$\sum p_{\omega_s}(t) = 0 \quad (51)$$

Se ha dicho anteriormente que, para todo elemento de circuito, se cumple siempre:

$$P_{\text{absorbida}}(t) = -P_{\text{cedida}}(t) \quad (52)$$

Por lo tanto, el balance de potencia se puede establecer diciendo que en todo circuito, la suma algebraica de las potencias cedidas por todos sus elementos activos es igual a la suma algebraica de las potencias absorbidas por todos sus elementos pasivos. Esto es:

$$\sum P(t)_{\text{cedida elementos activos}} = \sum P(t)_{\text{absorbida elementos pasivos}} \quad (53)$$

4. FORMAS DE ONDA

4.1. Introducción

A pesar de que no es raro encontrar circuitos alimentados por fuentes de tensión y/o intensidad continuas, y, por lo tanto, circuitos en los que dichas variables en los diferentes elementos que lo componen no dependen del tiempo, en general las tensiones e intensidades son funciones del tiempo. Una *forma de onda* es la función que define la variación con el tiempo de una variable, y también puede denominarse así a la representación gráfica de dicha variación. Se consideran algunos de los conceptos y valores asociados a un tipo de ondas que se utilizan habitualmente, como son las formas de onda periódicas. Dentro de las ondas periódicas se prestará especial atención a las ondas senoidales, ya que ésta es la forma de onda que principalmente adoptan las intensidades y las tensiones en los sistemas de generación, transporte y distribución de la energía eléctrica.

4.1.1. Formas de onda periódicas

Se dice que una forma de onda es periódica cuando cumple que:

$$f(t) = f(t + T) \quad (6)$$

siendo T el *período* de la onda.

En general, se puede escribir que para una forma de onda periódica:

$$f(t) = f(t + kT) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Para una forma de onda periódica se pueden definir los términos: ciclo, frecuencia y fase.

Ciclo: Es la parte de onda periódica comprendida en un intervalo de tiempo igual a un período.

Frecuencia (f): Es el número de ciclos que tienen lugar en la unidad de tiempo. Se cumple que:

$$f \cdot T = 1 \quad (8)$$

y, por lo tanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

Fase: Es la fracción de período que transcurre desde un valor o estado que se toma como referencia hasta un instante determinado.

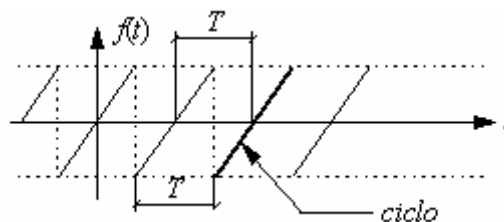


FIGURA 16

Para determinar si una forma de onda periódica adelanta o retrasa respecto a otra de su misma frecuencia, es necesario comparar los instantes de aparición de estados homólogos de estas dos ondas. Sean las ondas de la figura 17:

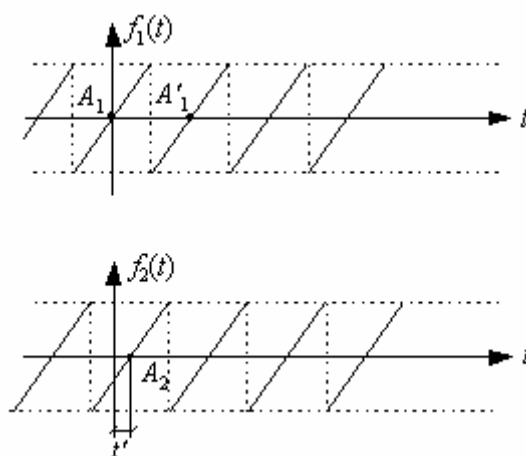


FIGURA 17

Para forma de onda $f_1(t)$ el estado A_1 aparece para $t = 0$. Un estado análogo a éste para la forma $f_2(t)$ es el estado A_2 , que aparece en $t = t'$. Por lo tanto, el estado A_1 aparece antes que el estado A_2 , con lo que se puede afirmar que $f_1(t)$ adelanta respecto de $f_2(t)$.

Sin embargo, los estados A_1' y A_2 también son estados homólogos, y fijándose en la figura 17 se ve que el estado A_2 ocurre antes que el estado A_1' . Por lo tanto, también se puede afirmar que $f_2(t)$ adelanta respecto de $f_1(t)$. Esto significa que el adelanto o retraso entre dos formas de onda es relativo a los estados homólogos con los que se compare.

La manera de resolver esta ambigüedad, a la hora de comparar formas de onda, es elegir estados homólogos separados por menos de un semiperíodo. Si se aplica este criterio a las ondas anteriores, se puede afirmar que $f_1(t)$ adelanta a $f_2(t)$.

4.1.2. Valores asociados a formas de onda periódicas

A continuación se ven algunos valores característicos de las formas de onda periódicas.

Valor de cresta: Es el valor máximo o mínimo que toma la onda.

Valor de cresta a cresta: Es la diferencia algebraica entre los valores máximo y mínimo que toma la onda.

Valor medio: Es el promedio integral de la onda en un período, es decir, es el valor medio de la onda en un ciclo.

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (10)$$

En el caso de formas de onda periódicas en las que el valor medio en un período es nulo se define el *valor medio en un semiperíodo* como:

$$f_m = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (11)$$

Valor eficaz: Se define como:

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (12)$$

Por su definición, puede verse que el valor eficaz de una onda periódica nunca es nulo.

Factor de forma: Se define como la relación entre el valor eficaz de una onda y su valor medio.

$$\text{Factor de forma} = \frac{f_e}{f_m} \quad (13)$$

Factor de cresta: Es la relación entre el valor de cresta de una onda periódica y su valor eficaz.

4.2. Formas de onda senoidales

En ingeniería eléctrica, las formas de onda senoidales adquieren especial importancia. Tanto la generación, el transporte y la distribución, como el consumo de la energía eléctrica se realiza utilizando este tipo de formas de onda. Además es posible analizar el comportamiento de circuitos que contienen fuentes no senoidales si se conoce su comportamiento para fuentes senoidales.

Las formas de onda senoidales son del tipo:

$$f(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

donde F_0 es la *amplitud* de la onda senoidal, $\omega t + \varphi$ es la *fase* de la onda, φ la *fase inicial* y ω la *pulsación*.

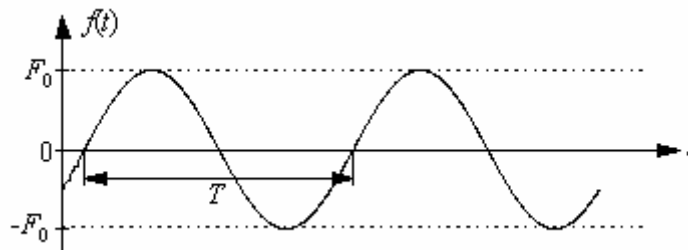


FIGURA 18

Para una onda senoidal se verifica que:

$$\omega \cdot T = 2\pi \quad (16)$$

y, por lo tanto:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (17)$$

Toda función senoidal puede expresarse en forma seno o coseno con sólo cambiar su argumento. Esto es así, ya que se cumple que:

$$\cos \alpha = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (18)$$

Para las formas de onda senoidales se cumple que:

- Si se suman o restan dos formas de onda senoidales de la misma pulsación, el resultado es una forma de onda senoidal de la misma pulsación.
- La derivada y la integral de una forma de onda senoidal de una determinada pulsación es una forma de onda senoidal de idéntica pulsación.

Se ha visto que tanto las ecuaciones de definición de los elementos pasivos como las leyes de Kirchhoff son derivadas, integrales y sumas de tensiones e intensidades, por lo que en un circuito con una fuente de excitación senoidal de una determinada pulsación, todas las tensiones e intensidades de dicho circuito serán ondas senoidales de esa misma pulsación.

4.2.1. Valores asociados a formas de onda senoidales

Valor de cresta: Coincide con la amplitud de la onda (F_0).

Valor de cresta a cresta: Es el doble del valor de la amplitud ($2F_0$).

Valor medio: Calculando el valor medio en un período:

$$f_m = \frac{F_0}{T} \int_0^T \text{sen} \omega t \, dt = 0 \quad (19)$$

Como el valor medio en un período es cero, se calcula el valor medio para un semiperíodo:

$$f_m = \frac{2F_0}{T} \int_0^{T/2} \text{sen} \omega t \, dt = 0,6366 \cdot F_0 \quad (20)$$

Valor eficaz: Calculando la integral:

$$f_{ef} = \sqrt{\frac{F_0}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{F_0}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen} 2t}{4\omega} \right]_0^T} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

Factor de forma:

$$\text{Factor de forma} = \frac{f_{ef}}{f_m} = \frac{F_0 / \sqrt{2}}{0,6366 F_0} = 1,11 \quad (22)$$

Factor de cresta:

$$\text{Factor de cresta} = \frac{f_0}{f_{ef}} = \frac{F_0}{F_0 / \sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (23)$$

4.3. Formas de onda no periódicas más usuales

Dentro de las formas de onda no periódicas, las que habitualmente se presentan en los circuitos eléctricos son las siguientes.

4.3.1. Función rampa

Este tipo de forma de onda se define mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = at & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

y su representación gráfica es:

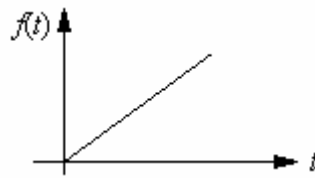


FIGURA 19

4.3.2. Función escalón

Se define mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = A & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

y su representación gráfica es:

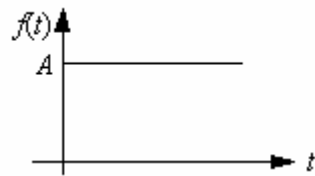


FIGURA 20

4.3.3. Función pulso rectangular

Se define mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \text{ y } t > t_1 \\ f(t) = A & \text{si } 0 < t < t_1 \end{cases} \quad (26)$$

y su representación gráfica es:

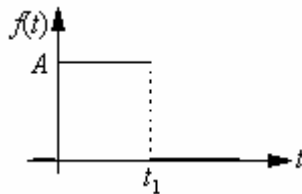


FIGURA 21

4.3.4. Función exponencial

Exponencial decreciente: Se define mediante la ecuación:

$$f(t) = Ae^{-at} \quad (27)$$

y su representación gráfica es:

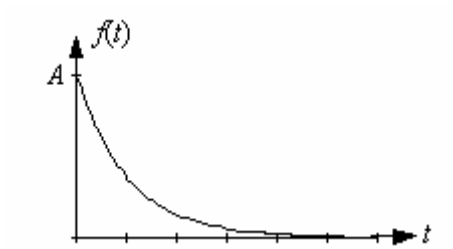


FIGURA 22

Esta forma de onda aparece frecuentemente en el estudio del régimen transitorio de los circuitos eléctricos.

5. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

5.1. Introducción

Analizar un circuito consiste en hallar la tensión y la intensidad en todos y cada uno de los elementos que lo integran, siendo conocidos:

- Los elementos que lo integran
- Su configuración
- Sus fuentes de excitación
- Las condiciones iniciales de funcionamiento

Es posible sistematizar el análisis de circuitos utilizando determinados métodos de análisis. Estos métodos se basan en la aplicación de las dos leyes de Kirchhoff y permiten obtener, de una manera sistemática, las ecuaciones que lleven a la obtención de las variables buscadas.

5.2. Impedancias y admitancias operacionales

En general, tanto la tensión como la intensidad en los elementos que componen un circuito, van a ser variables dependientes del tiempo. Las ecuaciones de definición de estos elementos establecen relaciones funcionales entre la tensión y la intensidad. Para simplificar la notación de éstas ecuaciones de definición se define el ‘operador derivada’ D como:

$$D = \frac{d}{dt} \quad (1)$$

Entonces, la ecuación de definición de algunos de los elementos que constituyen un circuito se puede escribir de las siguientes formas:

Resistencia	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = G \cdot u(t)$
Bobina	$u(t) = L \cdot D \cdot i(t)$	$i(t) = \frac{1}{L \cdot D} \cdot u(t)$
Condensador	$u(t) = \frac{1}{C \cdot D} \cdot i(t)$	$i(t) = C \cdot D \cdot u(t)$

TABLA 1

5.3. Representación de los circuitos

Se dan a continuación las definiciones de algunos términos relacionados con la representación de los circuitos. Dichos términos se mencionan habitualmente a la hora de referirse a los circuitos, y en concreto se utilizan ampliamente a la hora de describir los diferentes métodos de análisis. Estos términos son:

- *Rama*: Elemento o conjunto de elementos, con dos terminales accesibles y del que se puede conocer su ecuación de definición
- Nudo: Punto en el que se unen dos o más ramas.

- *Grafo reticular*: Representación de un circuito que se obtiene sustituyendo cada una de sus ramas por un segmento orientado.
- *Lazo*: Conjunto de ramas de un circuito que forman una trayectoria cerrada.
- *Malla*: Es un lazo de un circuito que no contiene ningún otro lazo en su interior.

5.4. Elección de las ecuaciones nodales y circulares linealmente independientes.

Si analizar un circuito consiste en determinar la tensión y la intensidad en todas y cada una de las ramas de dicho circuito, en un circuito compuesto por r ramas y en el que existen n nudos, las incógnitas a determinar son $2r$, r incógnitas serán las intensidades en cada una de las ramas y las r incógnitas restantes las tensiones en bornes de cada una de dichas ramas.

Para determinar de forma completa estas incógnitas precisaremos disponer de un sistema de $2r$ ecuaciones linealmente independientes, cuyas incógnitas sean las variables en cada una de las ramas de nuestro circuito.

De cada rama del circuito conocemos su ecuación de definición (así se ha establecido en la definición de rama), lo que nos permite disponer de r ecuaciones, que además serán linealmente independientes.

Por otro lado, se puede demostrar que si se aplica la 1ª ley de Kirchhoff a los n nudos del circuito, $n-1$ de éstas ecuaciones son linealmente independientes. También se puede demostrar que si se aplica la 2ª ley de Kirchhoff a todos los lazos del circuito, $r-n+1$ de éstas ecuaciones son linealmente independientes. Así pues, sumando las ecuaciones linealmente independientes de las que disponemos, tendremos que:

$$r + (n - 1) + [r - (n - 1)] = 2r \quad (2)$$

Si tenemos un sistema de $2r$ ecuaciones linealmente independientes con $2r$ incógnitas, nuestro sistema tendrá solución, y además solución única.

Los métodos de análisis nos van a permitir establecer un modo sistemático para garantizar que las ecuaciones que elegimos son linealmente independientes y, de ésta manera, poder encontrar la solución del sistema, es decir, las tensiones e intensidades en cada una de las ramas de nuestro circuito.

5.5. Conversión de fuentes reales

Dos dipolos activos son equivalentes, vistos desde sus terminales, si al cargarlos con el mismo receptor presentan la misma tensión entre sus bornes y proporcionan la misma intensidad.

Sea la fuente real de tensión mostrada en la figura:

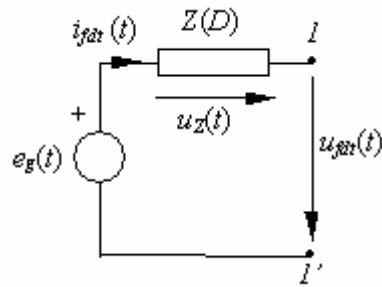


FIGURA 1

La tensión en bornes de dicha fuente valdrá:

$$u_{fg}(t) = e_g(t) - u_z(t) \quad (3)$$

Dado que:

$$u_z(t) = Z(D) \cdot i_{fg}(t) \quad (4)$$

se tiene que:

$$u_{fg}(t) = e_g(t) - Z(D) \cdot i_{fg}(t) \quad (5)$$

Se considera ahora una fuente real de intensidad, tal como la mostrada en la figura 2. La tensión en bornes de dicha fuente de intensidad será:

$$u_{fzi}(t) = Z'(D) \cdot (i_g(t) - i_{fzi}(t)) \quad (6)$$

que puede escribirse también como:

$$u_{fzi}(t) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) i_{fzi}(t) \quad (7)$$

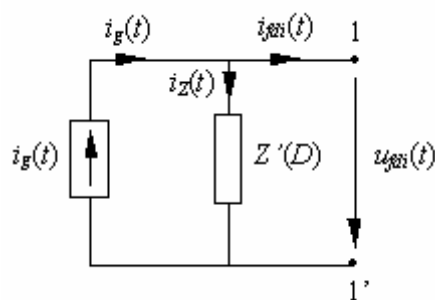


FIGURA 2

Para que estos dos dipolos (fuente real de tensión y fuente real de intensidad) sean equivalentes entre sí, deberán ser iguales la tensión en sus bornes y la intensidad que suministran, por lo que se deberá cumplir entonces que:

$$\begin{aligned} Z'(D) &= Z(D) \\ e_g(t) &= Z(D) \cdot i_g(t) \end{aligned} \quad (8)$$

En cuanto a los sentidos de las fuentes, la fuente de intensidad ha de apuntar hacia el signo ‘+’ de la fuente de tensión.

5.6. Modificación de la geometría de un circuito

A la hora de aplicar los diferentes métodos de análisis a los circuitos, es recomendable que las fuentes de excitación de dicho circuito sean de un determinado tipo, o bien fuentes de tensión o bien fuentes de intensidad. En el apartado anterior se ha visto como transformar fuentes reales de uno a otro tipo. En este apartado se va a ver como transformar fuentes ideales. Por otra parte, determinadas disposiciones de los elementos en las ramas de un circuito, permiten hacer ciertas simplificaciones que él que ayudan a reducir el número de ecuaciones necesarias para obtener sus parámetros. Se verán algunas de éstas disposiciones que permiten simplificar ramas.

5.6.1. Transformación de una fuente ideal de tensión

En la figura puede verse un detalle de un circuito que contiene una fuente ideal de tensión. A continuación se ve el proceso para transformar esta fuente ideal de tensión en varias fuentes reales de intensidad.

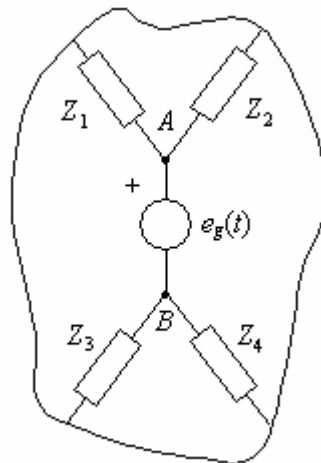


FIGURA 3

Se ‘empuja’ la fuente ideal de tensión hacia uno de los dos nudos entre los que está situada. La fuente original se desdobra en tantas fuentes como ramas concurren al nudo al cual se ‘empuja’, desapareciendo dicho nudo en el circuito transformado. En el caso del circuito de la figura anterior, la transformación quedaría:

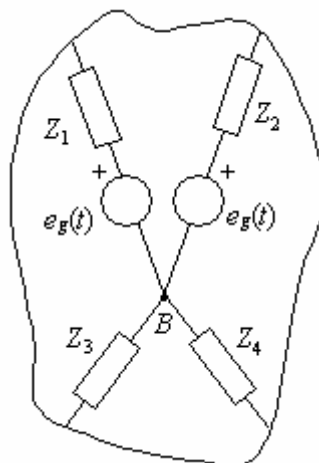


FIGURA 4

Se puede comprobar que en ambos circuitos las intensidades que circulan por las ramas son las mismas, y que también se mantienen las tensiones entre los nudos.

5.6.2. Transformación de una fuente ideal de intensidad

En la figura puede verse un detalle de un circuito que contiene en una de sus ramas una fuente ideal de intensidad. Se van a ver los pasos a seguir para construir un circuito equivalente a éste, pero que contenga fuentes reales de intensidad en vez de la fuente ideal de partida.

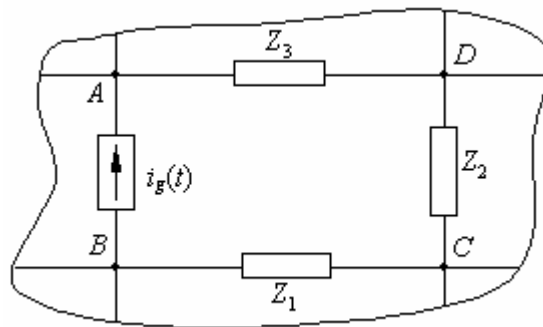


FIGURA 5

Se busca un camino alternativo que lleve, por otras ramas del circuito, de uno al otro de los nudos entre los que se encuentra la fuente ideal de intensidad, y, en paralelo con esas ramas, se coloca una fuente de intensidad de valor el valor de la fuente ideal original. En esta transformación desaparece del circuito equivalente la rama de la fuente ideal.

Se puede comprobar que el balance de intensidades en cada uno de los nudos del circuito transformado es el mismo que en el circuito original.

En el caso del circuito de la figura anterior, su circuito equivalente, una vez modificada su geometría quedará:

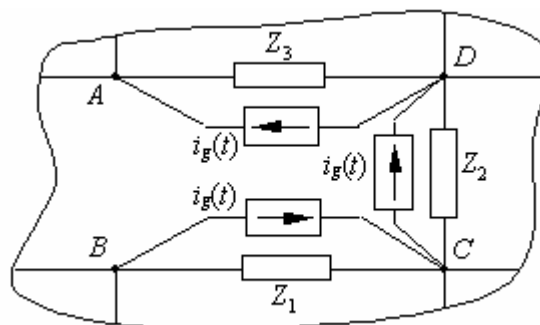


FIGURA 6

Es importante hacer notar que transformar una fuente real de tensión en su fuente de intensidad equivalente y viceversa, *no se considera* modificación de la geometría del circuito, ya que los grafos reticulares de ambos circuitos son idénticos.

5.6.3. Elementos en serie con una fuente ideal de intensidad

Si una rama está compuesta por una fuente ideal de intensidad con otros elementos en serie con ella, la intensidad que circula por dicha rama viene impuesta por la fuente de intensidad. La tensión y la intensidad en el resto de ramas, y por lo tanto de elementos que componen el circuito, no se altera si eliminamos los elementos que están en serie con dicha fuente.

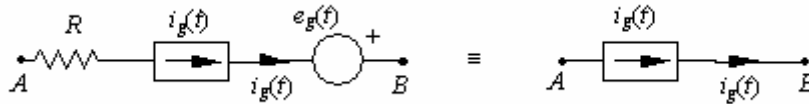


FIGURA 7

A destacar nuevamente que esta equivalencia es válida para los elementos del circuito que no se ven implicados en la modificación, obviamente para la rama modificada la equivalencia no es válida.

5.6.4. Elementos en paralelo con una fuente ideal de tensión

Si en un circuito hay ramas que se encuentran conectadas en paralelo con una rama que contiene una fuente ideal de tensión, la tensión en bornes de todas estas ramas viene impuesta por la fuente de tensión. Así pues, la tensión y la intensidad en el resto de elementos del circuito no se ve alterada si se eliminan las ramas que se encuentran en paralelo con dicha fuente.

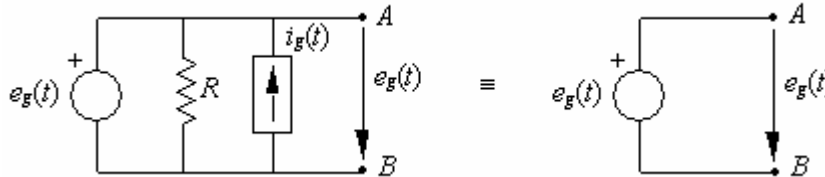


FIGURA 8

5.7. Método de análisis por nudos

Dado un circuito con n nudos, se toma uno de ellos como ‘nudo de referencia’. A las tensiones entre los $n-1$ nudos restantes y el nudo de referencia se les conoce como ‘tensiones de nudo’.

Este método de análisis consiste en aplicar la 1ª ley de Kirchhoff a $n-1$ nudos del circuito, utilizando como variables las tensiones de nudo. De esta forma, se garantiza que el sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución única.

Es conveniente que en el circuito sólo existan fuentes de intensidad.

La aplicación del método se va a realizar sobre el circuito de la figura siguiente:

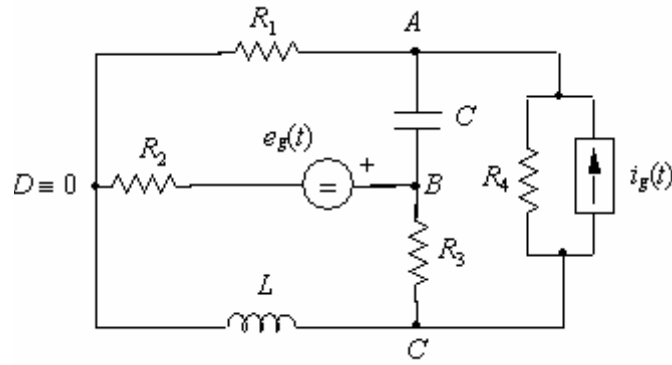


FIGURA 9

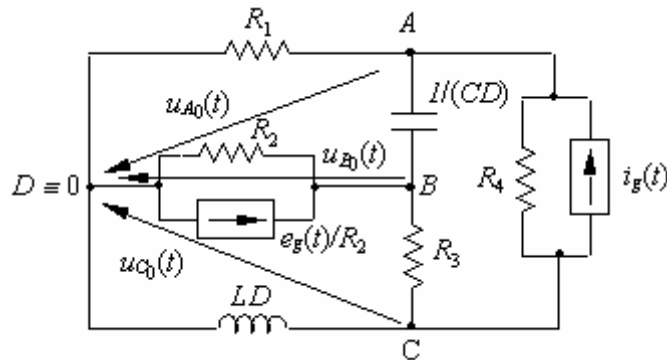


FIGURA 10

Los circuitos de las figuras anteriores son circuitos equivalentes, en el circuito original se ha transformado la fuente real de tensión en una fuente real de intensidad, además de colocarse al lado de cada elemento el valor de su impedancia operacional.

Con estos criterios, se puede proceder a la escritura directa en forma matricial de las ecuaciones aplicando el método de análisis por nudos. En forma general, esta escritura directa tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} & \dots & Y_{A,n-1} \\ Y_{BA} & Y_{BB} & \dots & Y_{B,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n-1,A} & Y_{n-1,B} & \dots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{A0}(t) \\ u_{B0}(t) \\ \dots \\ u_{n-1,0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{gA}(t) \\ i_{gB}(t) \\ \dots \\ i_{g,n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

es decir:

$$[Y_{n-1}] \cdot [u_{n-1,0}(t)] = [i_{g,n-1}(t)] \quad (10)$$

Donde:

- $[Y_{n-1}]$ se denomina 'matriz de admitancias de nudo'. Esta matriz es simétrica y se construye de la siguiente manera:
 - Elementos de la diagonal principal Y_{ii} : Se denominan 'admitancias propias de nudo'. Estos elementos son la suma de las admitancias que concurren en el nudo i .
 - Elementos de fuera de la diagonal principal Y_{ij} : Se denominan 'admitancias mutuas de nudo'. Estos elementos son la suma, con signo negativo, de las admitancias que se encuentran entre el nudo i y el nudo j .

- $[u_{n-10}(t)]$ se denomina ‘vector de tensiones de nudo’. Este vector columna lo forman las incógnitas de nuestro sistema de ecuaciones, es decir, las tensiones de $n-1$ nudos del circuito al nudo de referencia.
 - $[i_{gn-1}(t)]$ se denomina ‘vector de intensidades de alimentación de nudo’. Los elementos de este vector son la suma algebraica de las intensidades que *entran* en el nudo i provenientes de fuentes de intensidad.
- De ésta manera, para el circuito de la figura tendremos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4} & -CD & -\frac{1}{R_4} \\ -CD & \frac{1}{R_3} + CD + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{A0} \\ u_{B0} \\ u_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ e_g \\ -i_g \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sistema de ecuaciones diferenciales cuya resolución permitirá obtener las tensiones de nudo, incógnitas del método de análisis, y a partir de dichas tensiones se podrán calcular las intensidades que circulan por cada rama del circuito así como las tensiones en bornes de dichas ramas.

5.8. Método de análisis por mallas

Dado un circuito con m mallas, se asigna una intensidad que circula por todos los elementos que pertenecen a cada una de las mallas. A éstas intensidades se las conoce como ‘intensidades de circulación de malla’.

Este método de análisis consiste en aplicar la 2ª ley de Kirchhoff a las m mallas del circuito, utilizando como variables las intensidades de circulación de malla. De esta forma, se garantiza que el sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución única. Es conveniente que en el circuito sólo existan fuentes de tensión. La aplicación del método se va a realizar sobre el circuito de la figura siguiente:

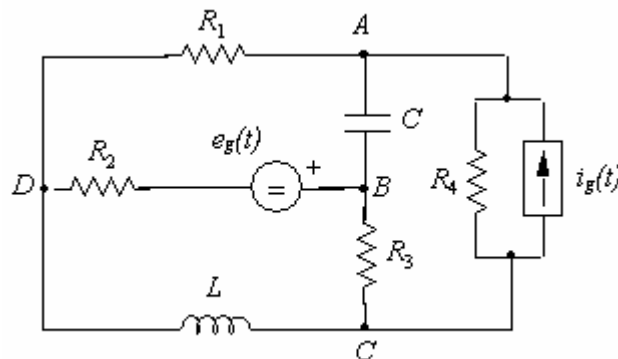


FIGURA 11

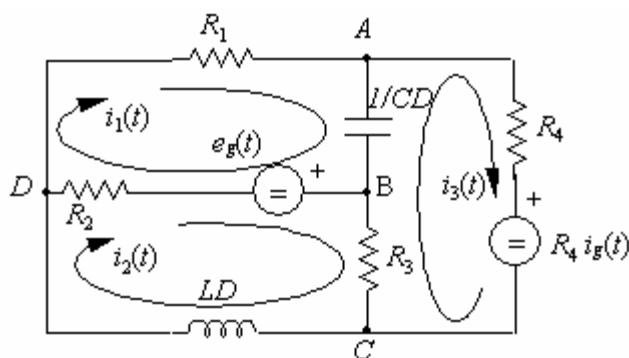


FIGURA 12

Con estos criterios, se puede proceder a la escritura directa en forma matricial de las ecuaciones aplicando el método de análisis por mallas. En forma general, esta escritura directa tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & \dots & Z_{am} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & \dots & Z_{bm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{ma} & Z_{mb} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ \dots \\ i_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{ga}(t) \\ e_{gb}(t) \\ \dots \\ e_{gm}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

es decir:

$$[Z_m] \cdot [i_m(t)] = [e_{gm}(t)] \quad (13)$$

Donde:

- $[Z_m]$ se denomina ‘matriz de impedancias de malla’. Esta matriz es simétrica y se construye de la siguiente manera:
 - Elementos de la diagonal principal Z_{ii} : Se denominan ‘impedancias propias de malla’. Estos elementos son la suma de las impedancias que pertenecen a la malla i .
 - Elementos de fuera de la diagonal principal Z_{ij} : Se denominan ‘impedancias mutuas de malla’. Estos elementos son la suma, algebraica, de las impedancias que pertenecen simultáneamente a la malla i y a la malla j . La impedancia tendrá signo ‘+’ si, sobre el elemento considerado, el sentido de la intensidad de circulación de la malla i coincide con el sentido de la intensidad de circulación de la malla j . La impedancia mutua tendrá signo ‘-’ en caso contrario.
- $[i_m(t)]$ se denomina ‘vector de intensidades de malla’. Este vector columna lo forman las incógnitas de nuestro sistema de ecuaciones, es decir, las intensidades de circulación de las m mallas del circuito en estudio.
- $[e_{gm}(t)]$ se denomina ‘vector de tensiones de alimentación de malla’. Los elementos de este vector son la suma algebraica de las tensiones de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla considerada. Dichas tensiones tendrán signo + si la intensidad de circulación de malla ‘sale’ por el terminal marcado con ‘+’ en la fuente de tensión, y tendrá signo – en caso contrario.

De ésta manera, para el circuito de la figura tendremos que:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\ -R_2 & R_2 + LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_3 + \frac{1}{CD} + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_g \\ -e_g \\ R_4 i_g \end{bmatrix} \quad (14)$$

5.9. Análisis de circuitos sin modificar la geometría

En el análisis por nudos se ha comentado que era conveniente que todas las fuentes del circuito fueran fuentes de intensidad, mientras que en el análisis por mallas se decía que era conveniente que todas las fuentes fueran de tensión. Si el circuito a analizar contiene fuentes reales, ya sean de tensión o de intensidad, hemos visto pocos apartados antes como se puede hacer una transformación equivalente de un tipo de fuente real al otro, sin que esto se considere transformación de la geometría del circuito, ya que no se ve alterado su grafo reticular.

Si el circuito contiene fuentes ideales de tensión en el caso de análisis por nudos, o fuentes ideales de intensidad en el caso del análisis por mallas, a pesar de que se ha visto como es posible transformar éste tipo de fuentes en fuentes reales, en ocasiones es muy conveniente no modificar el grafo reticular del circuito, y proceder a su análisis sin modificar dichas fuentes ideales, es decir, sin modificar la geometría del circuito.

En el caso del análisis por nudos cuando el circuito contiene fuentes ideales de tensión, se procede de la siguiente manera:

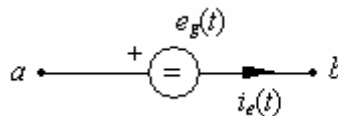


FIGURA 13

Se considera que por la rama en la que se encuentra la fuente ideal de tensión circula una intensidad desconocida $i_e(t)$ y, a todos los efectos durante el análisis por nudos del circuito, se considera esta intensidad como si fuera proveniente de una fuente de intensidad. Lógicamente, se ha añadido una incógnita al problema, la intensidad desconocida, que habrá que solventar añadiendo una ecuación adicional al sistema de ecuaciones diferenciales. La ecuación adicional será la tensión de la fuente en función de las variables del análisis, es decir, en función de las tensiones de nudo.

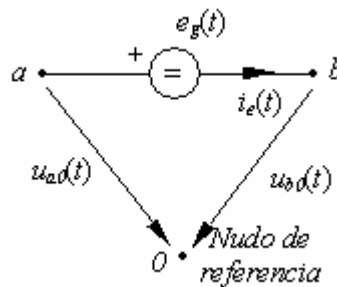


FIGURA 14

Incógnita añadida: $i_e(t)$

Ecuación adicional: $e_g(t) = u_{a0}(t) - u_{b0}(t)$

En el caso del análisis por mallas cuando el circuito contiene fuentes ideales de intensidad, se procede de la siguiente manera:

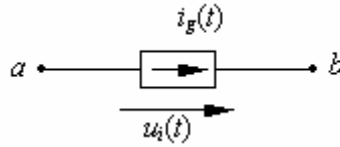


FIGURA 15

Se considera que en bornes de la rama en la que se encuentra la fuente ideal de intensidad existe una tensión desconocida $u_i(t)$ y, a todos los efectos durante el análisis por mallas del circuito, se considera esta tensión como si fuera la tensión en bornes de una fuente de tensión. Lógicamente, se ha añadido una incógnita al problema, la tensión desconocida, que habrá que solventar añadiendo una ecuación adicional al sistema de ecuaciones diferenciales. La ecuación adicional será la intensidad de la fuente en función de las variables del análisis, es decir, en función de las intensidades de circulación de malla.

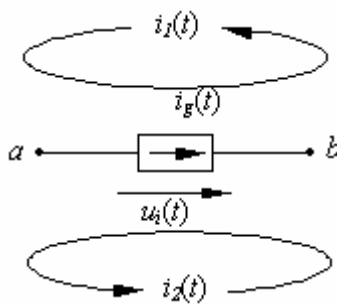


FIGURA 16

Incógnita añadida: $u_i(t)$

Ecuación adicional: $i_g(t) = i_1(t) - i_2(t)$

6. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CIRCUITOS

6.1. Introducción

Cualquier circuito puede ser analizado, conociendo las ecuaciones de definición de los diversos elementos que lo integran, por aplicación de las leyes de Kirchhoff. Los teoremas que a continuación se exponen son un complemento a los métodos de análisis vistos en el capítulo anterior, ya que, generalmente, su aplicación, simplifica la tarea de calcular las tensiones y las intensidades en los circuitos.

6.2. Principio de linealidad

Un circuito es lineal si su comportamiento puede caracterizarse por medio de ecuaciones diferenciales lineales. Los elementos que constituyen los circuitos lineales, son a su vez elementos lineales, esto es, su ecuación de definición es una ecuación diferencial lineal.

El *principio de linealidad* dice que, si todas las fuentes de excitación de un circuito lineal son multiplicadas por una constante, las respuestas de dicho circuito se verán multiplicadas por esa misma constante.

6.3. Teorema de superposición

Si en un circuito lineal actúan simultáneamente varias fuentes de excitación, la respuesta de dicho circuito, debida a la presencia de dichas fuentes, será igual a la suma de las respuestas del circuito si actuase cada fuente de excitación por separado.

El teorema es válido aunque alguna de las fuentes de excitación del circuito sea una fuente dependiente.

6.4. Regla de sustitución

Conocida la relación entre la tensión en bornes y la intensidad que circula por un elemento pasivo de un circuito, dicho elemento puede sustituirse por una fuente de tensión o por una fuente de intensidad, sin que se alteren los resultados en el resto del circuito.

6.5. Teorema de compensación

Este teorema permite, una vez determinadas las respuestas de un circuito por cualquiera de los métodos conocidos, determinar la variación de dichas respuestas cuando se modifica el valor de uno de sus elementos pasivos, sin necesidad de tener que analizar nuevamente el circuito en esas nuevas condiciones.

Sea un circuito, que representamos por una “caja”, del que extraemos dos ramas, una, en la que se encuentra el elemento pasivo cuyo valor se modifica, y otra que nos va a permitir comprobar como afecta esta modificación a las variables en otra parte de ese mismo circuito. Por simplicidad, esta segunda rama del circuito va a ser un conductor sin resistencia, es decir, un cortocircuito de ese circuito.

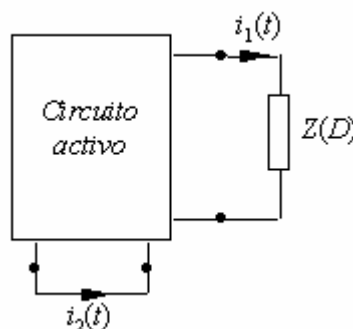


FIGURA 1

Este circuito ha sido analizado, mediante cualquiera de los métodos ya vistos, y se conocen las intensidades que circulan por las ramas que hemos extraído del circuito, $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

Si la impedancia $Z(D)$ varía su valor, la intensidad que circula por la rama en la que se encuentra esta impedancia variará su valor, y también lo harán el resto de las variables del circuito, en concreto el valor de la intensidad $i_2(t)$.

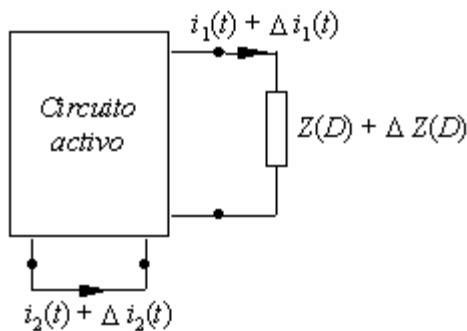


FIGURA 2

Este circuito, sin que se modifique nada en él, se puede representar en la siguiente forma

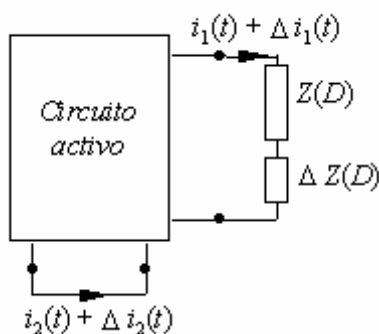


FIGURA 3

En las impedancias se producirán las caídas de tensión indicadas en la siguiente figura

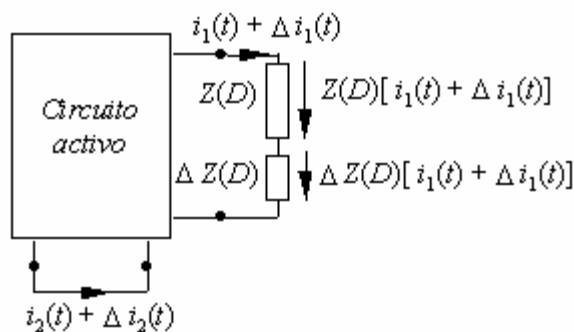


FIGURA 4

En la porción correspondiente al incremento de la impedancia, conocemos la relación entre la intensidad que circula por ella y la caída de tensión en bornes, por lo que podremos aplicar la regla de sustitución, y sustituir este incremento de impedancia por una fuente de tensión de valor la caída de tensión en bornes de dicho incremento.

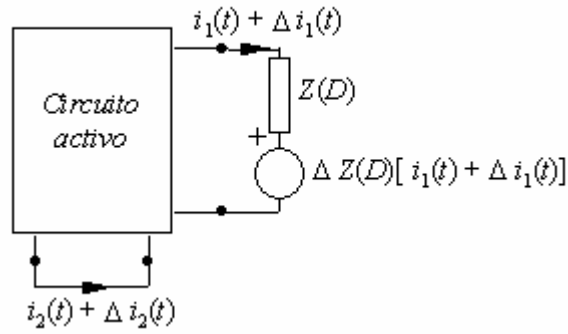


FIGURA 5

Vamos a analizar este nuevo circuito aplicando el teorema de superposición, de la siguiente manera: la respuesta total del circuito será igual a la respuesta del circuito cuando se considera que actúan todas las fuentes de excitación incluidas dentro de la caja que representa al circuito activo, mas la suma de la respuesta cuando sólo actúa la fuente correspondiente a haber aplicado la regla de sustitución al incremento de impedancia. Gráficamente esto es:

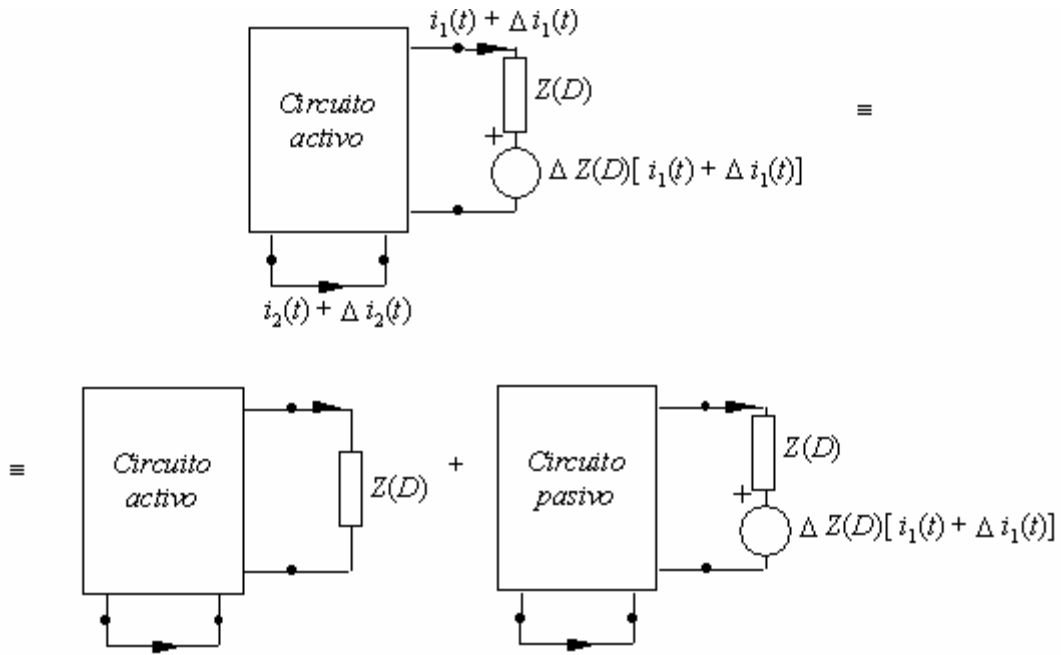


FIGURA 6

El primer circuito corresponde al circuito original, ya analizado, y por lo tanto, sus respuestas serán $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Así pues, si según el teorema de superposición, la respuesta total del circuito ha de ser igual a la suma de las respuestas individuales, la respuesta del segundo circuito será $\Delta i_1(t)$ e $\Delta i_2(t)$, tal como se señala en la figura siguiente:

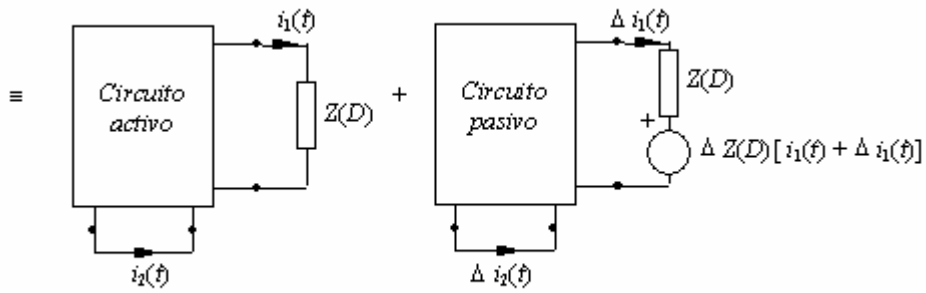


FIGURA 7

Por lo tanto, si lo que se desea es calcular la variación que se produce en las variables del circuito debido a la variación de la impedancia, será suficiente con que se analice el segundo circuito resultante de la aplicación del teorema de superposición (Figura 7), en principio más sencillo de analizar puesto que el circuito que antes era activo, ahora es pasivo. Las respuestas de este circuito serán los incrementos que se producirán en las variables del circuito original debido a la variación del valor de la impedancia.

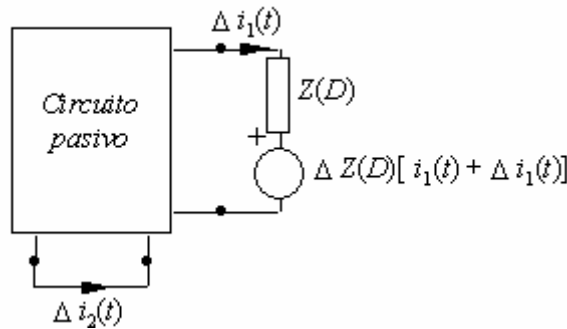


FIGURA 8

Sobre este circuito, y aplicando la regla de sustitución nuevamente, es posible hacer unos cambios que lo acerquen más a la forma del circuito de partida, esto es:

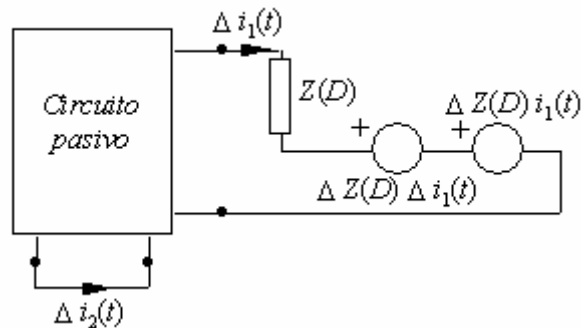


FIGURA 9

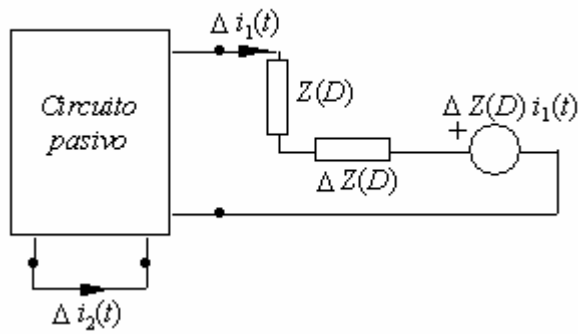


FIGURA 10

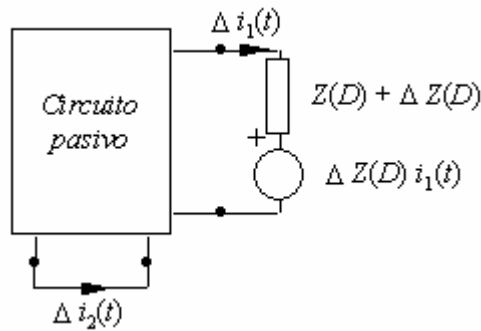


FIGURA 11

Con lo cual, el enunciado del teorema de compensación sería: la variación en el valor de las respuestas de un circuito ante una variación de una de sus impedancias será las respuestas de un circuito formado por el circuito pasivo correspondiente al circuito activo original al que se le añade en la rama en la cual varía la impedancia una fuente de tensión ideal de valor el producto de la variación de la impedancia por la intensidad que circulaba por dicha rama antes de que se modificara la impedancia, y en el que se considera que la impedancia ya ha cambiado su valor.

6.6. Teorema de Thevenin. Equivalente Thevenin

Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es equivalente a una fuente real de tensión, formada por, una fuente ideal de tensión, de valor la tensión presente entre los terminales del dipolo cuando se encuentra a circuito abierto, y en serie una impedancia, de valor la impedancia equivalente, vista desde los terminales, del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.

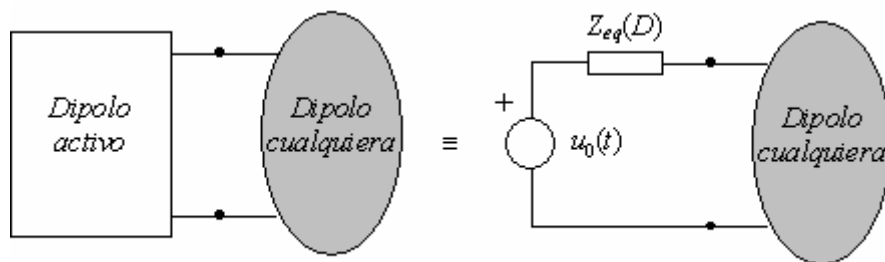


FIGURA 12

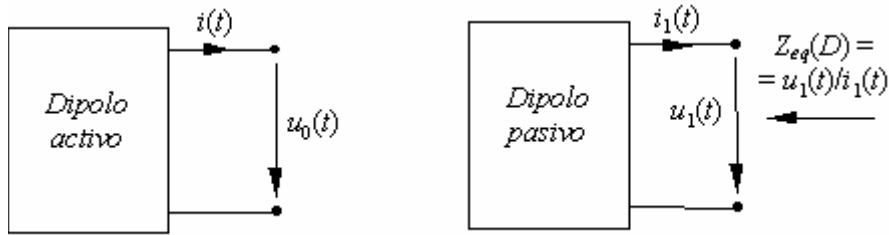


FIGURA 13

6.7. Teorema de Norton. Equivalente Norton

Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es equivalente a una fuente real de intensidad, formada por una fuente ideal de intensidad, de valor la intensidad que circula entre los terminales del dipolo cuando éstos se cortocircuitan, y en paralelo una impedancia, de valor la impedancia equivalente, vista desde los terminales, del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.

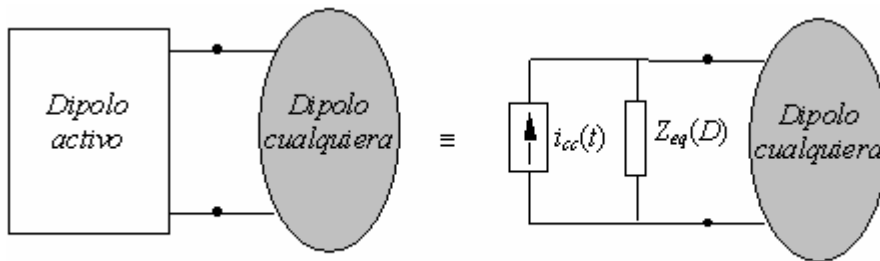


FIGURA 14

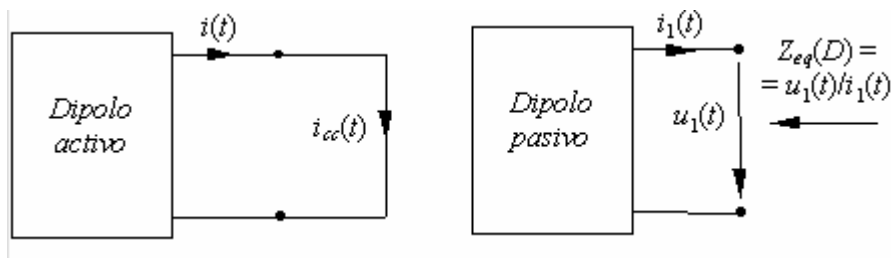


FIGURA 15

6.8. Teorema de Millman

Sean n impedancias, de valor conocido, de manera que uno de los extremos de todas ellas concurre en un punto B . Si conocemos las tensiones existentes entre un punto A del circuito y el otro extremo de cada una de las n impedancias, la tensión entre los puntos A y B se puede calcular de la siguiente forma:

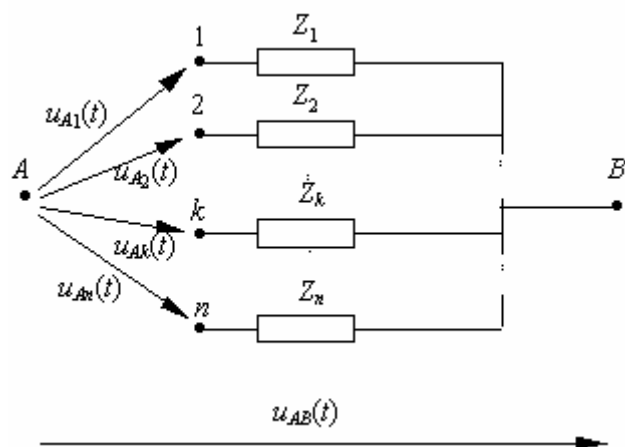


FIGURA 16

$$u_{AB}(t) = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \cdot u_{Ak}}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

(1)

7. ANÁLISIS DE CIRCUITOS DE RÉGIMEN ESTACIONARIO SENOIDAL

7.1. Determinación del RES

Supongamos un circuito excitado por una onda senoidal. El comportamiento del circuito vendrá determinado por una ecuación diferencial.

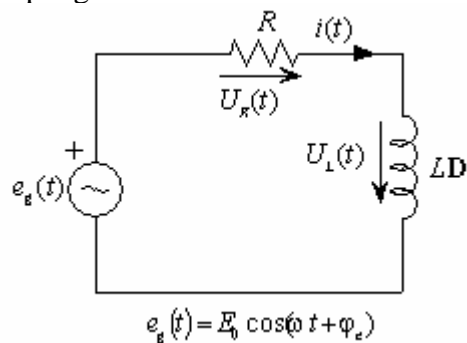
La solución completa de dicha ecuación diferencial se podrá obtener a partir de dos términos, la solución de la ecuación diferencial homogénea más la solución particular.

La solución de la ecuación homogénea se amortigua con el tiempo cuando el circuito presenta elementos resistivos y da cuenta de lo que se denomina *régimen transitorio* del circuito.

La solución particular tiene forma senoidal, al igual que la onda de excitación, y constituye el *régimen permanente* del circuito.

7.2. Determinación del RES mediante el método de los coeficientes indeterminados

Supongamos el circuito:



Analizando el circuito tenemos:

$$e_g(t) = U_R(t) + U_L(t), \text{ siendo } \begin{cases} U_R(t) = Ri(t) \\ U_L(t) = LDi(t) \end{cases}, \text{ por tanto:}$$

$$e_g(t) = Ri(t) + LDi(t) = (R + LD)i(t), \text{ e introduciendo el valor de } e_g(t) \text{ tenemos:}$$

$$E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) = (R + LD)i(t)$$

La solución será entonces:

$$i(t)_{\text{completa}} = i(t)_{\text{homogénea}} + i(t)_{\text{particular}} =$$

Solución transitoria + Solución régimen permanente .

Solución particular (régimen permanente)

Vamos a encontrar ahora la solución al régimen permanente mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para ello, probaremos una solución particular con la misma forma que la excitación:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial tendremos que:

$$-L\omega I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) + RI_0 \operatorname{cos}(\omega t + \varphi_i) = E_0 \operatorname{cos}(\omega t + \varphi_e)$$

desarrollando el seno de la suma:

$$\begin{aligned} & -L\omega I_0 \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi_i - L\omega I_0 \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi_i + \\ & + RI_0 \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi_i - RI_0 \operatorname{sen} \omega t \cos \varphi_i = \\ & = E_0 \cos \omega t \cos \varphi_e - E_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi_e \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes (I_0, φ_i) asignamos dos valores concretos al producto ωt .

$$\text{si } \omega t = 0 \Rightarrow -L\omega I_0 \operatorname{sen} \varphi_i + I_0 R \cos \varphi_i = E_0 \cos \varphi_e$$

$$\text{si } \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -L\omega I_0 \cos \varphi_i + I_0 R \operatorname{sen} \varphi_i = E_0 \operatorname{sen} \varphi_e$$

Elevando estas dos ecuaciones al cuadrado y sumándolas tenemos:

$$R^2 I_0^2 + L^2 \omega^2 I_0^2 = E_0^2 \Rightarrow I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Si dividimos las dos ecuaciones obtenemos:

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi) \text{ donde } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\varphi_e = \varphi_i + \varphi \Rightarrow \varphi_i = \varphi_e - \varphi$$

Por lo tanto, la solución particular, es decir, la solución del circuito en régimen permanente es:

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_e - \varphi) \quad \text{donde } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

Solución de la ecuación homogénea (régimen transitorio)

La solución de la ecuación diferencial homogénea $(LD + R)i(t) = 0$ es:

$$i_{\text{homogénea}}(t) = I_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Esta solución se amortigua con el tiempo. Al pasar un tiempo lo suficientemente largo, tendremos $i_{\text{homogénea}}(t) = 0$.

Solución completa

La solución completa de nuestra ecuación diferencial es, como ya se ha dicho, la suma de la solución a la ecuación diferencial homogénea más la solución particular. Será entonces:

$$i(t) = I_1 e^{-\frac{R}{L}t} + I_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

7.3. Representación de ondas senoidales mediante números complejos

A la hora de trabajar con formas de onda, resulta indiferente hablar de formas de onda seno o coseno, ya que:

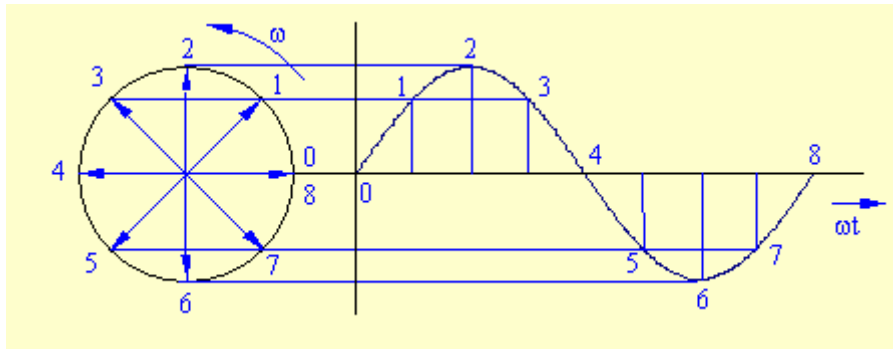
$$\text{sen}(\omega t + \varphi_1) = \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Podemos representar estas formas de onda mediante números complejos a partir de la fórmula de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + \text{sen } \omega t \cdot j, \text{ siendo } j \text{ la unidad imaginaria.}$$

$e^{j\omega t}$ representa en el plano complejo un vector unitario que gira en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad angular ω , y se le denomina *fasor*.

La proyección de este vector sobre el eje horizontal determina una onda cosenoidal, mientras que la proyección sobre el eje vertical determina una onda senoidal.



Según todo esto, un vector girando en el plano complejo nos dará la misma información que una función senoidal o cosenoidal en función del tiempo. Además nos permitirá dibujar diagramas vectoriales que nos darán la misma información que la función dependiente del tiempo (seno o coseno).

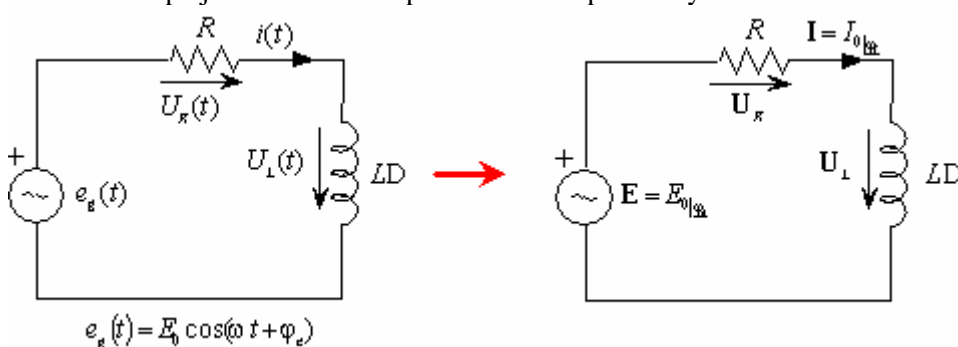
7.4. Determinación del RES mediante el método simbólico

El método simbólico se utiliza para determinar la solución particular de la ecuación diferencial, es decir, el *régimen permanente*.

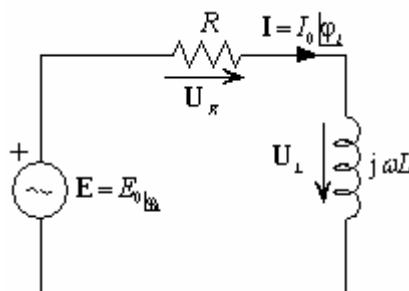
Para aplicar el método simbólico se transforma el circuito al campo complejo. Con ello se consigue transformar también la ecuación diferencial en una ecuación algebraica y así se simplifica su solución.

Procedimiento para la transformación

1. Se sustituyen las fuentes de excitación y las variables del circuito por números complejos contruidos a partir de las amplitudes y las fases iniciales.



2. Se sustituye el operador derivada, $D = \frac{d}{dt}$, por $j\omega$ en las impedancias operacionales del circuito.



$$\mathbf{E} = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L \begin{cases} \mathbf{U}_R = R \mathbf{I} \\ \mathbf{U}_L = j\omega L \mathbf{I} \end{cases} \text{ y, por tanto:}$$

Tenemos ahora que

$$\mathbf{E} = (R + j\omega L) \mathbf{I}$$

que es una ecuación algebraica en números complejos de forma que:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\omega L} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left| \arctg \frac{\omega L}{R} \right|} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left| \varphi_e - \varphi \right|}$$

siendo $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$.

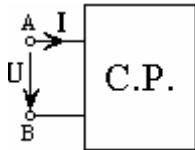
Dado que $e_g(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) = \text{Re}(\mathbf{E})$, la solución de $i(t)$ será $\text{Re}(\mathbf{I})$, esto es:

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_e - \varphi)$$

Esta es la solución para el *régimen estacionario senoidal*.

7.5. Impedancias y admitancia s complejas. Asociación de impedancias

Dado un circuito pasivo:



se define la *impedancia compleja* como la relación entre la tensión en bornes del dipolo

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}$$

y la intensidad que entra en él,

$$\mathbf{Z} = Z_{|\varphi_r}$$

La *forma polar* se denota como $\mathbf{Z} = Z_{|\varphi_r}$, mientras que la *forma binómica* se escribe como $\mathbf{Z} = R + jX$. A R se le denomina, como habitualmente, *resistencia* y a X , *reactancia*.

Se define la admitancia compleja como relación entre la intensidad que entra en un

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{U}}$$

dipolo y la tensión en bornes,

$$\mathbf{Y} = Y_{|\varphi_r}$$

La *forma polar* se denota como $\mathbf{Y} = Y_{|\varphi_r}$, mientras que la *forma binómica* se escribe como $\mathbf{Y} = G + jB$. A G se le denomina *conductancia* y a B , *susceptancia*.

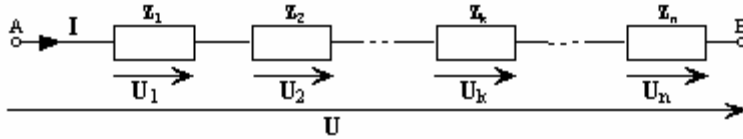
$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$ pero, en general, $G \neq \frac{1}{R}$ y $B \neq \frac{1}{X}$, como se puede demostrar fácilmente:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}, \text{ por tanto:}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Asociación en serie

Supongamos n impedancias en serie:



La tensión en cada impedancia será: $U_k = Z_k I$, y la tensión total:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_k + \dots + U_n = \left(\sum_{k=1}^n Z_k \right) I$$

, por tanto, la impedancia equivalente será:

$$Z_{eq} = \sum_{k=1}^n Z_k$$

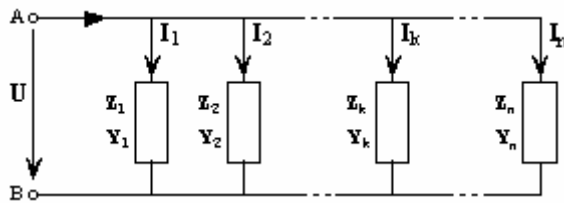
y, a partir de esta impedancia equivalente podremos calcular cada tensión U_k :

$$U_k = U \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^n Z_k} = U \frac{Z_k}{Z_{eq}}$$

que es la fórmula del *divisor de tensión*.

Asociación en paralelo

Supongamos n impedancias en paralelo:



La intensidad que circula por cada impedancia será: $I_k = Y_k U$, y la intensidad total:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_k + \dots + I_n = \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right) U$$

por tanto, la admitancia equivalente será:

$$Y_{eq} = \sum_{k=1}^n Y_k$$

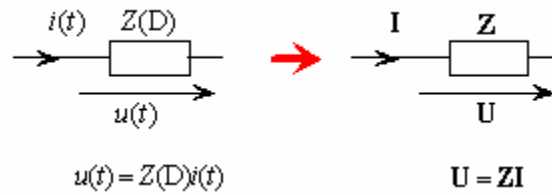
y, a partir de esta impedancia equivalente podremos calcular cada intensidad I_k :

$$I_k = I \frac{Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} = I \frac{Y_k}{Y_{eq}}$$

que es la fórmula del *divisor de intensidad*.

7.6. Elementos pasivos básicos en RES

Cualquier elemento pasivo básico se puede representar en régimen estacionario senoidal por su impedancia compleja y de esta forma, se pueden obtener sus ecuaciones de definición en el denominado *dominio de la frecuencia*.



De esta forma, tenemos la ecuación compleja:

$$U_{|\varphi_u} = Z_{|\varphi_z} I_{|\varphi_i}$$

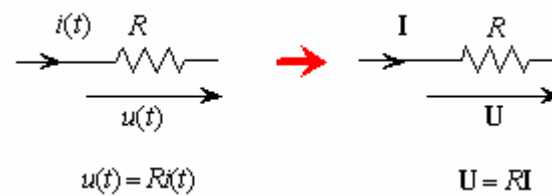
o, lo que es lo mismo, dos ecuaciones reales:

$$U = ZI$$

$$\varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I$$

A continuación particularizaremos estas ecuaciones para cada uno de los elementos pasivos básicos.

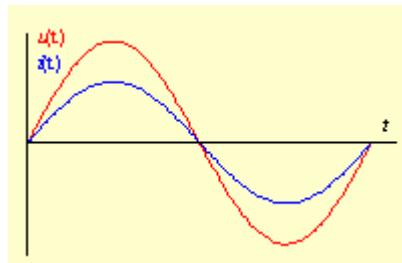
RESISTENCIA



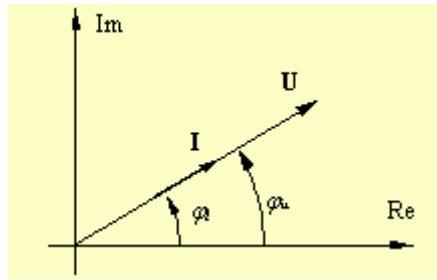
Tendremos entonces: $U_{|\varphi_u} = R_{|\varphi_R} I_{|\varphi_i}$

y, por tanto, $\begin{cases} U = RI \\ \varphi_U = \varphi_I \end{cases}$. La tensión y la intensidad están en fase.

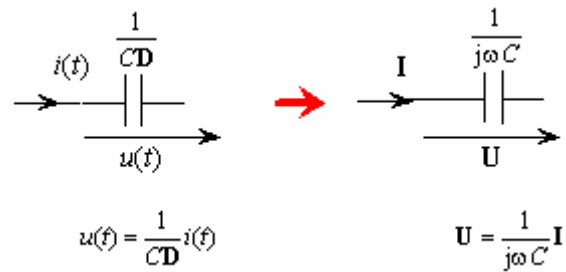
Representándolo gráficamente en el dominio temporal, tendremos:



y, en representación fasorial:



CONDENSADOR

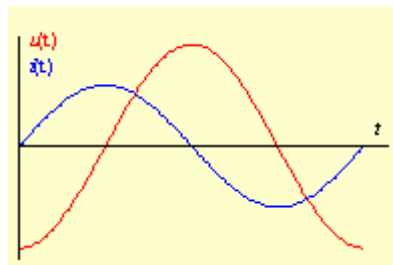


Tendremos entonces:

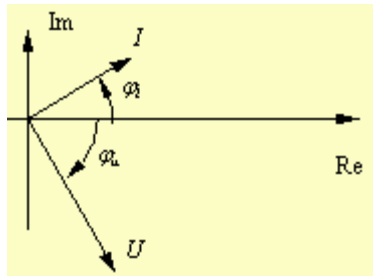
$$U|_{\varphi_u} = \frac{1}{\omega C|_{-90^\circ}} I|_{\varphi_i} \text{ y, por tanto,}$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\omega C} I \\ \varphi_U = \varphi_i - 90^\circ \end{cases} \text{ . La tensión retrasa } 90^\circ \text{ a la intensidad.}$$

Representándolo gráficamente en el dominio temporal, tendremos:



y, en representación fasorial:



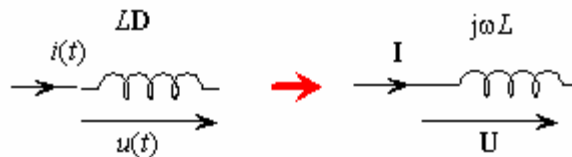
La impedancia Z_c depende de la frecuencia:

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \quad \begin{cases} Z_c = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi_Z = -90^\circ \end{cases}$$

Si $\omega = 0 \Rightarrow Z_c = \infty \Rightarrow$ Circuito abierto.

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_c = 0 \Rightarrow$ Cortocircuito.

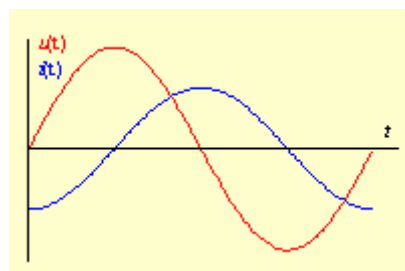
BOBINA



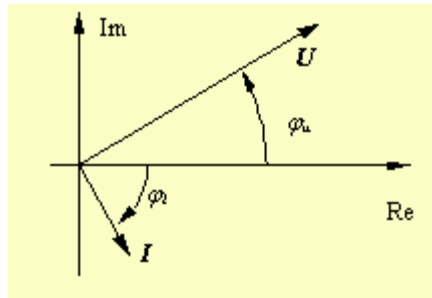
$U_{|\varphi_u} = \omega L \angle 90^\circ I_{|\varphi_i}$ y, por tanto,

$$\begin{cases} U = \omega L I \\ \varphi_U = \varphi_i + 90^\circ \end{cases} \text{ . La tensión adelanta } 90^\circ \text{ a la intensidad.}$$

Representándolo gráficamente en el dominio temporal, tendremos:



y, en representación fasorial:



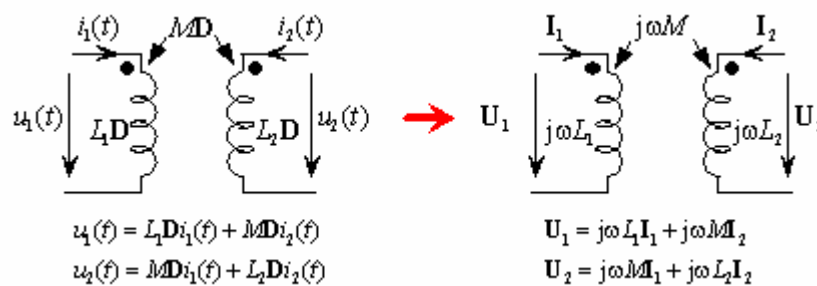
De nuevo, la impedancia Z_L depende de la frecuencia:

$$Z_L = j\omega L = \omega L \underline{90^\circ} \quad \begin{cases} Z_L = \omega L \\ \varphi_Z = 90^\circ \end{cases}$$

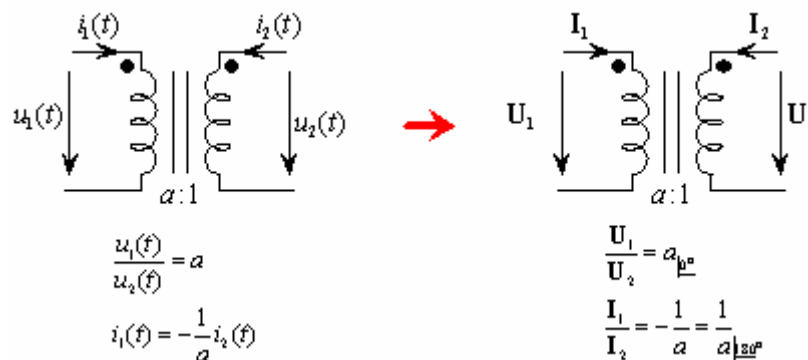
Si $\omega = 0 \Rightarrow Z_c = 0 \Rightarrow$ Cortocircuito.

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_c = \infty \Rightarrow$ Circuito abierto.

BOBINAS ACOPLADAS MAGNETICAMENTE



TRANSFORMADOR IDEAL



$$\frac{U_1}{U_2} = \alpha \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\alpha}$$

Por tanto, tendremos: $\varphi_{U_1} = \varphi_{U_2}$ $\varphi_{I_1} = \varphi_{I_2} + 180^\circ$

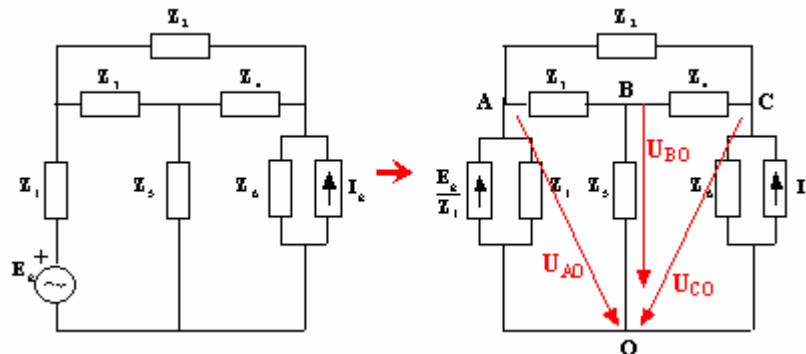
7.7. Métodos de análisis de circuitos en RES

Para analizar circuitos en *RES*, se transforma el circuito al campo complejo, lo que permitirá su solución mediante ecuaciones algebraicas.

Los pasos a seguir son:

- 1.- Convertir todas las fuentes de excitación a un solo tipo de onda, ya sea en forma seno o coseno.
- 2.- Convertir las fuentes reales a fuentes de intensidad o a fuentes de tensión, en función de si queremos analizar el circuito por nudos o por mallas respectivamente.

METODO DE ANÁLISIS POR NUDOS



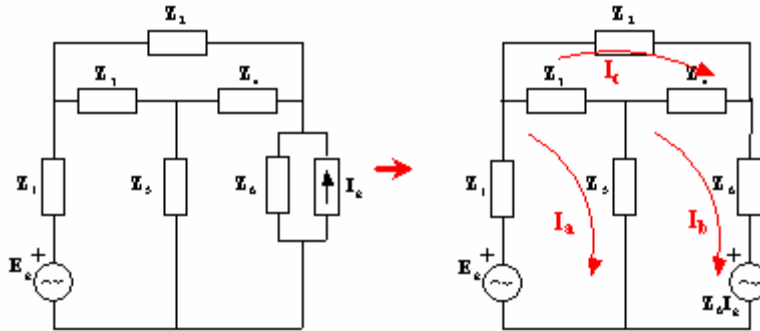
ΣI que llegan al nudo procedentes de fuentes = ΣI que salen por elementos pasivos.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_3} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_3} & \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_4} \\ -\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_4} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{AO} \\ U_{BO} \\ U_{CO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_g}{Z_1} \\ 0 \\ I_g \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Como las incógnitas son números complejos, la solución para cada una de ellas vendrá dada por su módulo y su argumento. Entonces, lo que tenemos que resolver es un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

Resuelto el circuito en el campo complejo hay que pasar las soluciones al dominio temporal.

METODO DE ANÁLISIS POR MALLAS

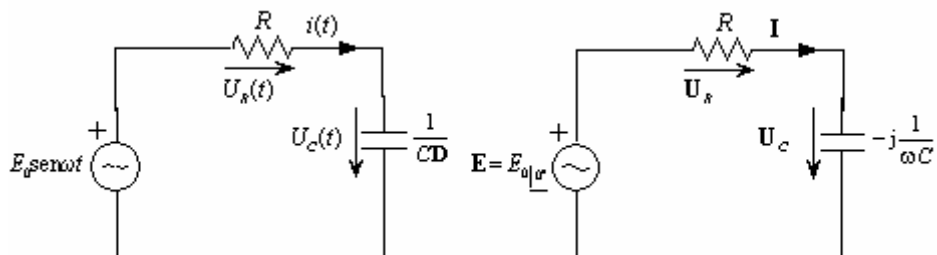


$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_5 & -Z_3 \\ -Z_5 & Z_4 + Z_5 + Z_6 & -Z_4 \\ -Z_3 & -Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g \\ -Z_6 I_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el caso de bobinas acopladas magnéticamente, se resuelve siempre por mallas y se recomienda no utilizar la escritura directa de las ecuaciones.

7.8. Análisis de circuitos básicos en RES

7.8.1. Circuito RC. El condensador en RES



Se toma la fuente de tensión como origen de fases.

Las ecuaciones serán:

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I} - j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C} \right) \mathbf{I} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

\mathbf{Z} depende de la frecuencia y, por tanto, también lo harán las variables del circuito.

$$\mathbf{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} \quad ; \quad \mathbf{Z} = Z \angle \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\omega RC} \right) \quad (\varphi < 0) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{E_0 \angle \varphi}{Z \angle \varphi} = \frac{E_0}{Z} \angle -\varphi$$

Tendremos entonces:

$$\mathbf{U}_R = R\mathbf{I} = \frac{RE_0}{Z} \angle -\varphi$$

$$\mathbf{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I} = \frac{E_0 / Z \angle -\varphi}{\omega C \angle 90^\circ} = \frac{E_0}{\omega Z C} \angle -\varphi - 90^\circ$$

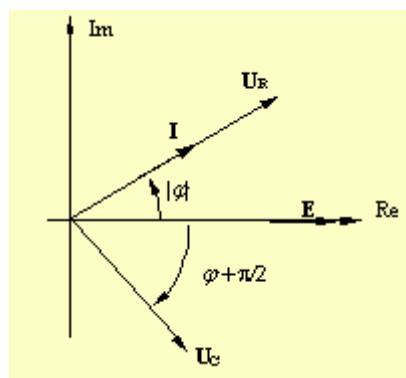
Pasando a expresiones temporales (y teniendo en cuenta que $\varphi < 0$):

$$i(t) = \frac{E_0}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = \frac{E_0 R}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$u_C(t) = \frac{E_0}{\omega Z C} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

\mathbf{U}_R está adelantada un ángulo φ respecto a la tensión de la fuente. \mathbf{U}_C está retrasada $\pi/2$ respecto a \mathbf{U}_R .

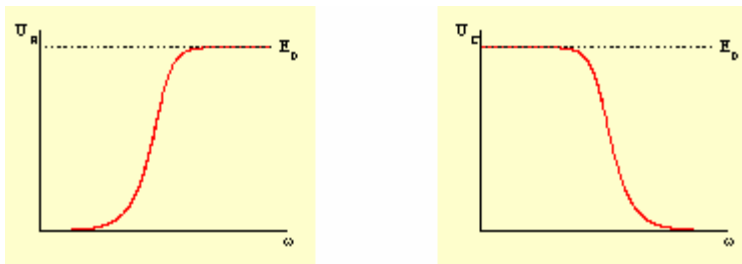


\mathbf{U}_R y \mathbf{U}_C dependen de la frecuencia, veamos como es dicha dependencia.

$$U_R = \frac{E_0 R}{Z} = \frac{E_0 R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow U_R = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_R = E_0 \end{cases}$$

$$U_C = \frac{E_0}{\omega C Z} = \frac{E_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow U_C = E_0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_C = 0 \end{cases}$$

Gráficamente.



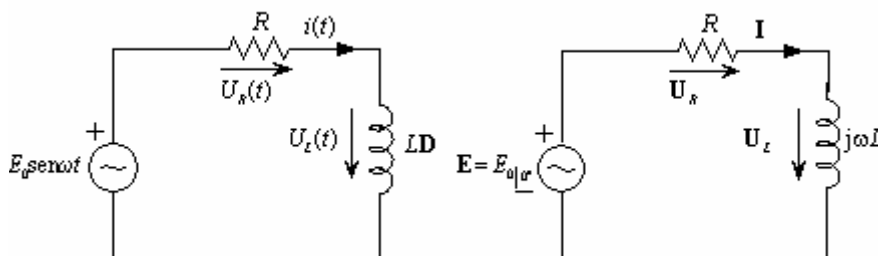
Si $\omega \rightarrow 0$, la tensión de la fuente cae en el condensador.

Si $\omega \rightarrow \infty$, la tensión de la fuente cae en la resistencia.

$$\mathbf{Z} = Z_{|_{\varphi}}$$

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ \omega \rightarrow \infty \rightarrow \varphi = 0 \end{cases} \text{ No habrá desfase entre } \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{I}$$

7.8.2. Circuito RL. La bobina en RES



Se toma la fuente de tensión como origen de fases.

Las ecuaciones serán:

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = (R + j\omega L)\mathbf{I} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

\mathbf{Z} depende de la frecuencia y, por tanto, también lo harán las variables del circuito.

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L \quad ; \quad \mathbf{Z} = Z \angle \varphi \quad \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (\varphi > 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{E_0 \angle \varphi}{Z \angle \varphi} = \frac{E_0}{Z} \angle -\varphi$$

Tendremos entonces:

$$\mathbf{U}_R = R\mathbf{I} = \frac{RE_0}{Z} \angle -\varphi$$

$$\mathbf{U}_L = j\omega L\mathbf{I} = \omega L \angle 90^\circ \frac{E_0}{Z} \angle -\varphi = \frac{E_0 \omega L}{Z} \angle 90^\circ - \varphi$$

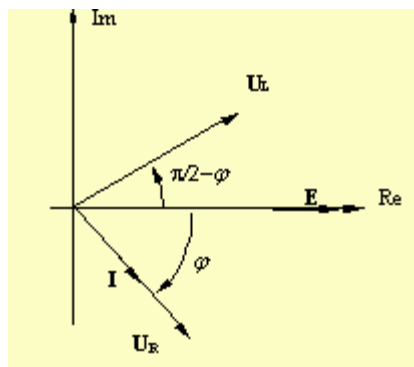
Pasando a expresiones temporales (y teniendo en cuenta que $\varphi > 0$):

$$i(t) = \frac{E_0}{Z} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = \frac{E_0 R}{Z} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$u_L(t) = \frac{E_0}{\omega Z C} \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

U_R está retrasada un ángulo φ respecto a la tensión de la fuente. U_L está adelantada $\pi/2$ respecto a U_R .

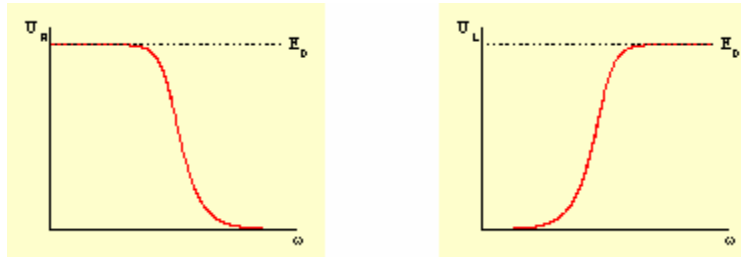


U_R y U_L dependen de la frecuencia, veamos como es dicha dependencia.

$$U_R = \frac{E_0 R}{Z} = \frac{E_0 R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow U_R = E_0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_R = 0 \end{cases}$$

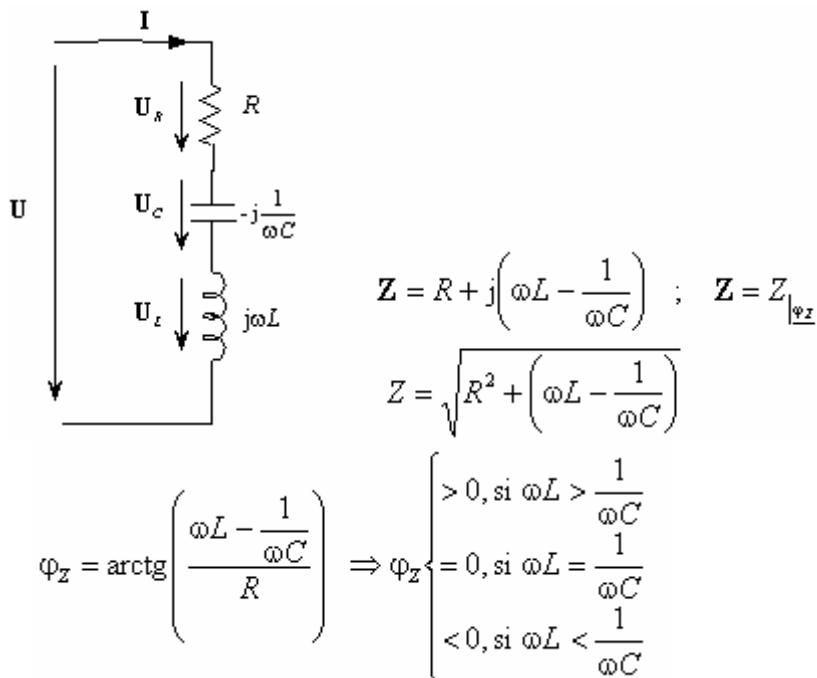
$$U_L = \frac{E_0 \omega L}{Z} = \frac{E_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow U_L = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_L = E_0 \end{cases}$$

Gráficamente:



Si $\omega \rightarrow 0$, la tensión de la fuente cae en la resistencia.
Si $\omega \rightarrow \infty$, la tensión de la fuente cae en la bobina.

7.8.3. Circuito RCL



$$U = ZI \Rightarrow \begin{cases} U = ZI \\ \varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I \Rightarrow \varphi_U - \varphi_I = \varphi_Z \end{cases}$$

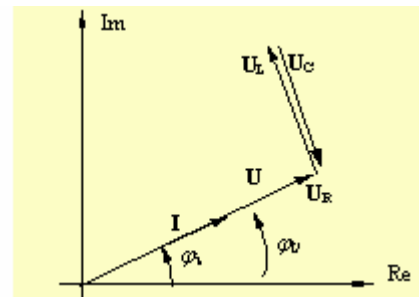
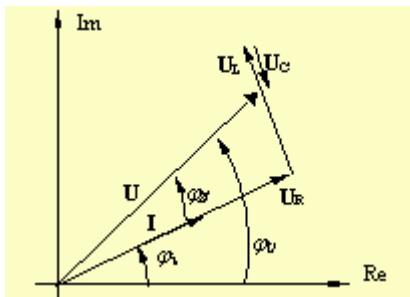
$$U = U_R + U_L + U_C$$

$$\varphi_U - \varphi_I = \begin{cases} > 0, \text{ si } \omega L > \frac{1}{\omega C} \rightarrow U \text{ adelanta a } I \\ = 0, \text{ si } \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow U \text{ en fase con } I \\ < 0, \text{ si } \omega L < \frac{1}{\omega C} \rightarrow U \text{ retrasa a } I \end{cases}$$

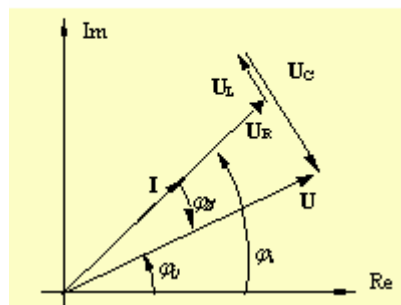
Gráficamente:

$\omega L > \frac{1}{\omega C}$, carácter inductivo

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$, carácter resistivo



$\omega L < \frac{1}{\omega C}$, carácter capacitivo



7.9. Teoremas en régimen estacionario senoidal

Para el régimen estacionario senoidal se aplican exactamente los mismos teoremas fundamentales de circuitos que se enunciaron en el capítulo 6.

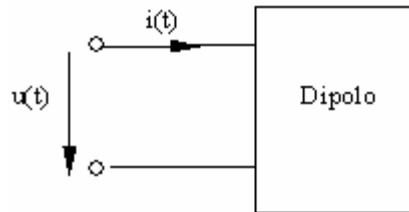
El único detalle digno de destacar está relacionado con el teorema de superposición:

Cuando en un circuito existen fuentes de excitación de distinta frecuencia, es IMPRESCINDIBLE aplicar el teorema de superposición para calcular las respuestas del circuito. El circuito se resolverá para cada una de las fuentes de excitación por separado (o para cada uno de los grupos de fuentes con igual frecuencia por separado), y el resultado será la suma de cada resultado parcial en el DOMINIO TEMPORAL (no en el campo complejo). Es importante recordar que las impedancias de los elementos pasivos varían con la frecuencia.

8. POTENCIA EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SENOIDAL

8.1. Introducción

En este tema se va a particularizar el estudio de la potencia y de la energía, al caso en que tanto la tensión, $u(t)$, como la intensidad, $i(t)$, son senoidales.



Con las referencias de la figura se define:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (1)$$

De modo que si en un determinado instante la potencia es positiva el dipolo es receptor, y si es negativa, el dipolo es generador.

8.2. Expresión general de la potencia instantánea en un dipolo

8.2.1. Potencia y energía en régimen estacionario senoidal

Sean:

$$u(t) = U \operatorname{sen} \omega t \quad (2)$$

$$i(t) = I \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

Sabemos que φ es el argumento de la impedancia del dipolo, es decir:

$$\varphi = \varphi_z = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) \quad (4)$$

La potencia instantánea será:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \quad (5)$$

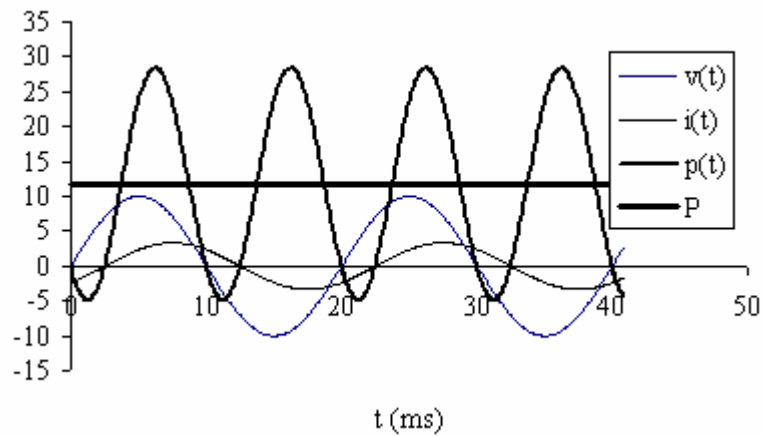
Para analizar esta expresión, vamos a utilizar la relación trigonométrica:

$$u(t) = U \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)] \quad (6)$$

la expresión de la potencia queda:

$$p(t) = \frac{1}{2} UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \quad (7)$$

Si representamos esta figura de forma gráfica, podemos observar lo siguiente:



- La potencia instantánea varía senoidalmente, a una frecuencia doble de la de la tensión de alimentación, alrededor del valor $U_{ef} I_{ef} \cos \varphi$
- Si la tensión o la intensidad son nulos, la potencia instantánea es cero.
- Si el argumento de la carga es distinto de cero, existen intervalos en los que la potencia es positiva y otros en los que es negativa

La potencia instantánea está formada por dos términos:

- 1) La potencia MEDIA o ACTIVA

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (8)$$

- 2) La potencia FLUCTUANTE

$$P_{fluctuante}(t) = U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t - \varphi) \quad (9)$$

La energía es la integral de la potencia, así que:

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^t p(t) dt = U_{ef} I_{ef} \int_0^t [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = \\ &= U_{ef} I_{ef} \left[t \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{2\omega} - \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2\omega} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

8.2.2 Particularización de las expresiones de potencia y energía para los elementos básicos

Partiendo de la expresión (5) que nos da la potencia instantánea absorbida por un dipolo, podemos hallar la particularizarla para cada uno de los elementos básicos.

Resistencia. ($\varphi=0$)

$$p(t) = UI \sin^2 \omega t = RI^2 \sin^2 \omega t = \frac{U^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (11)$$

La potencia media o activa y la energía será:

$$\bar{P} = U_{ef} I_{ef} = RI_{ef}^2 = \frac{U_{ef}^2}{R} \quad (12)$$

$$W(t) = \frac{U_{ef} I_{ef}}{R} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) = \frac{U_{ef} I_{ef}}{\omega R} \left(\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) \quad (13)$$

Condensador. ($\varphi=-\pi/2$)

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \sin(2\omega t) = U_{ef}^2 \omega C \sin(2\omega t) = \frac{I_{ef}^2}{\omega C} \sin(2\omega t) \quad (14)$$

La potencia media o activa y la energía serán:

$$\bar{P} = 0 \quad (15)$$

$$W(t) = CU_{ef}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} CU_{ef}^2 (1 - \cos(2\omega t)) \quad (16)$$

Podemos observar que, dado que la potencia media es cero, existe un intercambio continuo de energía entre la carga y la fuente.

Bobina. ($\varphi=\pi/2$)

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \sin(2\omega t) = I_{ef}^2 \omega L \sin(2\omega t) = \frac{U_{ef}^2}{\omega L} \sin(2\omega t) \quad (17)$$

La potencia media o activa y la energía serán:

$$\bar{P} = 0 \quad (18)$$

$$W(t) = LI_{ef}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} LI_{ef}^2 (1 - \cos(2\omega t)) \quad (19)$$

Como ocurría para el condensador, dado que la potencia media es cero, existe un intercambio continuo de energía entre la carga y la fuente.

8.3 Expresión de la potencia en el campo complejo

La impedancia, en general, se representa mediante la expresión:

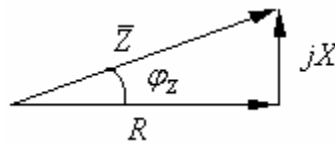
$$\bar{Z} = R + jX \quad (20)$$

donde la parte real R es la parte resistiva y X es la parte reactiva. A partir de esa expresión se obtiene:

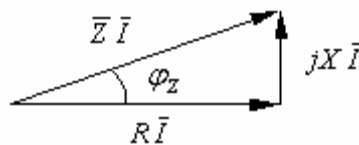
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (21)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} \quad (22)$$

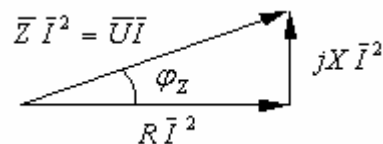
Gráficamente, podemos representar esa impedancia formando el denominado triángulo de impedancias.



Si consideramos que la intensidad tiene módulo I y argumento 0, y multiplicamos todos los lados del triángulo por dicha intensidad, se obtiene el triángulo de tensiones.



Y si volvemos a multiplicar por I, obtenemos el triángulo de potencias. En dicho triángulo se pueden distinguir cuatro potencias:

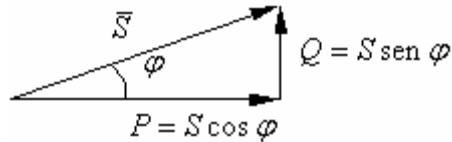


P: Potencia Activa [Vatios (W)]

Q: Potencia Reactiva [Voltamperios reactivos (VAr)]

S: Potencia Aparente [Voltamperios (VA)]

S: Potencia Compleja [Vatios (W)+j Voltamperios reactivos (VAr)]



La potencia compleja puede obtenerse a partir de la tensión y la intensidad como:

$$\bar{S} = \bar{U}\bar{I}^* = UI \cos \varphi - j UI \sin \varphi = P + jQ \quad (23)$$

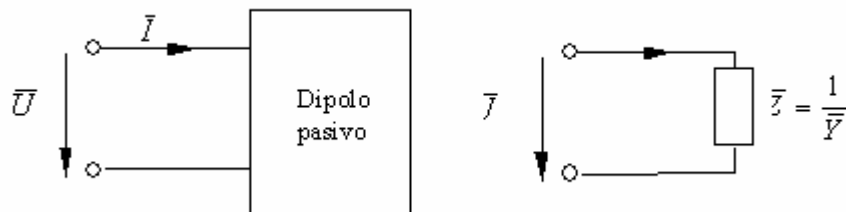
y la potencia aparente es el módulo de la potencia compleja.

Con las referencias que se han adoptado, los signos de las potencias activa y reactiva indican:

Potencia activa positiva	El dipolo absorbe potencia (receptor)
Potencia activa negativa	El dipolo cede potencia (generador)
Potencia reactiva positiva	El dipolo absorbe potencia reactiva
Potencia reactiva negativa	El dipolo cede potencia reactiva

Comportamiento de las cargas en función de P y Q

Dipolo pasivo



Un dipolo pasivo es aquel que no posee fuente de tensión o intensidad y que, por lo tanto, puede representarse mediante una impedancia. En este caso, la potencia compleja será:

$$\bar{S} = \bar{U}\bar{I}^* = \bar{Z}\bar{I}\bar{I}^* = \bar{Z}I^2 = (R + jX)I^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ \quad (24)$$

y, por tanto, las expresiones de la potencia activa y reactiva serán:

$$P = RI^2 \quad (25)$$

$$Q = XI^2 \quad (26)$$

Si particularizamos a los tres elementos básicos, tenemos:

Resistencia

$$\bar{Z} = R \quad P = RI^2 = \frac{U^2}{R} > 0$$

$$Q = 0$$

Siempre absorbe potencia activa y no intercambia potencia reactiva.

Bobina

$$\bar{Z} = jX = -j\omega L \quad P = 0$$

$$Q = \omega LI^2 = \frac{U^2}{\omega L}$$

No intercambia potencia activa y absorbe potencia reactiva.

Condensador

$$\bar{Z} = jX = -j\frac{1}{\omega C} \quad P = 0$$

$$Q = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega C U^2$$

No intercambia potencia activa y cede potencia reactiva.

Para un dipolo cualquiera tendremos

$$P = UI \cos(\varphi_U - \varphi_I) = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin(\varphi_U - \varphi_I) = UI \sin \varphi \quad (27)$$

Si el dipolo es pasivo, la potencia activa es siempre positiva, ya que el argumento estará ente $\pi/2$ y $-\pi/2$, y el coseno será positivo (si el coseno es negativo, el dipolo está cediendo energía y por tanto se trata de un generador).

Si el argumento del dipolo es positivo, la potencia reactiva es positiva y, por tanto, el dipolo tiene carácter inductivo. Si el argumento del dipolo es negativo, la potencia reactiva es negativa y el dipolo tiene carácter capacitivo.

8.4 Teorema de Boucherot

En un circuito excitado por fuentes senoidales de la misma pulsación, en régimen estacionario senoidal, se verifica, de forma independiente, la conservación de la potencia activa y de la potencia reactiva. Es decir, se verifica:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{K=1}^n P_K = 0 \\ \sum_{K=1}^n S_K = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{K=1}^n \overline{S}_K = 0 \quad (28)$$

8.5 Factor de potencia

8.5.1 Definición del factor de potencia

Tal y como hemos visto anteriormente, la potencia activa absorbida por un dipolo es:

$$P = UI \cos(\varphi_V - \varphi_I) = UI \cos \varphi \quad (29)$$

de modo que, si el dipolo es pasivo, φ es el argumento de la impedancia.

Se denomina factor de potencia a la expresión $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (30)$$

8.5.2 Importancia del factor de potencia

Sea una estación generadora de 10 kVA. Si la tensión es de 100 voltios, la intensidad es de 100 A. Suponemos que esta central alimenta a un consumidor que demanda 1 kW de potencia activa y que lo hace con un factor de potencia unidad. Entonces:

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1000}{100} = 10A$$

Como máximo, la estación generadora puede proporcionar 100 A, y estamos demandando 10, así que podemos conectar otros receptores ya que disponemos de otros 90 A.

Supongamos ahora que el receptor demanda un kilovatio, pero ahora con un factor de potencia 0,1.

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1000}{100 \cdot 0.1} = 100 A$$

Por tanto, sólo podríamos alimentar este receptor. Es decir, cuanto menor es el factor de potencia, menor es el aprovechamiento de la instalación.

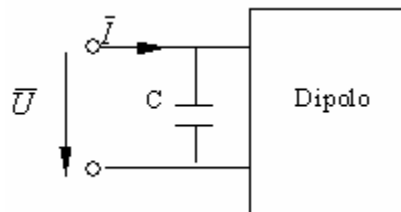
Además, cuanto menor es el factor de potencia, mayor es la corriente que circula por la línea y, por tanto, aumentan las pérdidas. Por ello las compañías eléctricas penalizan el consumo de energía reactiva y es recomendable mejorar el factor de potencia utilizando condensadores.

En los sistemas de generación, transporte y distribución de energía eléctrica: La tensión determina el aislamiento

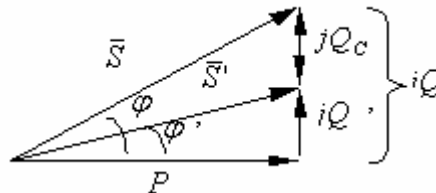
La intensidad determina la sección de los conductores y la pérdida por efecto Joule.

8.5.2 Compensación del factor de potencia

Para compensar el factor de potencia de un dipolo se coloca un condensador en paralelo con él, ya que el condensador no consume potencia activa y suministra reactiva.



Si antes de conectar el condensador teníamos un factor de potencia $\cos \varphi$ y deseamos pasar a $\cos \varphi'$, la capacidad del condensador a colocar en paralelo será:



$$\left. \begin{array}{l} Q = P \operatorname{tg} \varphi \\ Q' = P \operatorname{tg} \varphi' \end{array} \right\} \Rightarrow Q_c = Q - Q' = P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = \omega C U^2$$

$$C = \frac{P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{\omega U^2}$$

(31)

Si queremos obtener factor de potencia unidad:

$$C = \frac{P \operatorname{tg} \varphi}{\omega U^2} \quad (32)$$

8.6 Teorema de la máxima transferencia de potencia

Dado un dipolo activo, que se caracteriza mediante su equivalente Thevenin, este teorema determina el valor de la impedancia que, conectada en bornes de dicho dipolo, absorbe la máxima potencia activa.

Supongamos que la impedancia de la fuente tiene la expresión

$$\bar{Z}_0 = R_0 + jX_0$$

y que estamos alimentando una carga de impedancia

$$\bar{Z} = R + jX$$

En estas condiciones, la intensidad absorbida por la carga es:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_0}{(R_0 + R) + j(X_0 + X)}$$

Y, por tanto, la potencia es la siguiente función de R y X:

$$P = RI^2 = R \frac{U_0^2}{(R_0 + R)^2 + j(X_0 + X)^2}$$

El siguiente paso es determinar R y X para lograr que la potencia transferida a la carga sea máxima. Para ello primero derivamos respecto a X e igualamos a 0.

$$\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{R=cte} = -R \frac{U_0^2}{[(R_0 + R)^2 + j(X_0 + X)^2]^2} 2(X_0 + X) = 0$$

$$X = -X_0$$

En estas condiciones, la potencia absorbida es:

$$P = R \frac{U_0^2}{(R_0 + R)^2}$$

Derivando nuevamente, esta vez respecto a R, e igualando a cero, obtendremos la resistencia que maximiza la transferencia de potencia.

$$\left. \frac{\partial P}{\partial R} \right|_{x=x_0=cte} = \frac{U_0^2 (R_0 + R)^2 - 2RU_0^2 (R_0 + R)}{(R_0 + R)^4} = 0$$

$$R = R_0$$

Así pues, para lograr la máxima transferencia de potencia, la impedancia de carga debe ser la conjugada de la impedancia de la fuente.

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0^* \quad (33)$$

Si la carga es puramente resistiva, es decir, no tiene parte imaginaria, puede demostrarse que la máxima transferencia de potencia se produce para

$$R = Z_0 \quad (34)$$

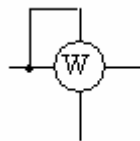
En distribuciones de energía eléctrica no es deseable la condición de máxima transferencia de potencia, ya que el rendimiento se reduce al 50 %

$$\eta = \frac{\text{Potencia recibida por la carga}}{\text{Potencia suministrada por la fuente}}$$

Si será deseable cumplir la condición de máxima transferencia de potencia, por ejemplo, si se desea la recepción de una señal de comunicación.

8.7 Medida de potencias

La media de potencia se realiza mediante unos aparatos denominados vatímetros. Constan de dos bobinas, una que mide la intensidad que entra en el dipolo y otra que mide la tensión en bornes del mismo.



Estas bobinas tienen un límite de medida que se denomina alcance, y el alcance del voltímetro es el producto de ambos.

Alcance vatímetro = Alcance voltios x Alcance amperios

El instrumento para medir potencias reactivas se denomina varímetro.

9. SISTEMAS TRIFÁSICOS

9.1. Introducción.

Las centrales eléctricas generan energía eléctrica a tensiones medias (aproximadamente entre 15 y 25 kV). Para transportar esta energía hasta los centros de consumo, situado normalmente a grandes distancias, es necesario hacerlo con las menores pérdidas posibles. Como las pérdidas P son proporcionales a la intensidad ($P = RI^2$), y para una potencia dada la forma de disminuir la intensidad que circula por la línea es aumentar la tensión. Por tanto, la tensión es elevada a la salida de la central utilizando transformadores, y transportada hasta los centros de consumo mediante líneas de transporte cuyas tensiones de funcionamiento son: 380 kV, 220 kV, 132 kV, y 110 kV.

Los niveles de tensión son reducidos al llegar a los grandes puntos de consumo, siendo distribuidos localmente mediante redes de distribución (3, 6, 10, 15, 20, 30, 45, y 66 kV).

En la actualidad, la práctica totalidad de la generación, transporte y distribución de la energía eléctrica se efectúa a través de sistemas trifásicos, cuyas principales ventajas respecto a los monofásicos son las siguientes:

Generación:

- Reducción del tamaño de los generadores, aumentando su eficacia y rendimiento.

Transporte y distribución:

- Ahorro del 25% del cobre o aluminio utilizado.
- Reducción del tamaño de los transformadores.
- Reducción del contenido en armónicos.

Asimismo, respecto a su utilización, permite la reducción en el tamaño de las máquinas eléctricas mejorando, como en el caso de los generadores, eficacia y rendimiento.

La energía eléctrica es generada a 50 Hz (60 Hz en América) en forma de corriente alterna. La elección de frecuencias bajas en los procesos de transmisión en las líneas de potencia corresponde fundamentalmente a que la corriente tiende a fluir superficialmente conforme aumenta la frecuencia, resultando una resistencia efectiva mayor (efecto pelicular o skin). Igualmente, el comportamiento capacitivo de la línea es mayor al incrementar la frecuencia. De hecho, estos dos fenómenos no aparecen en corriente continua, constituyendo alguna de las razones por las que ocasionalmente se utiliza este tipo de transmisión. Aunque conviene aclarar que la transmisión en continua presenta graves inconvenientes como es la inexistencia de un interruptor de potencia en corriente continua, o la generación de armónicos en el proceso de rectificación a corriente alterna incidiendo gravemente en los sistemas de 50 o 60 Hz.

9.2. Sistema trifásico: Generación.

Por las razones expuestas, en la práctica son mucho más utilizadas las corrientes polifásicas o n-fásicas que las monofásicas. Estas consisten en varias (n) corrientes monofásicas, de igual valor eficaz y de igual frecuencia, aunque con distinta fase siendo

este ángulo de fase $2\pi/n$. El sistema de corrientes polifásicas más comúnmente utilizado es el de 3 fases o sistema trifásico.

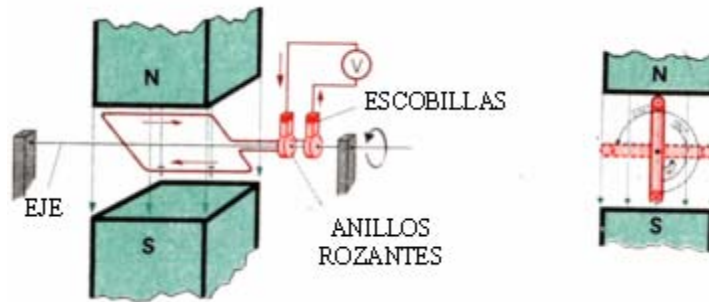


Figura 1. Espira girando en un campo magnético.

Para un mejor entendimiento de la generación trifásica, conviene previamente recordar los fundamentos de la generación monofásica.

De acuerdo con la ley de inducción de Faraday, en una espira situada en un campo magnético y girando a una velocidad ω (rad/s) se induce una f.e.m. (fuerza electromotriz) dada por

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})}{dt}$$

donde \mathbf{B} es el vector inducción magnética orientado de S a N, \mathbf{S} es el vector normal a la espira cuyo módulo es igual al área de la espira, y θ es el ángulo entre \mathbf{B} y \mathbf{S} . De esta forma, el producto escalar es

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot S \cdot \cos\theta$$

El ángulo θ entre \mathbf{B} y \mathbf{S} en un instante t es dependiente del ángulo inicial φ entre \mathbf{B} y \mathbf{S} , y de la velocidad de giro ω

$$\theta = \omega \cdot t + \varphi$$

por tanto, la diferencia de potencial entre los extremos de la espira es

$$e = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

que puede igualmente expresarse como

$$e = E_m \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

siendo $\omega = 2\pi f$.

Un generador trifásico está normalmente constituido por un rotor (parte móvil) de polos salientes que actúa como electroimán y cuyos polos están distribuidos según está indicado en la Figura 2. En el estator (parte fija) se alojan tres devanados iguales formando 120° entre si. Al girar el rotor por la acción de una fuerza mecánica externa (p.e. la extraída de una turbina de agua o de gas), se induce en cada bobina o fase una tensión. Cuando este conjunto de tensiones

es de igual frecuencia e igual amplitud V , y desfasadas entre si 120° el **sistema de tensiones** resultante es **equilibrado**:

$$v_1(t) = V \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$v_2(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_3(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

En la práctica, podemos considerar que las tensiones proporcionadas a la red por un generador son equilibradas.

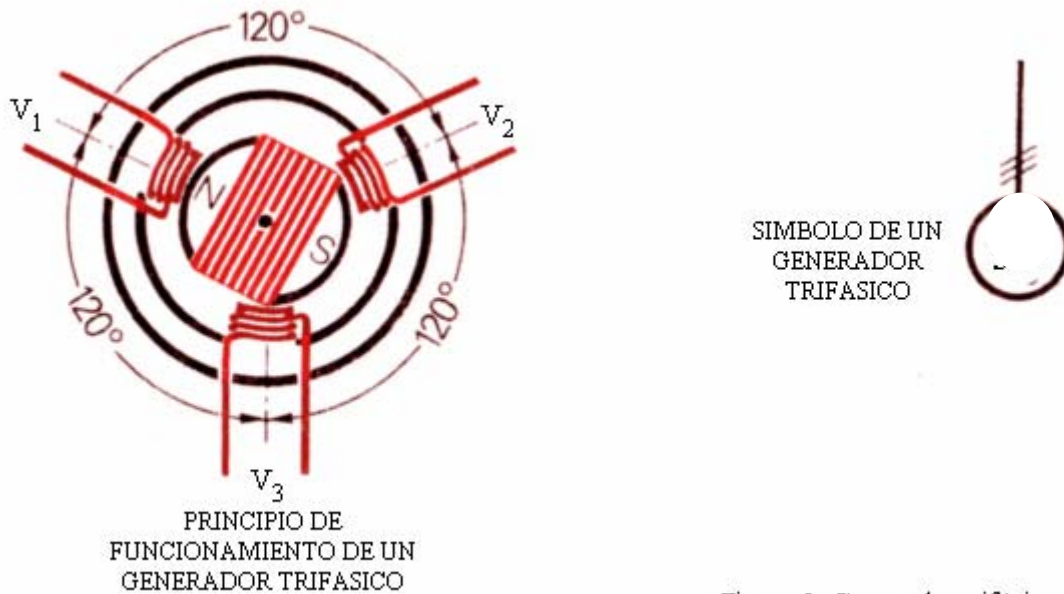
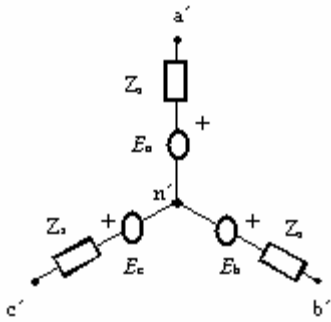


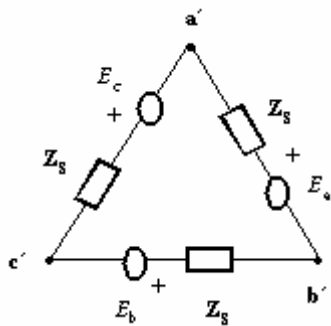
Figura 2. Generador trifásico.

Como hemos visto, un generador trifásico puede ser entendido como un conjunto de 3 generadores independientes. De acuerdo con el teorema de Thévenin, cada espira puede ser representada como una fuente ideal de tensión en serie con una impedancia que llamaremos interna, y cuyo carácter es inductivo. En la práctica las formas de conectar las fuentes de cada fase son las siguientes:

- **Conexión en estrella (Y)** : las salidas de las bobinas están conectadas a un punto común denominado neutro (n) de la estrella.



- **Conexión en triángulo (Δ):** la conexión de las bobinas es en serie, es decir la salida de una bobina está conectada a la entrada de la siguiente.



Igualmente las cargas utilizadas en los sistemas trifásicos pueden estar conectados en estrella (Y) o en triángulo (Δ). Cuando las impedancias de cada fase son iguales entre sí la carga es equilibrada.

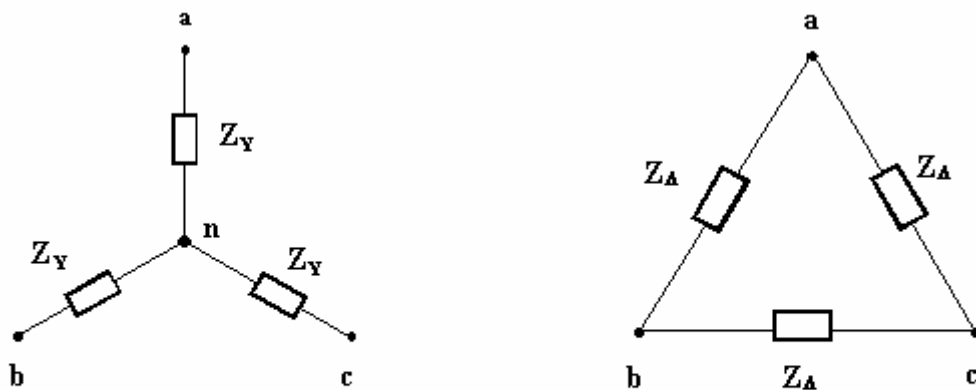


Figura 3: Conexiones en una carga trifásica: en estrella (Y), y en triángulo (Δ).

La conexión entre generador y cargas se realiza mediante líneas, y lo mismo que en los casos anteriores, la línea trifásica es equilibrada cuando las tres impedancias que la componen son iguales.

La conexión del generador y de la carga son independientes, por tanto existen cuatro posibles conexiones recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1: Posibles conexiones generador–carga.

Conexión del generador	Conexión de la carga
Estrella	Estrella
Estrella	Triángulo
Triángulo	Estrella
Triángulo	Triángulo

9.3. Tensión y corriente en circuitos trifásicos equilibrados.

Generalmente los generadores trifásicos alimentan cargas equilibradas, que por definición tienen impedancias idénticas en las tres fases. Por supuesto, en muchas aplicaciones (alumbrado, viviendas, ...) las cargas son monofásicas, aunque el diseño de tales sistemas de distribución es realizado de forma que las fases resulten aproximadamente equilibradas.

9.3.1. Secuencia de fases.

El orden en el que se suceden las tensiones (o intensidades) determina la secuencia de fases. Recordando que los vectores asociados a estas tensiones giran con velocidad angular ω en sentido levógiro (sentido contrario al de las agujas de un reloj), aunque su representación corresponde a un instante determinado, podemos decir que en la Figura 1a las fases se suceden según una secuencia **a-b-c**, lo que se conoce como secuencia directa. Análogamente, cuando las fases se suceden en sentido **c-b-a** tenemos la denominada secuencia inversa (Figura 1b).

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, el orden de la sucesión de fases puede dar origen a campos rotativos de un sentido u otro, en un sistema en el que desconocemos su secuencia de fases es precisa su determinación experimental, para lo cual existen en el mercado, indicadores de secuencias de fases.

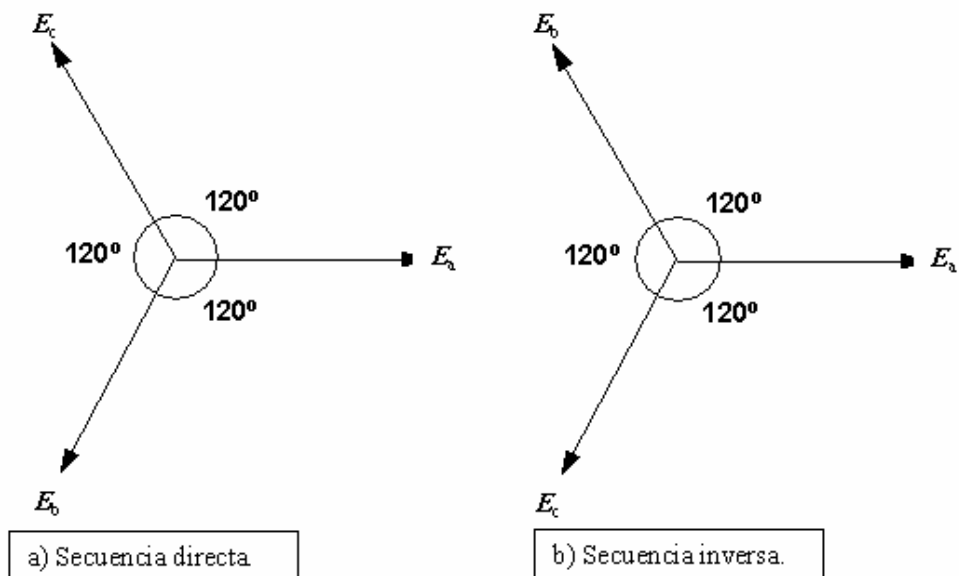


Figura 1. Secuencias de fases directa e inversa para un sistema de tensiones trifásico.

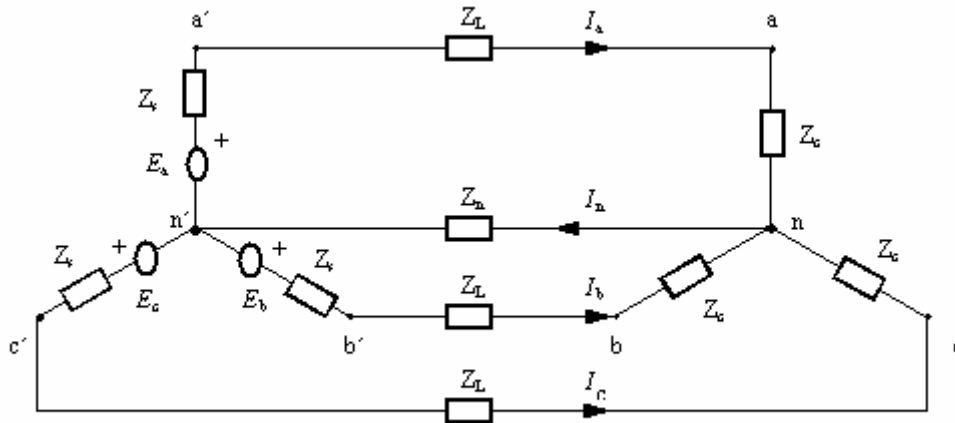


Figura 2. Conexión estrella-estrella.

9.3.2. Conexión estrella-estrella.

En el circuito de la Figura 2 se representa un generador en estrella (Y), cuyos terminales a'-b'-c' están conectados a una carga equilibrada cuya configuración también es en Y, y donde Z_s es la impedancia interna del generador por fase mientras que Z_c es la impedancia de carga por fase, y Z_L la impedancia de línea.

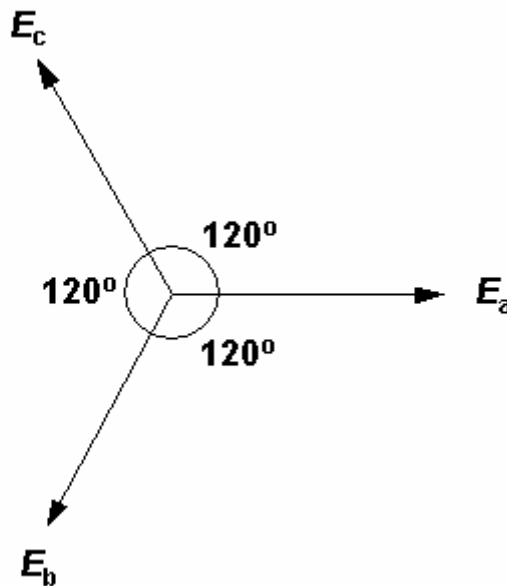


Figura 3. Diagrama fasorial de las f.e.m. inducidas en un generador trifásico.

Las tensiones E_a , E_b , y E_c constituyen un conjunto de vectores equilibrados de secuencia directa (secuencia abc), es decir son tres vectores de igual amplitud y desfasados entre sí 120° como vemos en la Figura 3, y cuya expresión en notación simbólica es

$$E_a = E_0 \angle 0$$

$$E_b = E_0 \angle -120$$

$$E_c = E_0 \angle 120$$

correspondiendo a los valores instantáneos

$$e_a(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

$$e_b(t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_c(t) = E_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

siendo su representación gráfica la mostrada en

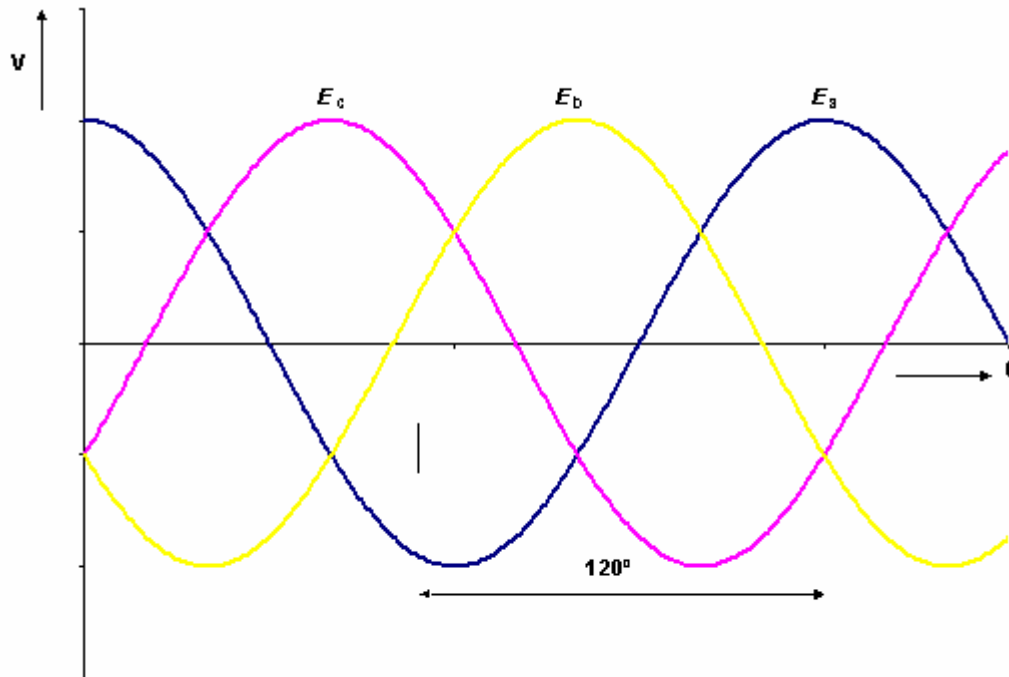


Figura 4. Valores instantáneos de las tensiones E_a , E_b , E_c .

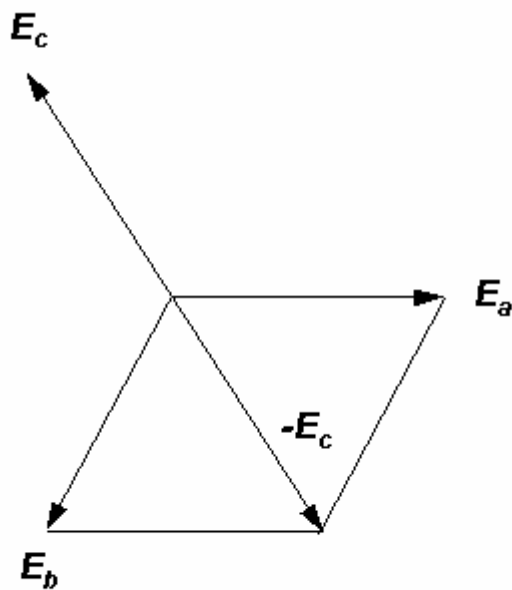


Figura 5. La suma de tensiones en un sistema equilibrado es cero.

A partir del diagrama fasorial Figura 5 correspondiente a las f.e.m. de un sistema equilibrado encontramos que la suma de las tensiones E_a , E_b , y E_c es nula

$$E_a + E_b + E_c = 0 \quad (3)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a los lazos básicos formados por cada fase y el hilo neutro (n-n') de la figura 1 encontramos las siguientes ecuaciones circulares

$$\begin{aligned} E_a &= I_a \cdot (Z_s + Z_L + Z_c) + (I_a + I_b + I_c) \cdot Z_n \\ E_b &= I_b \cdot (Z_s + Z_L + Z_c) + (I_a + I_b + I_c) \cdot Z_n \\ E_c &= I_c \cdot (Z_s + Z_L + Z_c) + (I_a + I_b + I_c) \cdot Z_n \end{aligned} \quad (4)$$

cuya suma, teniendo en cuenta la ecuación (3) es cero y por tanto para cualquier valor de Z_n tenemos que

$$I_a + I_b + I_c = I_n = 0 \quad (5)$$

incluso cuando no existe hilo neutro ($Z_n = \infty$). Además, como consecuencia de este hecho obtenemos que los neutros del generador (n) y de la carga (n') están al mismo potencial

$$V_{nn'} = 0 = (I_a + I_b + I_c) \cdot Z_n = I_n \cdot Z_n \quad (6)$$

Aplicando este resultado a las ecuaciones 4 tenemos

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{E_a}{Z_s + Z_L + Z_c} = \frac{V_{an}}{Z_c} \\ I_b &= \frac{E_b}{Z_s + Z_L + Z_c} = \frac{V_{bn}}{Z_c} \\ I_c &= \frac{E_c}{Z_s + Z_L + Z_c} = \frac{V_{cn}}{Z_c} \end{aligned} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta estas ecuaciones y que E_a , E_b , y E_c constituyen un conjunto de vectores iguales en modulo y desfasados 120° entre sí, vemos que las corrientes forman también un sistema de vectores equilibrados cuya representación es la dada en la Figura 6. La conclusión es igualmente válida para las tensiones de fase V_{an} , V_{bn} y V_{cn} .

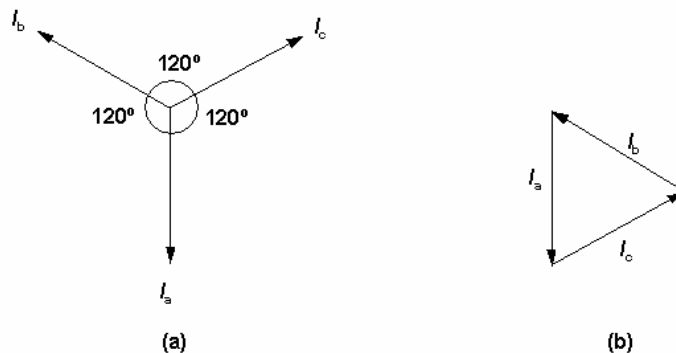


Figura 6. Diagrama vectorial de las intensidades en una carga equilibrada: (a) dibujadas desde un punto común, (b) formando un triángulo cerrado.

Por otra parte, las ecuaciones dadas por (7) sugieren el circuito equivalente representado en la Figura 7, puesto que permite deducir el mismo resultado. Se trata de un circuito monofásico equivalente constituido por los elementos de una sola fase, muy utilizado en la práctica por la simplicidad del mismo.

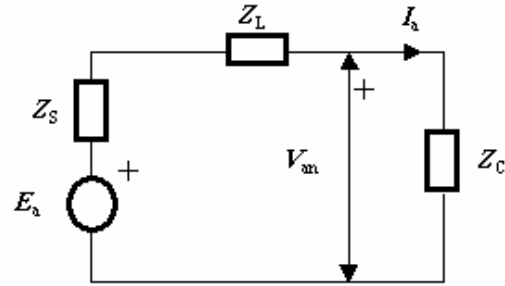


Figura 7. Circuito equivalente monofásico de un circuito trifásico Y-Y equilibrado.

9.3.3. Relación entre valores de fase y de línea.

Considerando de nuevo el circuito de la Figura 2, o bien directamente a partir de la Figura 7, en el generador las tensiones de fase a neutro son

$$\begin{aligned} V_{an} &= E_a - I_a \cdot Z_s \\ V_{bn} &= E_b - I_b \cdot Z_s \\ V_{cn} &= E_c - I_c \cdot Z_s \end{aligned} \quad (8)$$

y en la carga quedan definidas como

$$\begin{aligned} V_{an} &= I_a \cdot Z_c \\ V_{bn} &= I_b \cdot Z_c \\ V_{cn} &= I_c \cdot Z_c \end{aligned} \quad (9)$$

que en el caso de ser nula la impedancia de línea Z_L son iguales. Las tensiones de línea V_{ab} , V_{bc} y V_{ca} están relacionadas con las de fase en la forma siguiente

$$V_{ab} = V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \quad (10)$$

considerando además el diagrama vectorial de la Figura 8 obtenemos directamente la expresión de V_{ab} en función de la de fase V_{an} . Como V_{an} y V_{nb} son de igual módulo, y entre ellos hay un desfase de 60° , la tensión de línea V_{ab} es un vector que adelanta en 30° a V_{an} siendo su módulo

$$V_{ab} = 2 \cdot V_{an} \cdot \cos 30 = \sqrt{3} \cdot V_{an} \quad (11)$$

resultando finalmente

$$V_{ab} = \sqrt{3} \cdot V_{an} \angle 30^\circ \quad (12)$$

y análogamente para el resto de tensiones de fase

$$\begin{aligned} V_{bc} &= \sqrt{3} \cdot V_{bn} \angle 30^\circ \\ V_{ca} &= \sqrt{3} \cdot V_{cn} \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (13)$$

Respecto a las intensidades, en una conexión Y-Y las corrientes de línea y de fase son iguales.

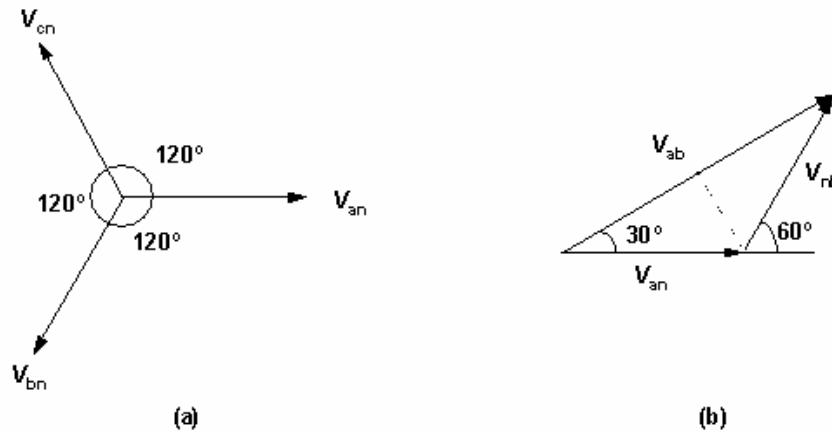


Figura 8. (a) Diagrama vectorial de las tensiones de fase. (b) Relación entre las tensiones de fase y de línea.

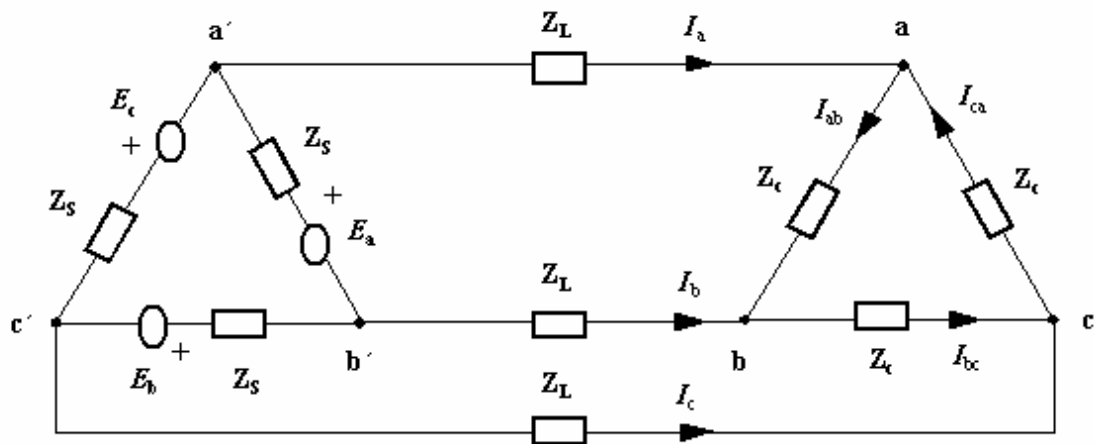


Figura 9. Conexión triángulo-triángulo.

9.3.4. Conexión triángulo-triángulo.

En una conexión Δ - Δ como la indicada en la Figura 9, las tensiones de fase y línea son coincidentes. Centrando nuestra atención sobre la carga, y considerando que las tensiones aplicadas sobre la misma constituyen un conjunto de vectores equilibrados, lo mismo que las intensidades de línea y de fase cuya relación es

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ab} - I_{ca} \\ I_b &= I_{bc} - I_{ab} \\ I_c &= I_{ca} - I_{bc} \end{aligned} \quad (14)$$

considerando además el diagrama vectorial de la Figura 10 deducimos que

$$\begin{aligned}
 I_a &= \sqrt{3} \cdot I_{ab} \underline{-30} \\
 I_b &= \sqrt{3} \cdot I_{bc} \underline{-30} \\
 I_c &= \sqrt{3} \cdot I_{ca} \underline{-30}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

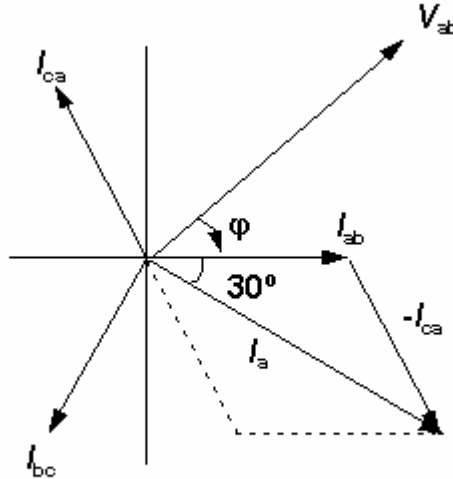


Figura 10. La intensidad de línea retrasa 30° respecto de la de fase.

respecto al generador, si la conexión del mismo es en Δ , las relaciones obtenidas son igualmente válidas, es decir

$$\begin{aligned}
 -I_a &= \sqrt{3} \cdot I_{ab} \underline{-30} \\
 -I_b &= \sqrt{3} \cdot I_{bc} \underline{-30} \\
 -I_c &= \sqrt{3} \cdot I_{ca} \underline{-30}
 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
 I_{ab} &= I_{b'a'} \\
 I_{bc} &= I_{c'b'} \\
 I_{ca} &= I_{a'c'}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

resultados fácilmente deducibles a partir de los diagramas vectoriales en las cargas y en los generadores. cumpliéndose, al ser equilibrado el sistema.

Para la deducción del circuito monofásico equivalente de la conexión Δ - Δ consideramos la malla a' - a - b - b' - a' , donde se verifica

$$\begin{aligned}
 E_a &= Z_s I_{b'a'} + Z_L I_a + Z_c I_{ab} - Z_L I_b = \\
 &= (Z_s + Z_c) I_{ab} + Z_L \sqrt{3} I_{ab} \underline{-30} - Z_L \sqrt{3} I_{ab} \underline{-150} \\
 &= (Z_s + Z_c) I_{ab} + Z_L \sqrt{3} I_{ab} \cdot (1 \underline{-30} - 1 \underline{-150})
 \end{aligned}$$

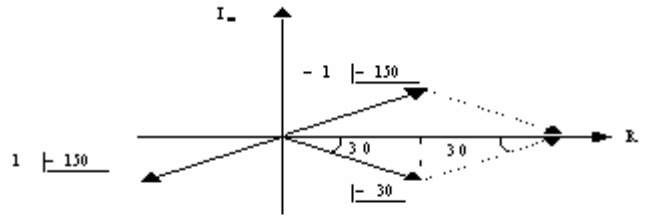


Figura 11. Diagrama vectorial.

además, a partir de la Figura 11 vemos que

$$(1 \angle -30^\circ - 1 \angle -150^\circ) = 2 \cdot \cos 30 = \sqrt{3} \quad (17)$$

resultando por tanto

$$E_a = (Z_s + Z_c + 3Z_L)I_{ab} \quad (18)$$

resultado que es igualmente deducible a partir del circuito de la Figura 12, que constituye el circuito monofásico equivalente de un circuito trifásico triángulo-triángulo equilibrado.

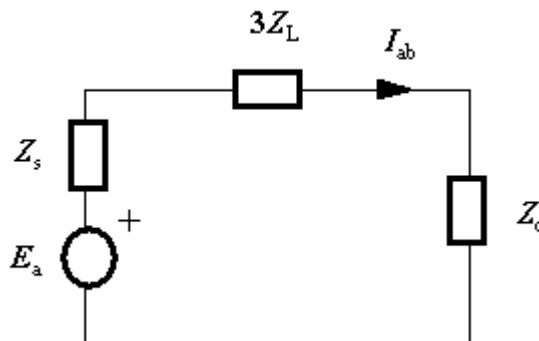


Figura 12. Circuito equivalente monofásico de un circuito trifásico Δ - Δ equilibrado.

9.3.5. Otras conexiones.

Cuando la conexión es Δ -Y o Y- Δ , resolvemos transformando la carga y reduciendo, como en los casos anteriores, a sus equivalentes monofásicos, aunque también sería posible la transformación de configuración del generador. Para la conversión de las cargas empleamos las relaciones conocidas de la teoría básica de circuitos, que en el caso de sistemas trifásicos equilibrados se limitan a

$$Z_{\Delta} = 3 \cdot Z_Y \quad (19)$$

En el caso de tener una carga trifásica desequilibrada como la representada en la Figura 13, las ecuaciones de transformación son:

- **Transformación de estrella a triángulo**

$$\begin{aligned}
Z_{12} &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\
Z_{13} &= Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\
Z_{23} &= Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}
\end{aligned}
\tag{20}$$

▪ **Transformación de triángulo a estrella**

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \\
Z_2 &= \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \\
Z_3 &= \frac{Z_{23} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}
\end{aligned}
\tag{21}$$

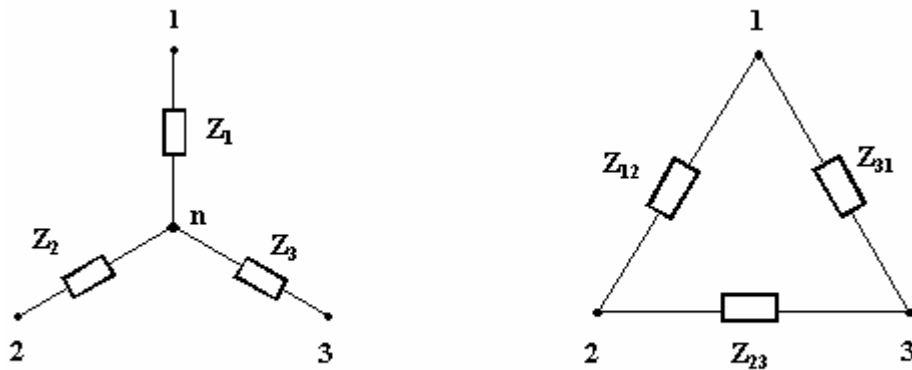


Figura 13. Carga trifásica desequilibrada: configuraciones en Y y en Δ.

9.4. Potencia en circuitos trifásicos equilibrados.

En un sistema trifásico equilibrado la potencia activa P cedida por un generador trifásico, o la absorbida por una carga es el triple de la potencia correspondiente a cada fase. Llamando V_f al modulo de las tensiones de fase

$$V_f = V_{an} = V_{bn} = V_{cn} \tag{1}$$

e I_f al modulo de las corrientes de fase

$$I_f = I_{an} = I_{bn} = I_{cn} \tag{2}$$

tenemos que la potencia trifásica es la suma de las potencias consumidas en cada fase

$$P = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi \tag{3}$$

donde φ es la diferencia de fase entre los vectores V_f e I_f , esto es el argumento de la impedancia de fase.

Considerando las relaciones deducidas previamente entre las tensiones y corrientes de fase con las de línea (V_L , I_L).

$$\text{Sistema Y-Y: } \begin{cases} V_L = \sqrt{3} \cdot V_f \\ I_L = I_f \end{cases} \quad \text{Sistema } \Delta\text{-}\Delta: \begin{cases} V_L = V_f \\ I_L = \sqrt{3} \cdot I_f \end{cases}$$

y sustituyendo en $S = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$, encontramos que cualquiera que sea la conexión

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

Análogamente, respecto a la potencia reactiva deducimos

$$\begin{aligned} Q &= 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \sin \varphi \\ Q &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

y teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para las potencias activa y reactiva, encontramos la relación que ambas están relacionadas por

$$Q = P \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (6)$$

Por otra parte, la potencia compleja es también la suma de las correspondientes a cada fase

$$\begin{aligned} S &= 3P_{\text{fase}} + j3Q_{\text{fase}} = P + jQ \\ S &= 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ S &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

cuyo modulo es la potencia aparente

$$\begin{aligned} S &= |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ S &= 3 \cdot V_f \cdot I_f \\ S &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \end{aligned} \quad (8)$$

además, el cociente entre P y S definen el factor de potencia

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (9)$$

Tabla 2: Unidades para las diferentes potencias en el Sistema Internacional

P	Q	S
W	VAr	VA
vatio	voltamperio reactivo	voltamperio

Para cada impedancia de fase es posible construir un triángulo de potencias (valores de fase) como el de la Figura 1. Multiplicando por tres cada lado, obtenemos un triángulo donde están relacionadas las potencias trifásicas activa, reactiva, y compleja.

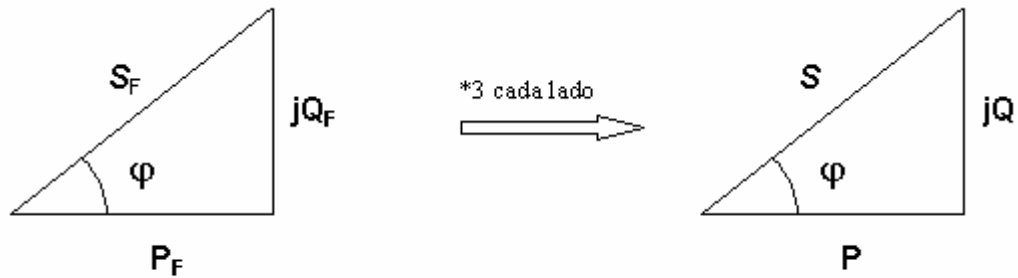


Figura 1. Triángulo de potencias.

9.4.1. Inconvenientes de un factor de potencia bajo

Considerando una instalación donde la demanda de potencia activa P se mantiene fija, al disminuir el factor de potencia, la potencia reactiva absorbida Q aumenta; creciendo igualmente la potencia aparente S . Por tanto, se produce un incremento de la corriente solicitada lo que provoca mayores pérdidas en las líneas, transformadores... En consecuencia, un factor de potencia bajo conduce a una utilización de mayor coste de la instalación, razón por lo que las compañías suministradoras de energía penalizan los factores de potencia bajos, midiendo el consumo de energía reactiva.

Para mejorar el factor de potencia de un sistema debemos compensar la energía reactiva, para lo cual el método más tradicional consiste en la utilización de condensadores estáticos. Actualmente, estas baterías de condensadores permiten realizar un seguimiento automático de las fluctuaciones del factor de potencia, siendo el factor de potencia óptimo del orden de 0.9-0.95 (en general). Para instalaciones grandes también es utilizado el compensador síncrono^[11] con el cual el seguimiento además de ser automático es continuo, aunque resulta de mayor coste.

9.4.2. Compensación del factor de potencia

Consideramos una carga caracterizada por un factor de potencia inicial $\cos\varphi$ inductivo, el cual pretendemos mejorar hasta un valor $\cos\varphi'$. La energía reactiva Q_{cF} por fase que debemos aportar es fácilmente calculada a partir de los triángulos de potencias correspondientes (Figura 2)

$$Q_{cF} = Q_F - Q'_{cF} = P_F \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (10)$$

que en términos de la potencia trifásica es

$$Q_c = Q - Q' = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \quad (11)$$

de donde, el valor de los condensadores en el caso de una conexión en triángulo es

$$C_{\Delta} = \frac{P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')}{3\omega U_L^2} \quad (12)$$

Además, es de destacar que para conseguir la misma potencia reactiva mediante una conexión en estrella es necesaria una capacidad de valor tres veces superior a la calculada para la conexión en triángulo, es decir, como

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad (13)$$

y al ser la impedancia del condensador $Z = \frac{1}{\omega C}$ tenemos

$$C_Y = 3 \cdot C_{\Delta} \quad (14)$$

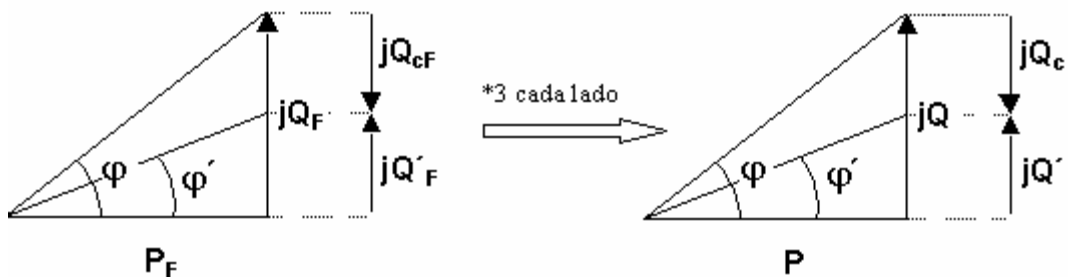


Figura 2. Triángulos de potencias para un factor de potencia inicial $\cos\varphi$ y uno final $\cos\varphi'$.

^{2[1]}E. RAS: *Teoría de líneas eléctricas*. Marcombo, 1973.

9.5. Medida de la potencia

La medida de la potencia es realizada mediante un vatímetro, en cuyo fundamento no entraremos, y limitaremos este estudio a su utilización.

En un circuito de corriente continua la lectura del vatímetro indica la potencia obtenida como el producto entre la tensión y la intensidad.

9.5.1. Sistemas monofásicos

En un circuito monofásico, la indicación W del vatímetro corresponde al producto de la tensión, la corriente, y el factor de potencia de la carga

$$W = P = V \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (1)$$

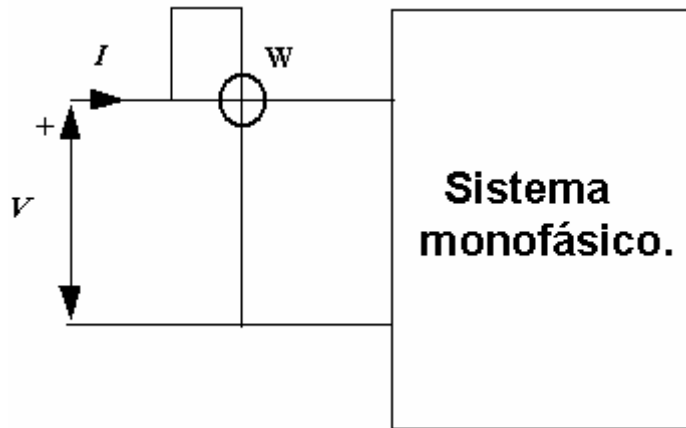


FIGURA 12. Medida de la potencia en un circuito monofásico.

9.5.2. Sistemas trifásicos

En el caso de circuitos trifásicos, la potencia consumida corresponde a la suma de las potencias consumidas por cada fase. Para su medida se utilizan diferentes circuitos dependiendo del tipo de sistema (tres o cuatro cables) y del tipo de carga (equilibrada o desequilibrada).

9.5.2.1. Sistema trifásico a tres hilos.

El montaje más utilizado en la práctica es el indicado en la figura 13, corresponde al método de los dos vatímetros y es válido tanto para sistemas equilibrados como desequilibrados. La lectura de los mismos se relaciona con la potencia activa y reactiva de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \\ W_1 - W_2 &= \frac{Q}{\sqrt{3}} = V_L \cdot I_L \cdot \text{sen } \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

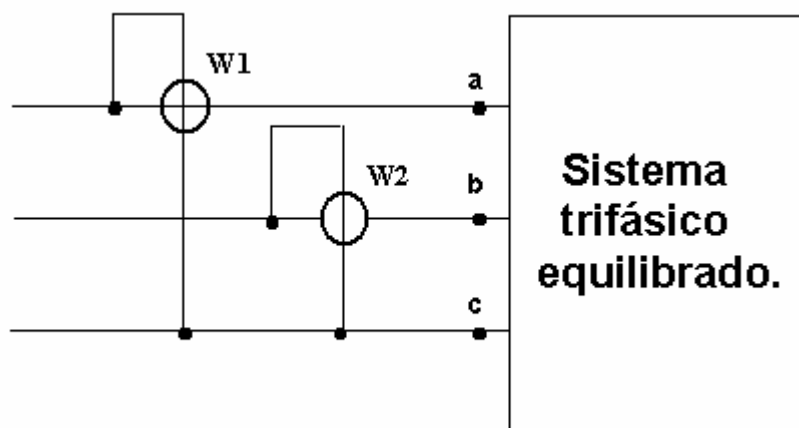


FIGURA 13. Medida de la potencia en un circuito trifásico a tres hilos.

Ejercicio: Deducir las expresiones anteriores en el caso de una carga trifásica equilibrada conectada en estrella.

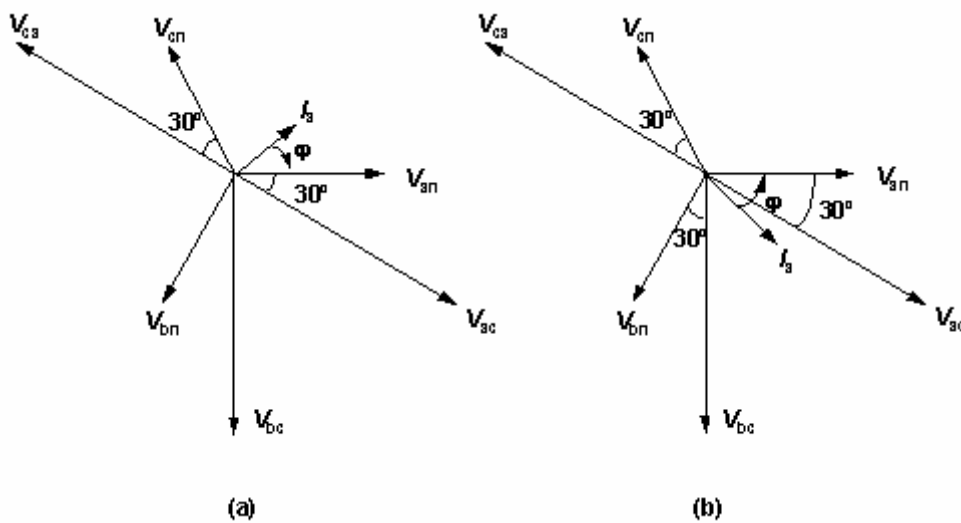


FIGURA 14. Diagramas vectoriales correspondientes a una carga capacitiva (a) e inductiva (b)

Las lecturas de los vatímetros vienen dadas por

$$\begin{aligned} W_1 &= V_{ac} \cdot I_a \cdot \cos(V_{ac}, I_a) \\ W_2 &= V_{bc} \cdot I_b \cdot \cos(V_{bc}, I_b) \end{aligned} \quad (3)$$

teniendo en cuenta el diagrama vectorial de la figura 14, podemos expresar W_1 y W_2 en función de las tensiones de fase y del ángulo φ entre la tensión e intensidad de cada fase (argumento de la impedancia de fase) según

$$W_1 = V_{ac} \cdot I_a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \quad (4)$$

puesto que en el caso capacitivo (figura 14a) el ángulo φ es negativo, mientras que en el caso inductivo este ángulo es positivo, análogamente para el vatímetro W_2 tenemos

$$W_2 = V_{bc} \cdot I_b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \quad (5)$$

cuya suma y resta son

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 2 \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P \\ W_1 - W_2 &= 2 \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\varphi = V_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (6)$$

En los casos en los que $|\varphi| > 30^\circ$, encontramos para cargas de carácter capacitivo que

$$W_1 < 0,$$

mientras que cuando la carga es inductiva

$$W_2 < 0$$

y como los vatímetros sólo tienen un sentido de desviación, es entonces preciso invertir las conexiones de los bornes de intensidad o tensión para poder realizar la medida, con la precaución de tener en cuenta el correspondiente cambio de signo.

9.5.2.2. Sistema trifásico a cuatro hilos.

Este sistema sólo es posible en el caso de conexiones Y-Y. Al existir retorno por neutro podemos medir directamente la potencia activa de cada fase como se indica en figura 15, y considerando el sistema equilibrado la potencia total es

$$P = 3W_1$$

mientras que en el caso de un sistema desequilibrado sería la suma de las lecturas correspondiente a cada fase.

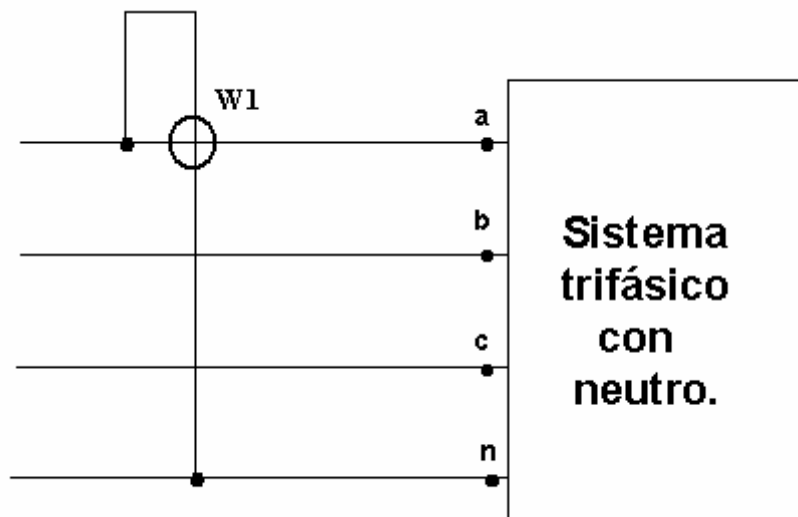


FIGURA 15. Medida de la potencia en un sistema a cuatro hilos.

9.5.3. Medida de la potencia reactiva

Para la medida de la potencia reactiva sería suficiente sustituir el vatímetro por un varímetro, aunque también es posible su determinación utilizando un vatímetro conectado como se indica en la figura 16. Considerando nuevamente el diagrama vectorial de la figura 14, encontramos que la lectura del vatímetro es

$$W = V_{bc} \cdot I_a \cdot \cos(\angle V_{bc}, I_a) = V_{bc} \cdot I_a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = V_{bc} \cdot I_a \cdot \text{sen } \varphi$$

y por tanto

$$Q = \sqrt{3} \cdot W$$

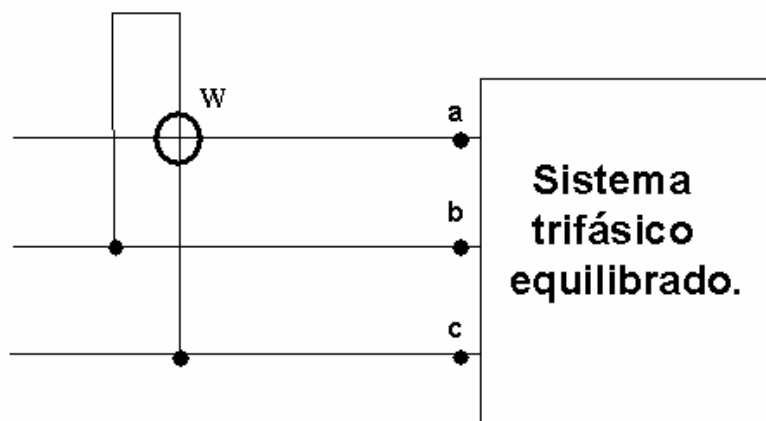


FIGURA 15. Medida de la potencia reactiva en un sistema trifásico.