

**Curso OCW de:**

# **Fundamentos de Electrotecnia**

# **CUD**

- **Joaquín Mur Amada**
- **Miguel Ángel García García**



**Centro Universitario  
de la Defensa Zaragoza**

**PRAUZ 449  
2021/22**

# ***Tema 1***

## *Leyes de Kirchhoff. Referencias de polaridad*

Curso OCW de:

***Fundamentos de Electrotecnia***



**Centro Universitario  
de la Defensa Zaragoza**

## ***Tema 1.- Leyes de Kirchhoff. Referencias de polaridad.***

1.1.- Generalidades.

1.2.- Unidades.

1.3.- Definiciones.

1.4.- Referencias de polaridad.

1.5.- Leyes de Kirchhoff.

1.5.1- Ley de Kirchhoff de las intensidades.

1.5.2- Ley de Kirchhoff de las tensiones.

## 1.1. Generalidades

- Se llama **circuito eléctrico** a un conjunto de elementos (interconectados entre sí o acoplados eléctrica o magnéticamente) por donde pueden moverse las cargas eléctricas.
- La **Teoría de Circuitos** se dedica al estudio de las propiedades y el comportamiento de los circuitos eléctricos.
- **Analizar un circuito** consiste en hallar para cada elemento de dicho circuito:
  - la diferencia de potencial existente entre sus bornes
  - la corriente eléctrica que lo atraviesa

## 1.2. Unidades

- *Se va a utilizar fundamentalmente el sistema internacional de unidades (S.I.)*

Magnitud	Unidad (S.I.)
Carga eléctrica (q)	Culombio (C)
Tensión o caída de tensión (u)	Voltio (V)
Corriente eléctrica o intensidad (i)	Amperio (A)
Resistencia (R)	Ohmio ( $\Omega$ )
Capacidad (C)	Faradio (F)
Coeficiente de autoinducción (L)	Henrio (H)
Densidad de flujo magnético (B)	Tesla (T)
Flujo magnético ( $\phi$ )	Weber (Wb) [1T = 1Wb/m <sup>2</sup> ]
Intensidad de campo magnético (H)	Amperio por metro (A/m)

## 1.3. Definiciones

- Se define la **intensidad de corriente eléctrica** (*intensidad o corriente*) como la cantidad neta de carga que atraviesa la sección de un conductor por unidad de tiempo debido a la existencia de un campo eléctrico.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

- Su símbolo es la letra «*i*».
- Su unidad es el **amperio (A)**, que corresponde a un culombio de carga eléctrica transferida por segundo.

## 1.3. Definiciones

- Se define la **tensión eléctrica** (*diferencia de tensión, caída de tensión, caída de potencial, etc.*) entre dos puntos, 1 y 1', de un circuito como la diferencia entre los potenciales eléctricos de esos puntos.

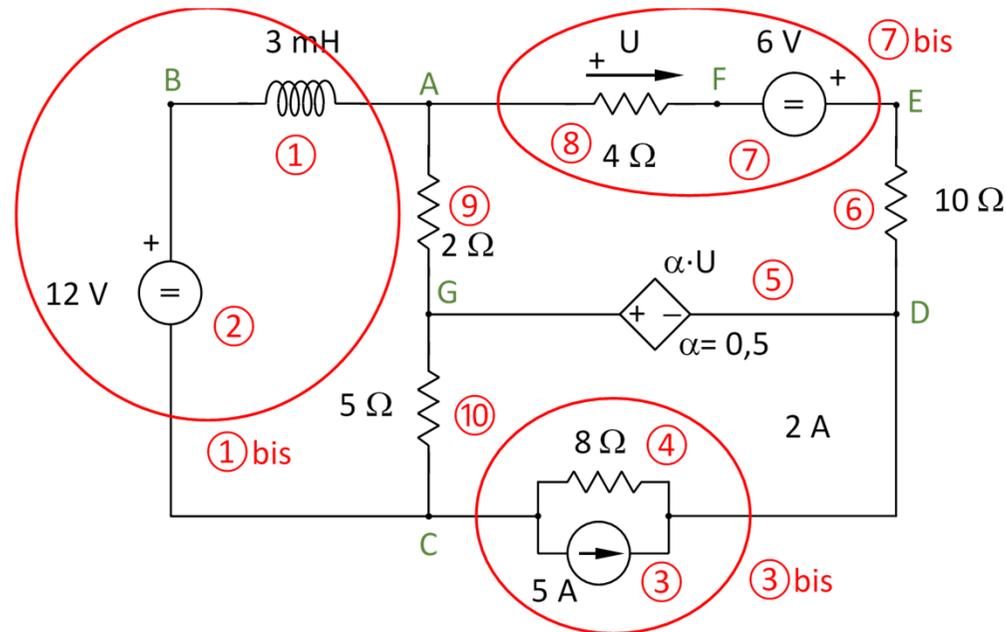
$$u_{11'}(t) = V_1 - V_{1'}$$

- Su símbolo es la letra «**u**»
- Su unidad es el **voltio (V)**, que corresponde a un julio de trabajo por culombio de carga eléctrica transferida entre dos puntos.

## 1.3. Definiciones

- Se define **rama** de un circuito como un elemento o conjunto de elementos que se interconectan con el resto del circuito únicamente a través de dos puntos, denominados **terminales**, y donde existe una relación matemática entre la tensión de estos terminales y la corriente que atraviesa este elemento o grupo de elementos.
- Se llama **nudo** de un circuito al punto en el que se unen dos o más ramas de un circuito.

## 1.3. Definiciones



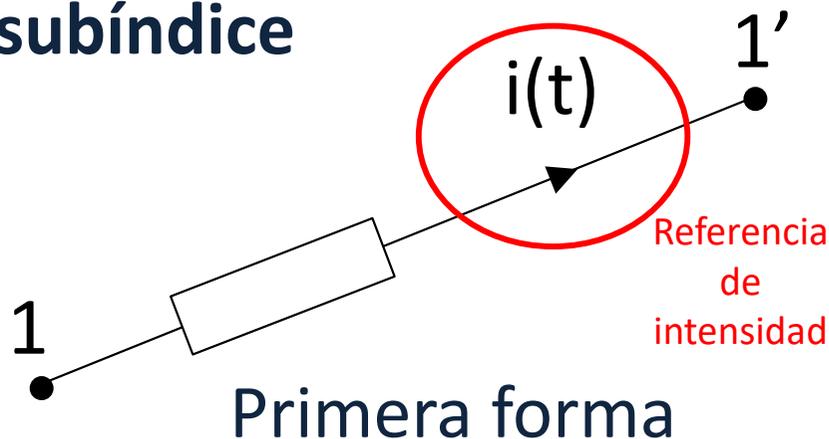
- *Ramas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 o bien 1bis, 3bis, 5, 6, 7bis, 9 y 10 ; etc.*
- *Nudos: A, B, C, D, E, F y G o bien A, C, D, E y G ; etc.*

## 1.4. Referencias de polaridad

- *A la hora de determinar la tensión en bornes de, o la intensidad que circula por, un elemento de un circuito:*
  - **No basta con indicar sólo el valor** de dichas magnitudes, también **es necesario determinar el sentido** en que circula la corriente por el elemento y cuál de sus dos extremos se encuentra a mayor potencial eléctrico.
  - Para poder determinar de una forma sencilla estos sentidos, es necesario asignar a cada elemento de un circuito lo que se conoce como **referencias de polaridad**.
- *(Por convenio, se toma como sentido de la corriente el opuesto al movimiento de los electrones, esto es, el sentido del movimiento que seguirían unas supuestas cargas ideales positivas).*

## 1.4. Referencias de polaridad

- *Referencia de intensidad:*
  - Dado elemento de un circuito, establecer la referencia de intensidad en él es presuponer e indicar el sentido que lleva la corriente en dicho elemento, **dibujando sobre un conductor una flecha en sentido arbitrario.**
  - Otra manera de establecer la referencia de corriente en un conductor consiste en la **utilización de un doble subíndice**



$$i_{11'}(t) = -i_{1'1}(t)$$

Segunda forma

## 1.4. Referencias de polaridad

- *Referencia de polaridad de tensión:*
  - Una forma de dar referencia a la tensión que existe entre dos puntos es **a través de los subíndices**, colocando en segundo lugar el subíndice correspondiente al punto que se toma como referencia para el cálculo de la diferencia de potencial eléctrico.
  - Otra forma (*la usada en la asignatura*) es **dibujar una flecha** que, partiendo del punto supuesto a mayor potencial eléctrico, apunte al punto que se toma como referencia para el cálculo de la diferencia de potencial eléctrico.

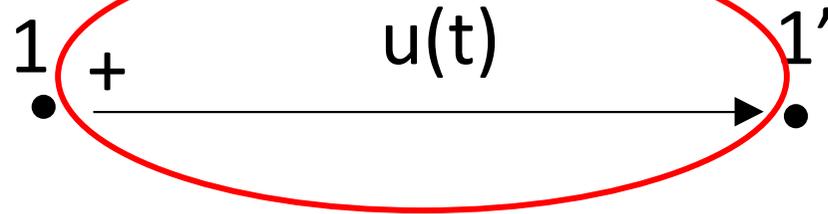
## 1.4. Referencias de polaridad

- Para reforzar la indicación, al punto que se supone a mayor potencial eléctrico se le señala con un signo «+».

$$u_{11'}(t) = V_1 - V_{1'}$$

Primera forma

Referencia  
de  
tensión

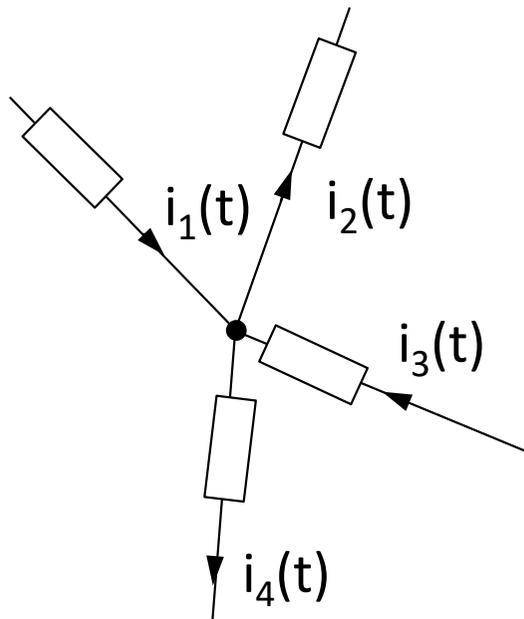


Segunda forma

## 1.5. Leyes de Kirchhoff

### • 1.5.1. Ley de Kirchhoff de las intensidades (LKI)

- La suma algebraica de todas las intensidades que entran (salen) en (de) un nudo a través del conjunto de conductores que concurren en él es, *en todo instante*, cero.



$$\sum_{\text{algebraica}} i_{\text{entran}}(t) = 0$$

$$\sum_{\text{algebraica}} i_{\text{salen}}(t) = 0$$

$$\sum i_{\text{entran}}(t) = \sum i_{\text{salen}}(t)$$

Ejemplos:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) = 0 \\ -i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0 \end{cases} \left\| \begin{array}{l} i_1(t) + i_3(t) = i_2(t) + i_4(t) \end{array} \right.$$

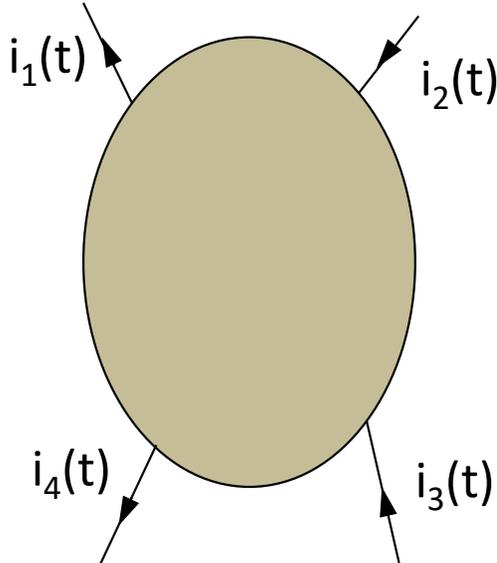
## 1.5. Leyes de Kirchhoff

- **Generalización de la Ley de Kirchhoff de las intensidades (LKIG)**

- La suma algebraica de las intensidades que entran (salen) en (de) un recinto cerrado por todos los conductores que atraviesan su frontera es, en todo instante, cero

$$\sum_{\text{algebraica}} i_{\text{entran}}(t) = 0 \qquad \sum_{\text{algebraica}} i_{\text{salen}}(t) = 0$$

$$\sum i_{\text{entran}}(t) = \sum i_{\text{salen}}(t)$$



Ejemplos:

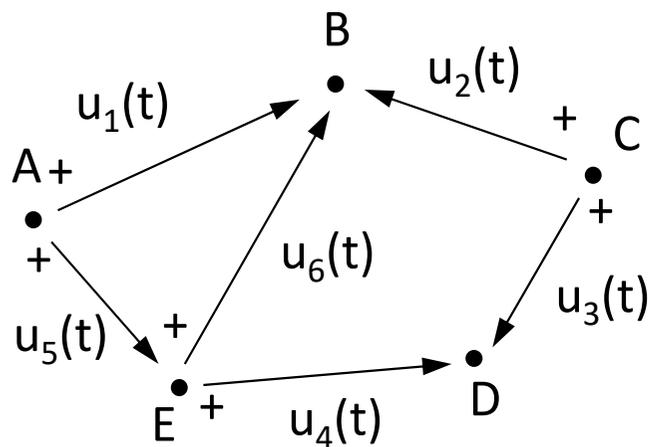
$$\begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) &= 0 \\ i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) &= 0 \end{aligned} \left\| \begin{aligned} i_1(t) + i_4(t) &= i_2(t) + i_3(t) \end{aligned} \right.$$

# 1.5. Leyes de Kirchhoff

## • 1.5.2. Ley de Kirchhoff de las tensiones (LKT)

- La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier **trayectoria cerrada** de un circuito es, *en todo instante*, cero.

Ejemplos:



Trayectoria ABCDEA .....  $u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) - u_5(t) = 0$

Trayectoria ABEA .....  $u_1(t) - u_6(t) - u_5(t) = 0$

Trayectoria EBCDE .....  $u_6(t) - u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow u_6(t) = u_2(t) - u_3(t) + u_4(t)$

Trayectoria EBAE .....  $u_6(t) - u_1(t) + u_5(t) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow u_6(t) = u_1(t) - u_5(t)$

$$u_{EB}(t) = u_6(t) = \underbrace{-u_5(t) + u_1(t)}_{\text{Trayectoria EAB}} = \underbrace{u_4(t) - u_3(t) + u_2(t)}_{\text{Trayectoria EDCB}}$$

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección *Textos Docentes*, vol. 58. *Prensas Universitarias de Zaragoza*.

# ***Tema 2***

## *Elementos de circuitos*

Curso OCW de:

***Fundamentos de Electrotecnia***



**Centro Universitario  
de la Defensa** Zaragoza

## Tema 2.- *Elementos de circuitos.*

### 2.1.-Elementos ideales de circuitos.

#### 2.1.1.-Dipolos.

2.1.1.1.-Resistencia. Asociación de resistencias. Divisores de tensión e intensidad resistivos

2.1.1.2.-Condensador.

2.1.1.3.-Bobina.

2.1.1.4.-Fuentes independientes.

2.1.1.5.-Fuentes dependientes.

#### 2.1.2.-Cuadripolos.

2.1.2.1.-Bobinas acopladas magnéticamente.

2.1.2.2.-Transformador ideal.

### 2.2.-Elementos reales de circuitos.

2.2.1.-Resistencia.

2.2.2.-Condensador.

2.2.3.-Bobina.

2.2.4.-Fuente real de tensión.

2.2.5.-Fuente real de intensidad.

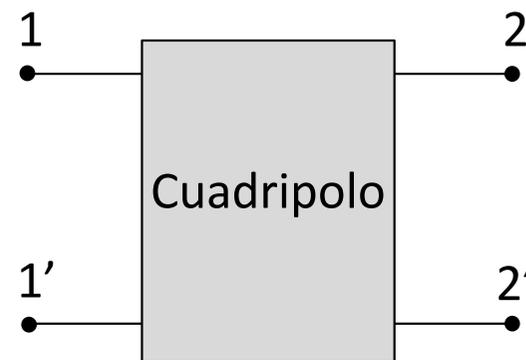
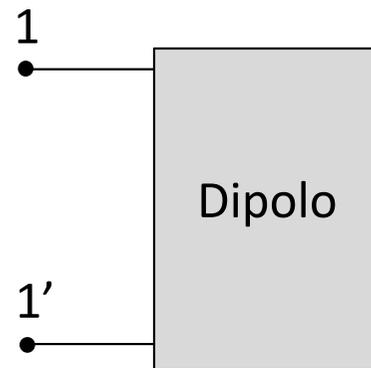
2.2.6.-Voltímetro.

2.2.7.-Amperímetro.

## ***2.1. Elementos ideales de circuitos***

## 2.1. Elementos ideales de circuitos

- Se denomina **dipolo** a todo circuito eléctrico, compuesto por uno o varios elementos simples, que presenta dos terminales accesibles.
- Se denomina **cuadripolo** a todo circuito eléctrico, compuesto por uno o varios elementos simples, que presenta cuatro terminales accesibles.



## 2.1. Elementos ideales de circuitos

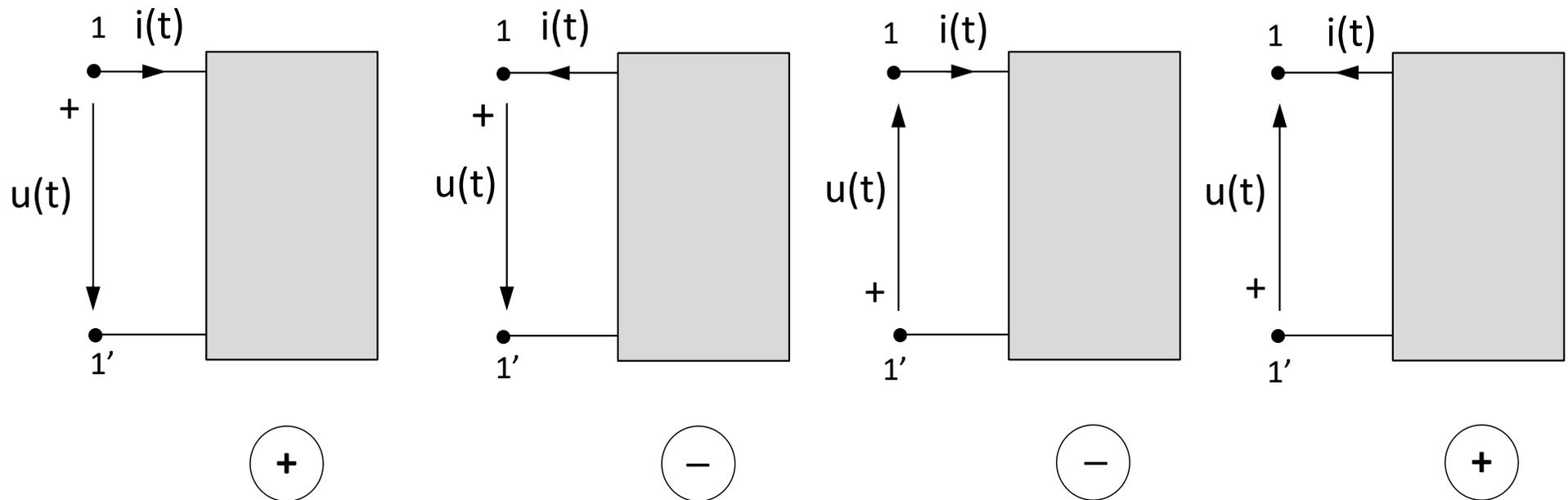
- **Caracterizar un elemento de un circuito** consiste en expresar una relación funcional entre la intensidad que circula a través de él y la caída de tensión entre sus terminales.

$$u = \pm f(i) \qquad i = \pm g(u)$$

- Estas ecuaciones, que modelan matemáticamente el comportamiento de dichos elementos, se denominan **ecuaciones de definición**.

## 2.1.1. Dipolos

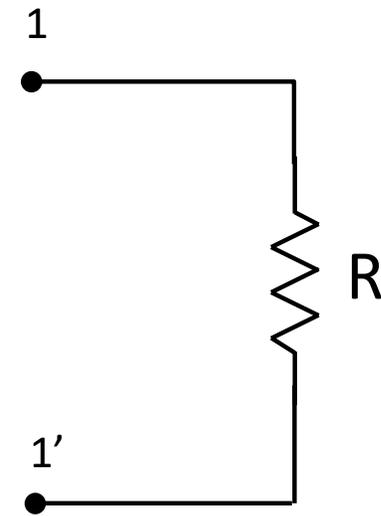
- *El signo de las ecuaciones de definición depende del sentido relativo entre las referencias de tensión y de intensidad.*



## 2.1.1.1. Resistencia

- Al circular por ella una corriente eléctrica, disipa energía en forma de calor.
- La caída de tensión entre sus terminales es proporcional a la corriente que circula a través de ella → **Ley de Ohm.**

Representación:



Ec. de definición:

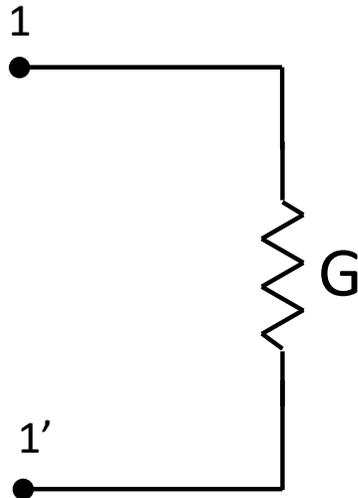
$$u(t) = \pm R \cdot i(t)$$

R: Resistencia

(se mide en ohmios,  $\Omega$ )

## 2.1.1.1. Resistencia

- Otra ecuación de definición:



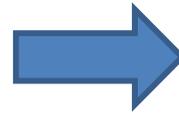
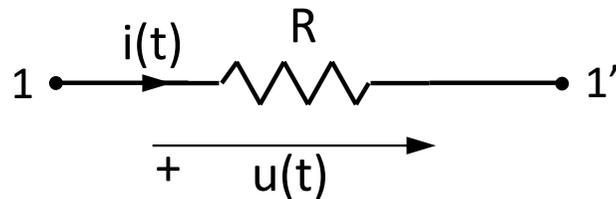
$$i(t) = \pm G \cdot u(t)$$

$G$ : Conductancia  
(se mide en siemens, S)

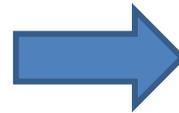
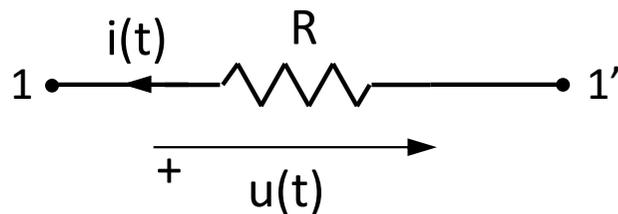
- Se cumple que:  $G = \frac{1}{R}$

## 2.1.1.1. Resistencia

- *Ejemplos:*



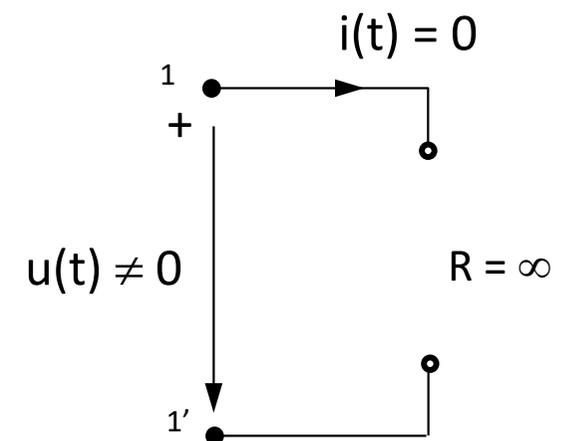
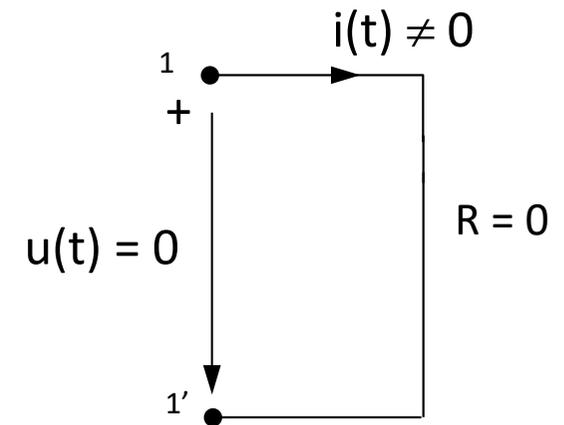
$$\begin{cases} u(t) = + R \cdot i(t) \\ i(t) = + G \cdot u(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(t) = - R \cdot i(t) \\ i(t) = - G \cdot u(t) \end{cases}$$

## 2.1.1.1. Resistencia

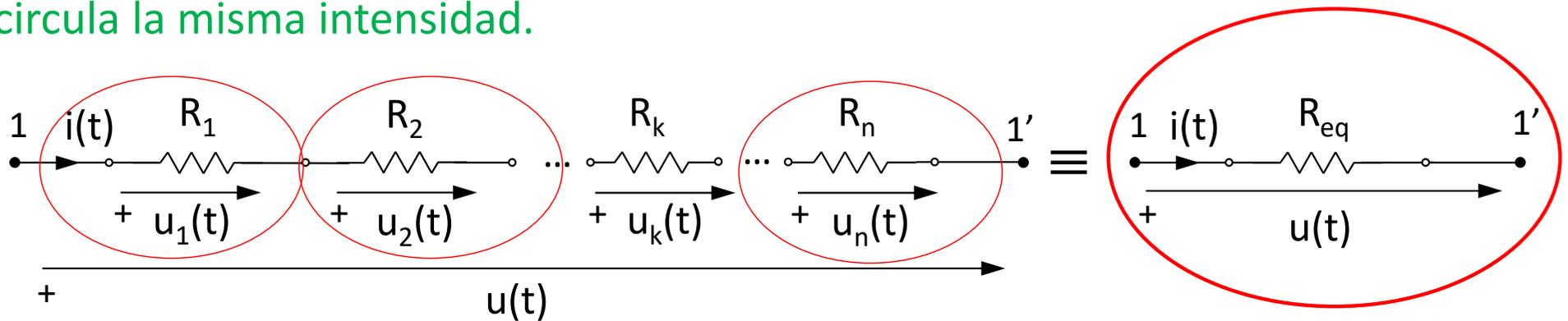
- *Casos particulares:*
  - Si  $R = 0$  ( $G = \infty$ ), se cumple que la caída de tensión entre sus terminales es, en todo instante, igual a cero ( $u(t)=0$ ). A este elemento se le denomina **cortocircuito**.
  - Si  $R = \infty$  ( $G = 0$ ), se cumple que la corriente que circula por ella es, en todo instante, igual a cero ( $i(t) = 0$ ). A este elemento se le denomina **circuito abierto**.



## 2.1.1.1. Asociación de resistencias

- Asociación de resistencias en serie:

Dos o más resistencias están conectadas en serie si por todas ellas circula la misma intensidad.



Ec. de definición:

$$u(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

Ley de Kirchhoff de las tensiones:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) = \left( \sum_{k=1}^n R_k \right) \cdot i(t)$$

$$u_1(t) = R_1 \cdot i(t)$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t)$$

⋮

$$u_k(t) = R_k \cdot i(t)$$

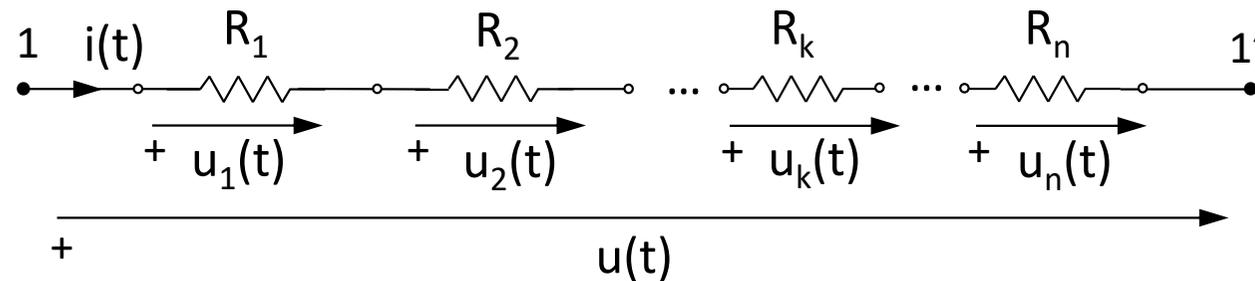
⋮

$$u_n(t) = R_n \cdot i(t)$$

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

## 2.1.1.1. Asociación de resistencias

- *Divisor de tensión:*



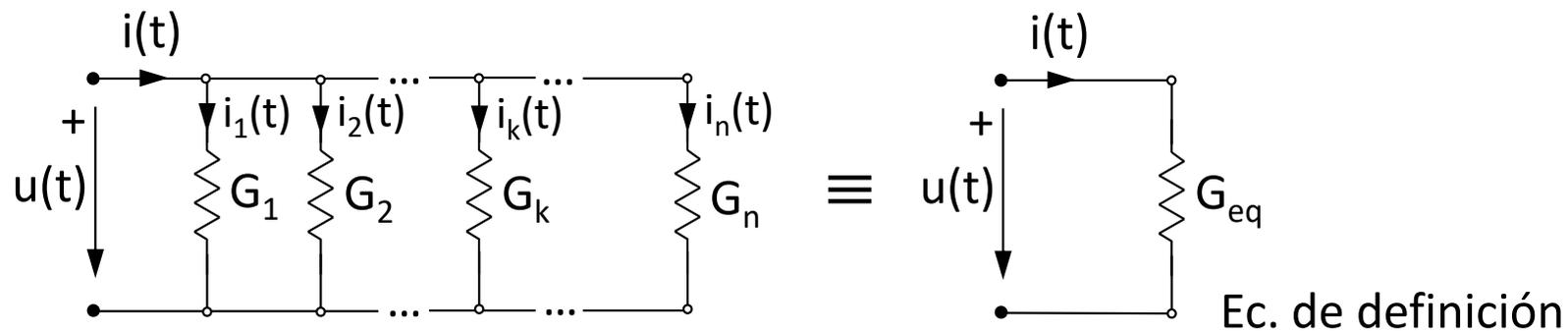
$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \left( \sum_{k=1}^n R_k \right) \cdot i(t) \\ u_k(t) &= R_k \cdot i(t) \end{aligned} \right\} \frac{u_k(t)}{u(t)} = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} \Rightarrow \boxed{u_k(t) = u(t) \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k}}$$

**Expresión del divisor de  
tensión**

## 2.1.1.1. Asociación de resistencias

- *Asociación de resistencias en paralelo:*

Dos o más resistencias están conectadas en paralelo si en bornes de todas ellas existe la misma tensión.



$$i_1(t) = G_1 \cdot u(t)$$

$$i_2(t) = G_2 \cdot u(t)$$

⋮

$$i_k(t) = G_k \cdot u(t)$$

⋮

$$i_n(t) = G_n \cdot u(t)$$

Ley de Kirchhoff de las intensidades:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) = \left( \sum_{k=1}^n G_j \right) \cdot u(t)$$

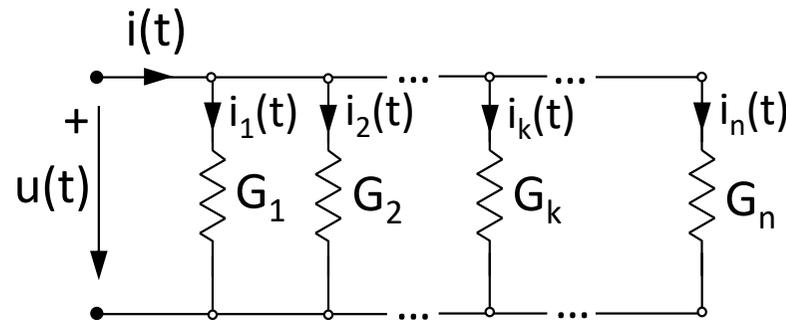
$$i(t) = G_{eq} \cdot u(t)$$

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

## 2.1.1.1. Asociación de resistencias

- *Divisor de intensidad:*



$$i(t) = \left( \sum_{k=1}^n G_k \right) \cdot u(t)$$

$$i_k(t) = G_k \cdot u(t)$$

$$\frac{i_k(t)}{i(t)} = \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

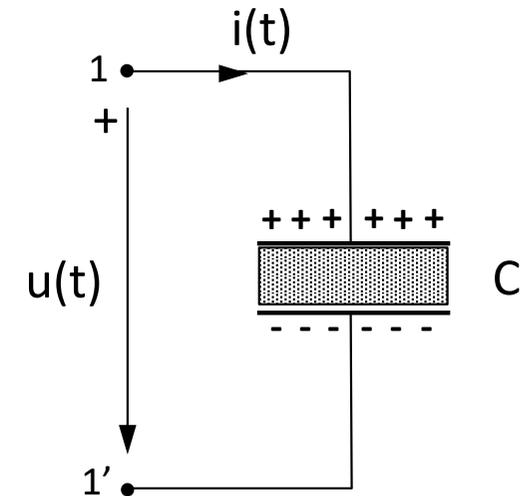


$$i_k(t) = i(t) \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

**Expresión del divisor de corriente**

## 2.1.1.2. Condensador

- Elemento constituido por dos conductores enfrentados separados por un medio aislante llamado dieléctrico.
- Al aplicar una tensión entre estos dos conductores se depositan cargas eléctricas de signos contrarios en cada uno de ellos, apareciendo un campo eléctrico en el medio aislante.
- La cantidad de carga depositada es proporcional a la diferencia de potencial entre las placas.

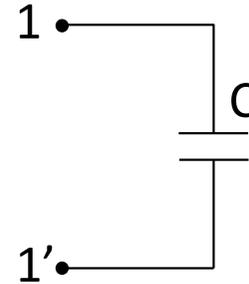


$$q(t) = C \cdot u(t)$$

C: Capacidad  
(se mide en faradios, F)

## 2.1.1.2. Condensador

- Representación:



- Ecuaciones de definición:

$$q(t) = C \cdot u(t) \rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \pm C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \pm C \cdot \frac{du(t)}{dt} \rightarrow u(t) = \pm \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \pm \frac{1}{C} \left[ \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \right] = u(t_0) \pm \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

$$u(t) = u(t_0) \pm \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

## 2.1.1.2. Condensador

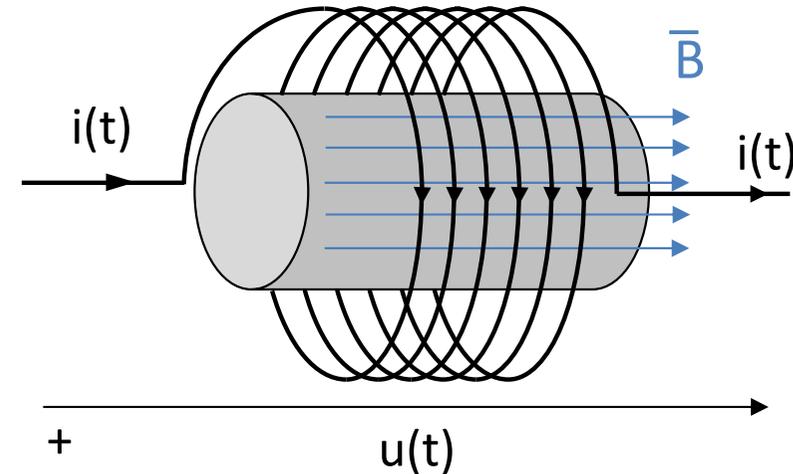
- A partir de:  $i(t) = \pm C \cdot \frac{du(t)}{dt}$
- Se deduce que:
  - La **tensión** en bornes del condensador ha de ser una **función continua en el tiempo**, ya que la existencia de puntos de discontinuidad supondría la existencia de instantes en los que la intensidad fuera infinita, algo físicamente imposible.
  - Si la tensión en bornes de un condensador tiene un valor constante en el tiempo (caso de **corriente continua**), su derivada respecto del tiempo es cero y, por lo tanto,  $i(t) = 0 \quad \forall t$ , es decir, no circulará intensidad por el condensador. En estas condiciones, el condensador se comporta como un **circuito abierto**.

## 2.1.1.3. Bobina

- Elemento constituido por un conductor arrollado en forma de hélice alrededor de un núcleo. Cada una de las vueltas del arrollamiento se denomina espira.
- Al circular una intensidad por el conductor arrollado, se crea un campo magnético en el interior del núcleo de la bobina proporcional a la intensidad y en la dirección del eje de la bobina. El sentido de este campo es el del avance de un sacacorchos que gira con la corriente («regla del sacacorchos»).



«Regla de la mano derecha»

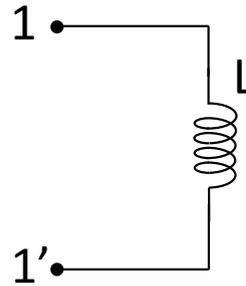


$$\rightarrow N \cdot \phi(t) = \pm L \cdot i(t)$$

L: coeficiente de  
autoinducción  
(se mide en henrios, H)

## 2.1.1.3. Bobina

- Representación:



- Ecuaciones de definición:

$$N \cdot \phi(t) = \pm L \cdot i(t) \Rightarrow N \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

Ley de Faraday:  $|u(t)| = \left| N \frac{d\phi(t)}{dt} \right|$

$$|u(t)| = \left| L \frac{di(t)}{dt} \right| \Rightarrow u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \pm \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \pm \frac{1}{L} \left[ \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right] = i(t_0) \pm \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

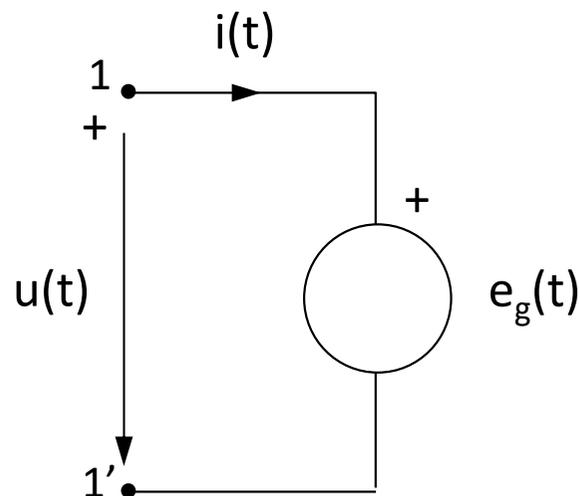
$$i(t) = i(t_0) \pm \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

### 2.1.1.3. Bobina

- A partir de:  $u(t) = \pm L \frac{di(t)}{dt}$
- Se deduce que:
  - La **intensidad** que circula por una bobina ha de ser una **función continua en el tiempo**, ya que la existencia de puntos de discontinuidad implicaría la existencia de instantes en los que la tensión entre sus bornes fuera infinita, algo físicamente imposible.
  - Si la intensidad que circula por una bobina es constante en el tiempo (caso de circuitos de **corriente continua**), su derivada con respecto al tiempo es cero y, por lo tanto, la tensión en bornes de la bobina es en todo instante cero. En estas condiciones, la bobina se comporta como un **cortocircuito**.

## 2.1.1.4. Fuentes independientes

- **Fuente ideal independiente de tensión:**
  - Se trata de un elemento de circuito que establece entre sus terminales una tensión bien definida a lo largo del tiempo.
  - Dicha tensión es, además, independiente del resto del circuito al cual está conectada la fuente.

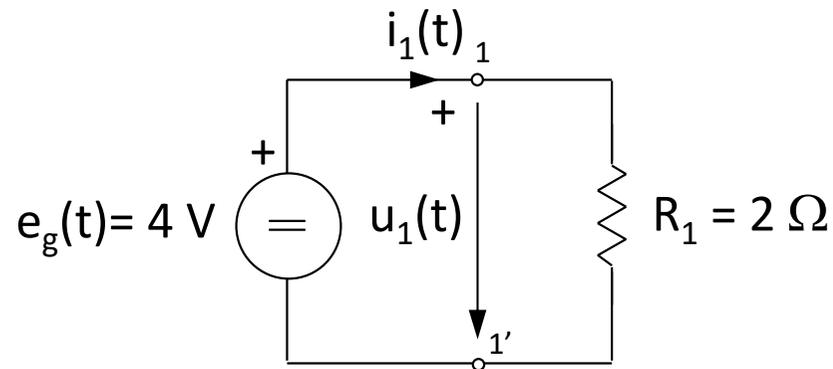


$$u(t) = \pm e_g(t)$$

## 2.1.1.4. Fuentes independientes

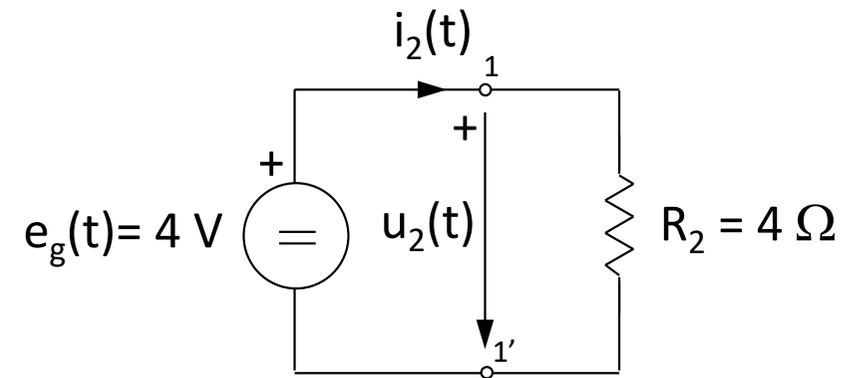
- *Ejemplo: Fuente ideal independiente de tensión continua*

(Notar como el valor de la tensión en bornes de la fuente es independiente del resto del circuito)



$$u_1(t) = 4\text{ V}$$

$$i_1(t) = 4/2 = 2\text{ A}$$

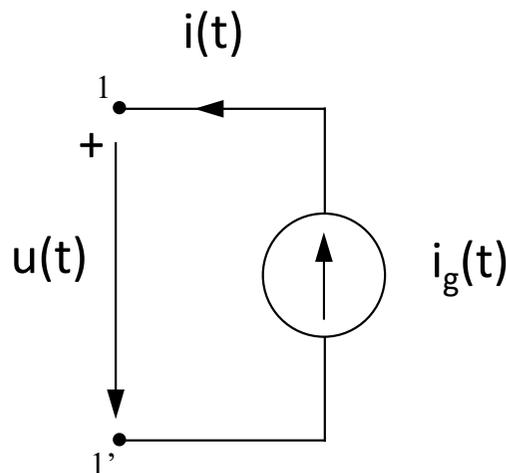


$$u_2(t) = 4\text{ V}$$

$$i_2(t) = 4/4 = 1\text{ A}$$

## 2.1.1.4. Fuentes independientes

- **Fuente ideal independiente de intensidad:**
  - Se trata de un elemento de circuito que suministra una intensidad bien definida a lo largo del tiempo.
  - Dicha intensidad es, además, independiente del resto del circuito al cual está conectada la fuente.

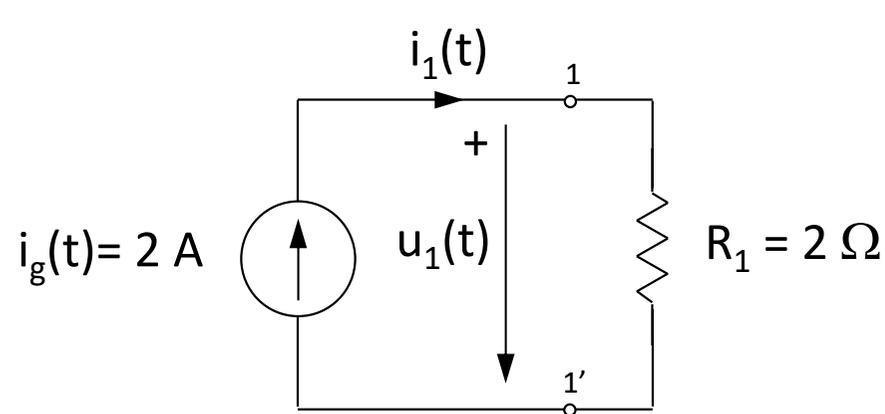


$$i(t) = \pm i_g(t)$$

## 2.1.1.4. Fuentes independientes

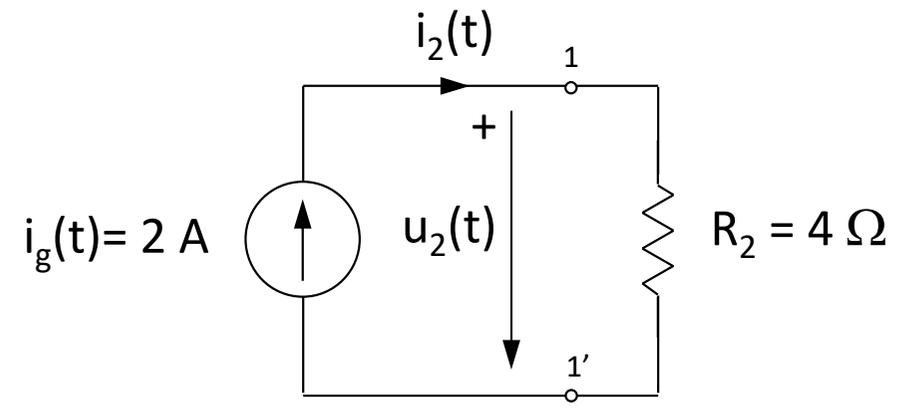
- *Ejemplo: Fuente ideal independiente de intensidad continua*

(Notar como el valor de la corriente que suministra la fuente es independiente del resto del circuito)



$$i_1(t) = 2 \text{ A}$$

$$u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1 = 4 \text{ V}$$

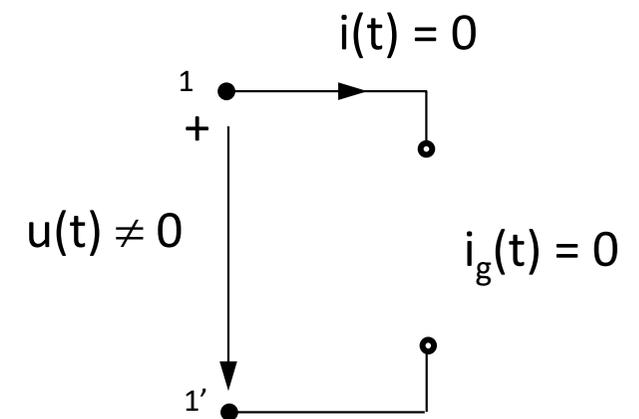
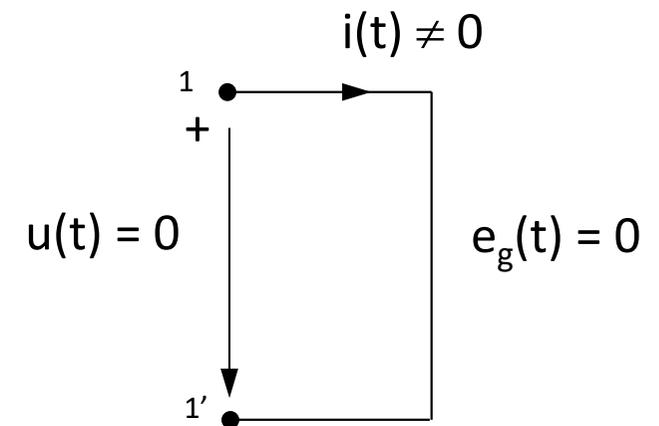


$$i_2(t) = 2 \text{ A}$$

$$u_2(t) = i_2(t) \cdot R_2 = 8 \text{ V}$$

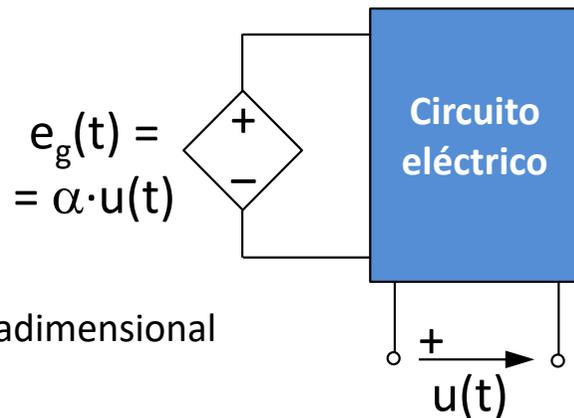
## 2.1.1.4. Fuentes independientes

- *Casos particulares:*
  - Si una fuente de tensión es constantemente de valor cero, esto es  $e_g(t) = 0$  (para todo  $t$ ), se trata de un **cortocircuito**.
  - Si una fuente de intensidad es constantemente de valor cero, esto es,  $i_g(t) = 0$  (para todo  $t$ ), se trata de un **circuito abierto**.

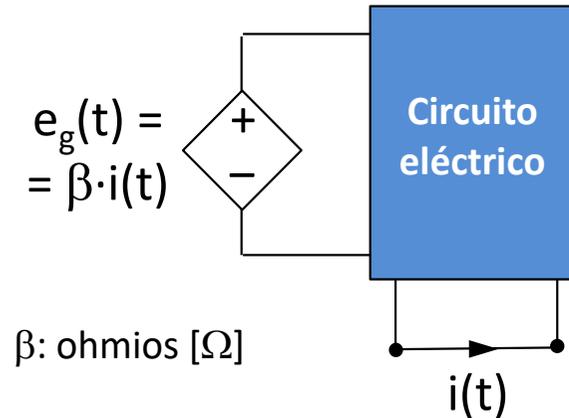


## 2.1.1.5. Fuentes dependientes

- Elementos tales que la tensión o intensidad que suministran depende de la tensión o intensidad en otra parte del circuito.

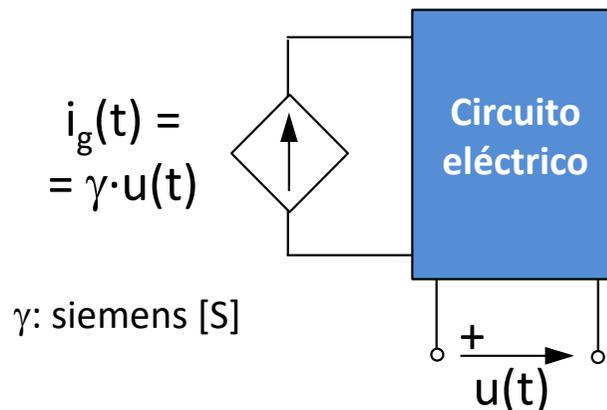


**Fuente de tensión dependiente de tensión**

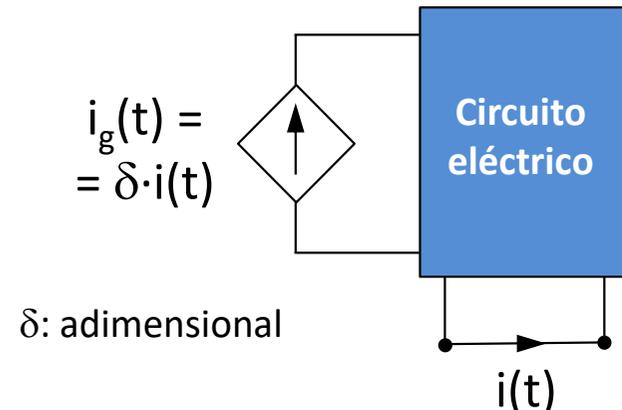


**Fuente de tensión dependiente de intensidad**

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son constantes



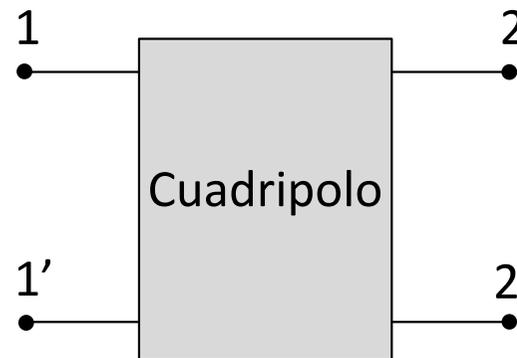
**Fuente de intensidad dependiente de tensión**



**Fuente de intensidad dependiente de intensidad**

## 2.1.2. Cuadripolos

- Como ya se ha dicho, se denomina **cuadripolo** a todo circuito eléctrico, compuesto por uno o varios elementos simples, que presenta cuatro terminales accesibles.

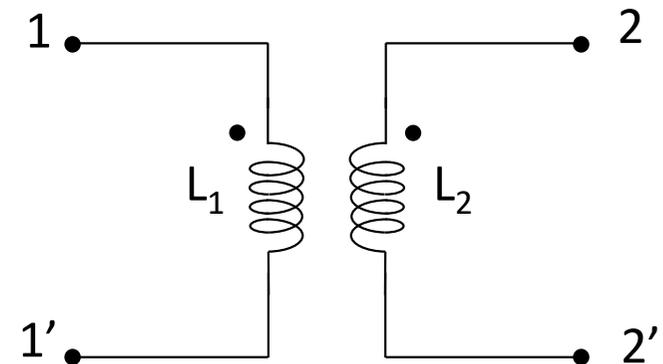


- Cuadripolos que se van a estudiar: bobinas acopladas magnéticamente, transformador ideal.

## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- *Dos circuitos se dice que están acoplados cuando intercambian energía.*
- *Las variables que se presentan en cada uno de ellos no dependen únicamente de los parámetros de sus propios elementos, sino que también dependen de parámetros de acoplamiento o mutuos.*
- **Propiedad:** *Dado un medio magnético lineal, se cumple que el flujo magnético en una sección debido a la acción conjunta de dos intensidades es igual a la suma de los flujos en esta misma sección debido a la acción de cada intensidad considerándolas por separado.*

Representación:



## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- *Análisis de los flujos:*

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) \\ \phi_2(t) &= \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) \end{aligned} \right\}$$

flujo de dispersión

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11}(t) &= \phi_{21}(t) + \phi_{S1}(t) \\ \phi_{22}(t) &= \phi_{12}(t) + \phi_{S2}(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) = \phi_{S1}(t) + \phi_{21}(t) + \phi_{12}(t) \\ \phi_2(t) &= \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) = \phi_{S2}(t) + \phi_{12}(t) + \phi_{21}(t) \end{aligned} \right\}$$

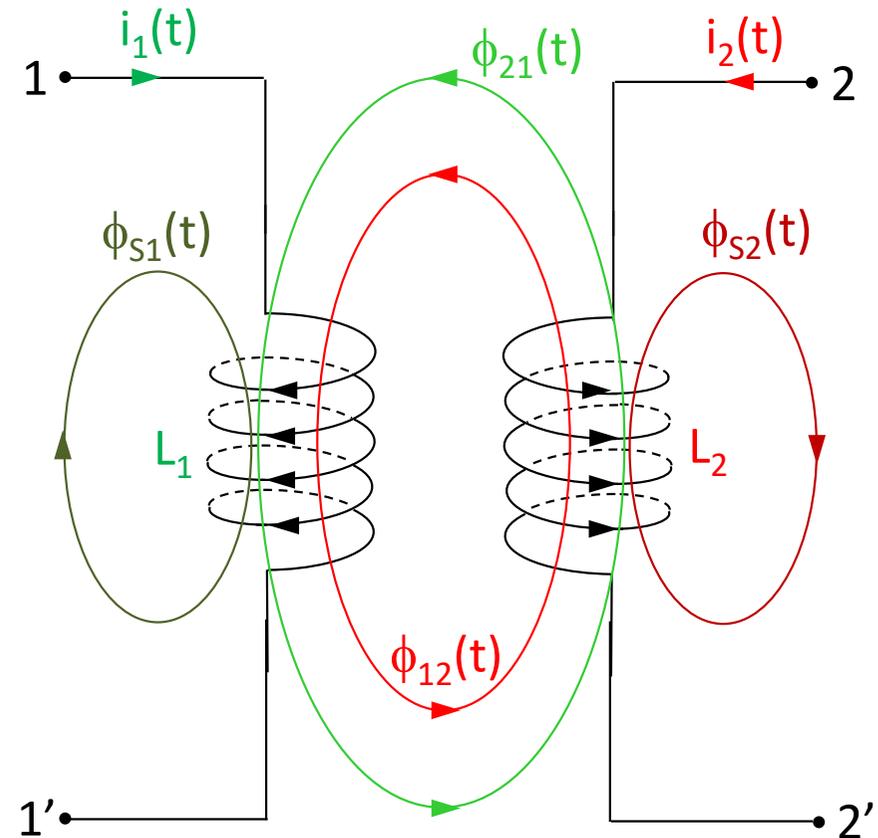
flujo mutuo

$$\phi_m(t) = \phi_{21}(t) + \phi_{12}(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t) = \phi_{S1}(t) + \phi_m(t) \\ \phi_2(t) &= \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t) = \phi_{S2}(t) + \phi_m(t) \end{aligned} \right\}$$

Circuitos

Máquinas



$\phi_1(t)$ : Flujo total que abarca una espira de la bobina 1  
 $\phi_2(t)$ : Flujo total que abarca una espira de la bobina 2  
 $\phi_{ij}(t)$ : Flujo que abarca una espira de la bobina "i" debido a que circula intensidad por la bobina "j"

## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

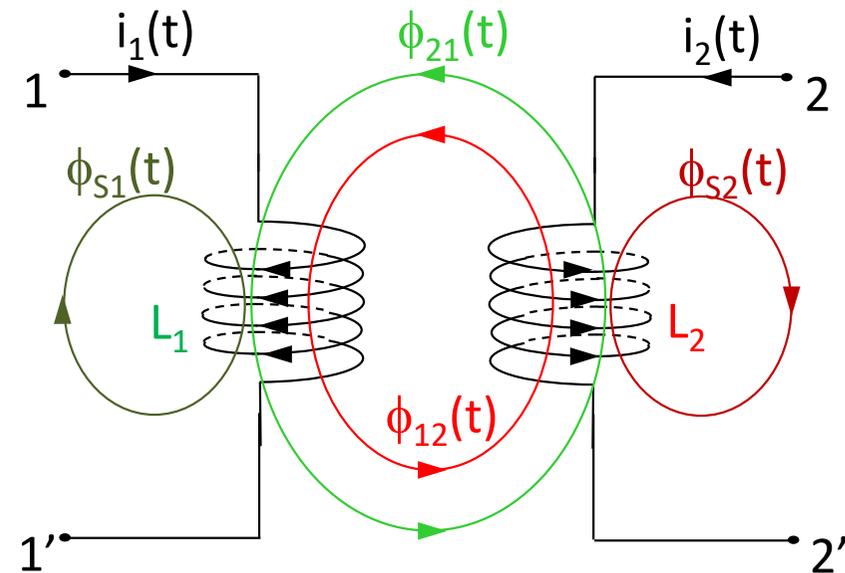
- Relación entre los flujos y las intensidades:

$$N_1 \cdot \phi_{11}(t) = \pm L_1 \cdot i_1(t)$$

$$N_1 \cdot \phi_{12}(t) = \pm M_{12} \cdot i_2(t)$$

$$N_2 \cdot \phi_{21}(t) = \pm M_{21} \cdot i_1(t)$$

$$N_2 \cdot \phi_{22}(t) = \pm L_2 \cdot i_2(t)$$



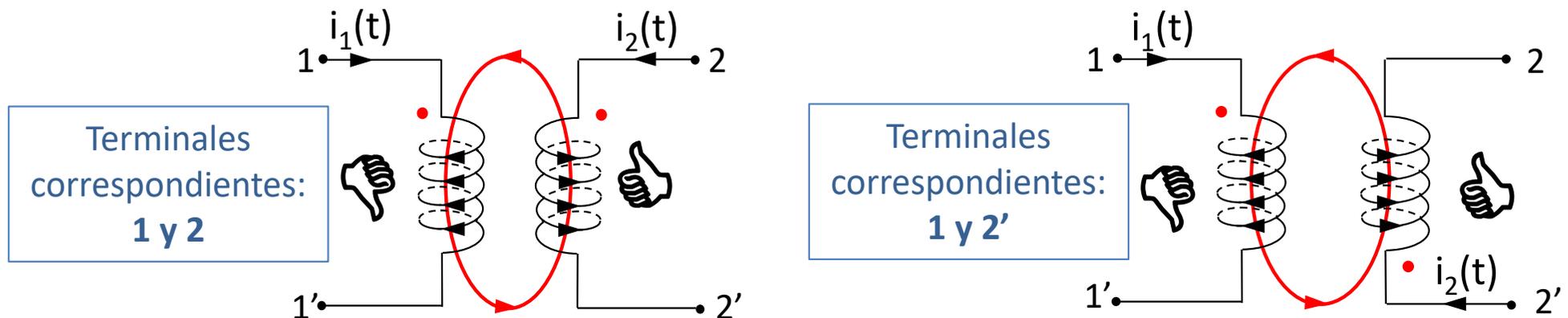
Donde:

$L_1$  y  $L_2$  : coeficientes de autoinducción de las bobinas,

$M_{12}$  y  $M_{21}$ : coeficientes de inducción mutua y sus unidades son HENRIOS (H)

## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- *Determinación del signo en las ecuaciones:*
  - Dibujar las bobinas acopladas en representación espacial y dar también referencias para los flujos (*engorroso*).
  - Utilizar el concepto de **terminales correspondientes**.
    - Se llaman así al conjunto de terminales (**un terminal de cada una de las bobinas acopladas**) para los que se verifica que, si entra (o sale) por ellos simultáneamente intensidad en cada una de las bobinas, se originan líneas de campo magnético comunes *del mismo sentido*.



## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- Ecuaciones de definición:

$$\phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t)$$

$$\phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t)$$

↓ Multiplicar por  $N_1$  y  $N_2$ , y derivar

$$N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{11}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt}$$

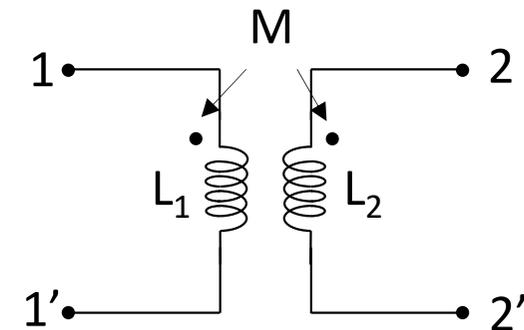
$$N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{22}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{21}(t)}{dt}$$

↓ Ley de Faraday y relación entre flujos e intensidades

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi_{11}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_{22}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{21}(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$$

En general, se cumple que  $M_{12} = M_{21} = M$ .



$$u_1(t) = \pm L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

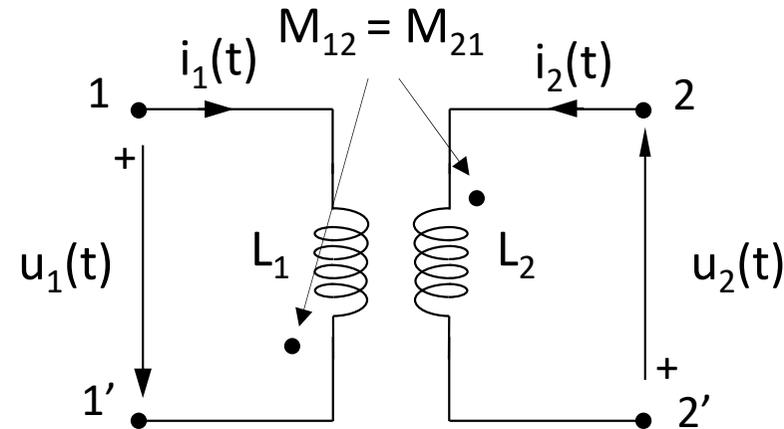
$$u_2(t) = \pm L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$$

## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- *Signo de las ecuaciones de definición:*
  - **Términos que contienen  $L_j$ :** Se miran las referencias de tensión e intensidad sobre la bobina “i”. Si ambas llevan el mismo sentido sobre esta bobina, el signo del término es “+”. En caso contrario, signo “-”.
  - **Términos que contienen  $M_{ij}$ :** Se miran las referencias de la tensión “i”, la intensidad “j” y los terminales correspondientes. Si la intensidad “j” entra por terminal marcado de la bobina “j” (se puede razonar de la misma manera en el caso de que le intensidad “j” salga por el terminal marcado), la intensidad equivalente que circulando por la bobina “i” crearía el mismo efecto, sería una intensidad que entrase por el terminal marcado de la bobina “i”. Si dicha intensidad equivalente en la bobina “i” lleva sobre ella el mismo sentido que le referencia de la tensión “i”, el signo del término es positivo. En caso contrario, signo “-”.

## 2.1.2.1. Bobinas acopladas magnéticamente

- *Ejemplo:*



$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

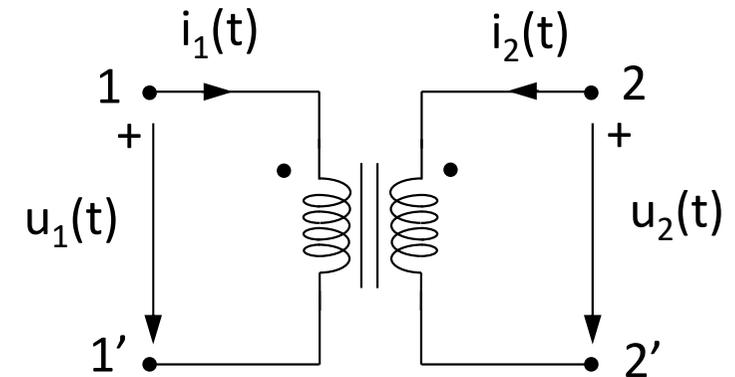
$$u_2(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$$

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- *Es un elemento constituido por dos o más bobinas acopladas magnéticamente.*
- *El acoplamiento magnético entre las bobinas se consigue gracias a que éstas están arrolladas sobre un núcleo encargado de conducir el campo magnético que crean las intensidades que pueden circular por dichas bobinas.*
- *Si la relación entre las intensidades que circulan por las bobinas y el flujo magnético en el núcleo es lineal, se hablará del transformador lineal.*

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- *Un transformador se considera ideal cuando cumple las siguientes condiciones:*
  - 1) Las bobinas que lo forman carecen de resistencia.
  - 2) No existe flujo de dispersión en las bobinas. El acoplamiento entre ellas es perfecto.
  - 3) La permeabilidad magnética del medio que conduce el campo magnético es infinita.
  - 4) Dicho núcleo magnético carece de histéresis y en él no se inducen corrientes parásitas.
  - 5) No existen capacidades parásitas entre las espiras de las bobinas ni entre éstas.



$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- Ecuaciones de definición:

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

↓  $\phi_1(t) = \phi_{s1}(t) + \phi_m(t), \phi_2(t) = \phi_{s2}(t) + \phi_m(t)$

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_{s1}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt}$$

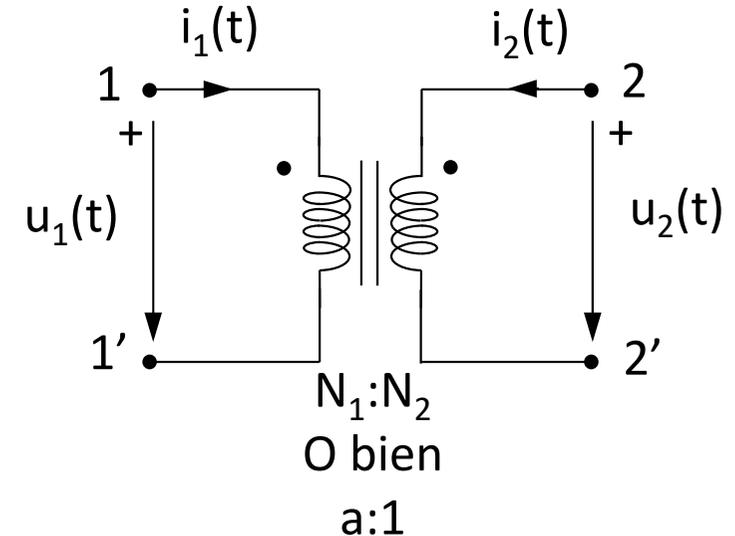
$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_{s2}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt}$$

↓ No existen flujos de dispersión

$$u_1(t) = +N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = +N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt}$$

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \pm \frac{N_1}{N_2}$$



$$a = \frac{N_1}{N_2} : \text{Relación de transformación}$$

1ª Ec. de definición

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \pm a$$

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- Ecuaciones de definición:

- Ley de Ampère:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum N \cdot i(t) \quad H \cdot l = \sum N \cdot i(t)$$

↓  $\phi = B \cdot S \quad B = \mu \cdot H$

$$\phi_m(t) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} = \sum N \cdot i(t)$$

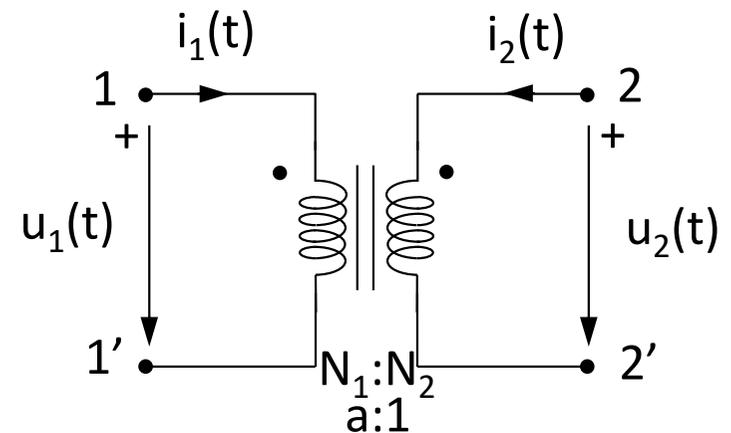
↓ Permeabilidad infinita

$$N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \cdot i_1(t) \pm N_2 \cdot i_2(t) = 0$$

**No confundir  $a:1$  con  $a=1$**

$$a:1 \Leftarrow \frac{N_1}{N_2} : 1 \Leftarrow N_1 : N_2$$

$$a=1 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 1 \Rightarrow N_1 = N_2$$



2ª Ec. de definición

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- *Determinación del signo en ecuaciones de definición:*

- Primera ecuación  $\left( \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \pm \frac{N_1}{N_2} \right)$

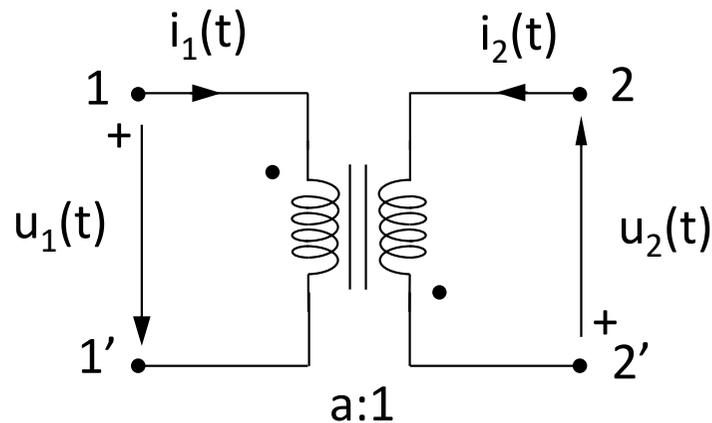
- Si ambas referencias de tensión parten de o llegan a terminales correspondientes, signo “+”. En caso contrario, signo “-”.

- Segunda ecuación  $( N_1 \cdot i_1(t) \pm N_2 \cdot i_2(t) = 0 )$

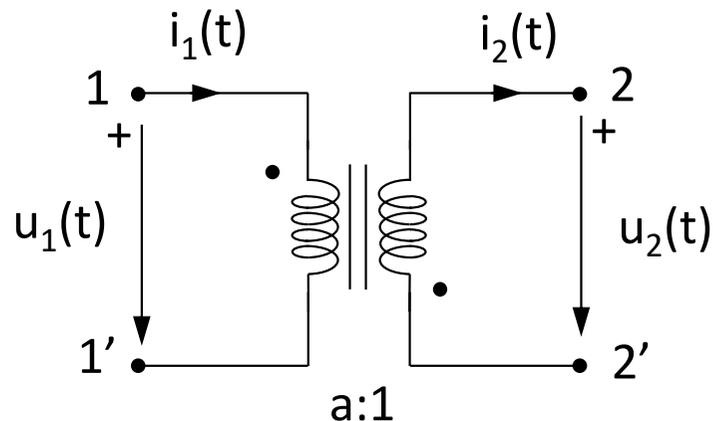
- Si ambas referencias de intensidad entran o salen por terminales correspondientes, signo “+”. En caso contrario, signo “-”.

## 2.1.2.2. Transformador ideal

- Ejemplos:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = + \frac{N_1}{N_2} = +a \\ N_1 i_1(t) - N_2 i_2(t) = 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = - \frac{N_1}{N_2} = -a \\ N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) = 0 \end{array} \right.$$

## **2.2. Elementos reales de circuitos**

## 2.2.1. Resistencia

### • 2.2.1. Resistencia

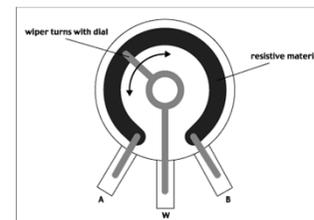
– En el mercado es posible encontrar resistencias de muy diversos tipos:

- Fijas

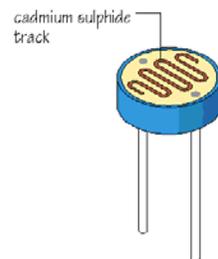


- Variables:

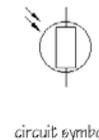
- Potenciómetros
- Con la tensión
- Con la temperatura
- Con la luz
- Etc.



Potenciómetros



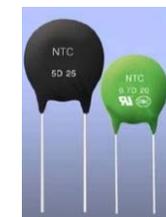
LDR (luz)



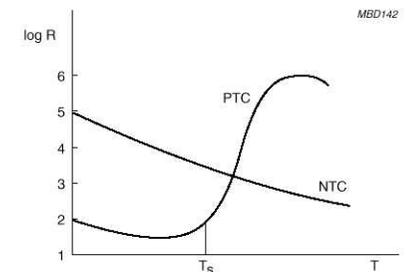
circuit symbol



VDR  
(tensión)



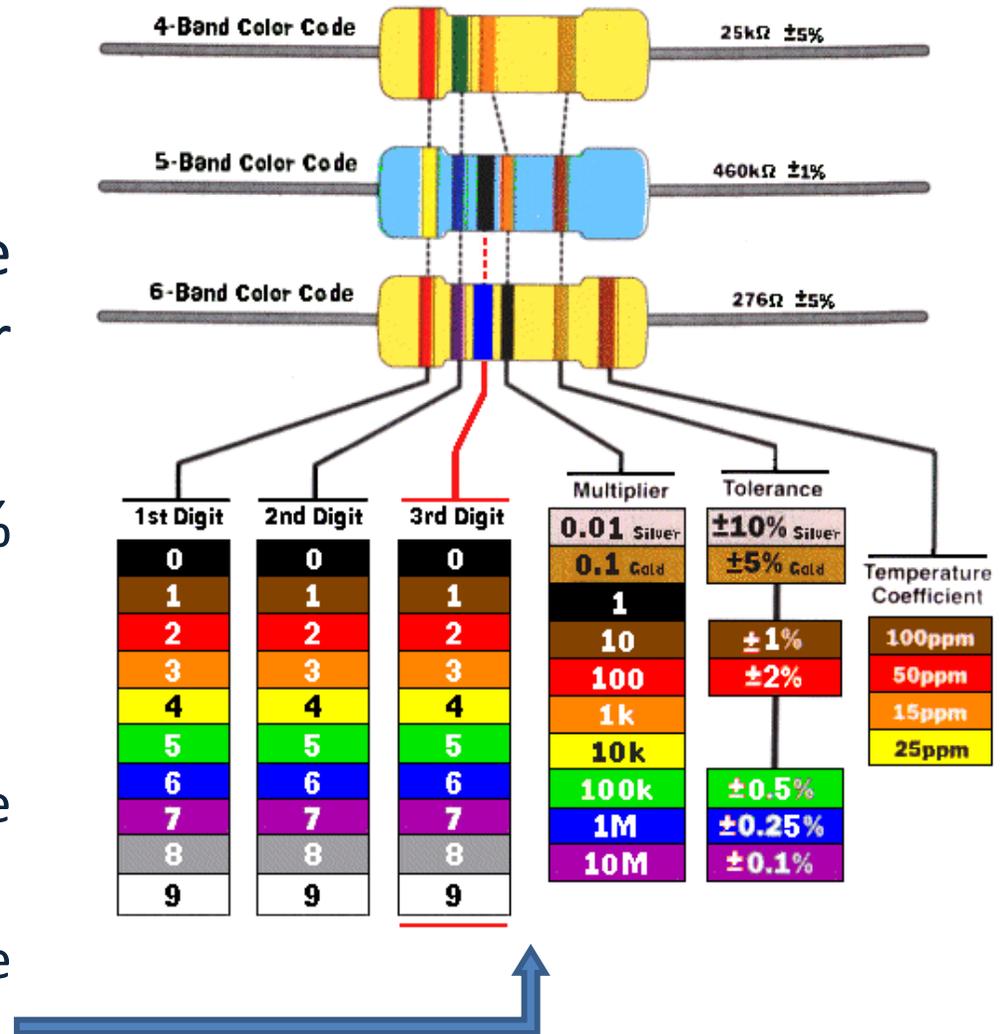
NTC, PTC  
(temperatura)



## 2.2.1. Resistencia

– Parámetros de una resistencia:

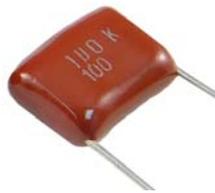
- Resistencia
- Potencia máxima que es capaz de disipar (de  $\frac{1}{4}$  W,  $\frac{1}{2}$  W, 1 W, etc)
- Tolerancia (desde 0,5% hasta 10%)
- Los valores se indican:
  - Escritos en la superficie ( $100 \Omega \pm 10\%$ )
  - Mediante franjas de colores.



## 2.2.2. Condensador

- 2.2.2. Condensador

- Diferentes tipos: electrolíticos, de papel, de poliéster, cerámicos, etc, (según el dieléctrico).



Poliéster



Polipropileno



Electrolítico



Tántalo

- Parámetros de un condensador:

- Capacidad.
- Tensión máxima que es capaz de soportar sin perforarse.
- Tolerancia (mediante valores o colores).

## 2.2.3. Bobina

- 2.2.3. Bobina

- La bobina es el elemento en el que su comportamiento real más se aleja del comportamiento ideal.
- Existen diferentes tipos según su núcleo.



Núcleo de aire



Núcleo  
ferromagnético



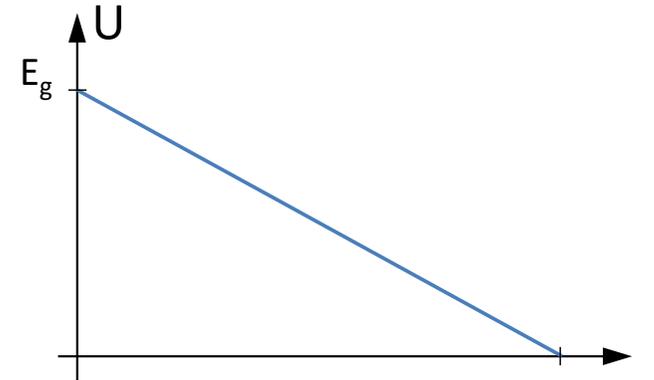
Núcleo toroidal



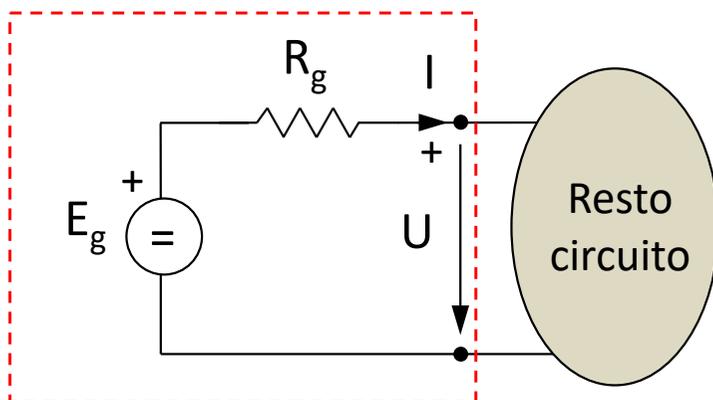
Multitoma

## 2.2.4. Fuente real de tensión

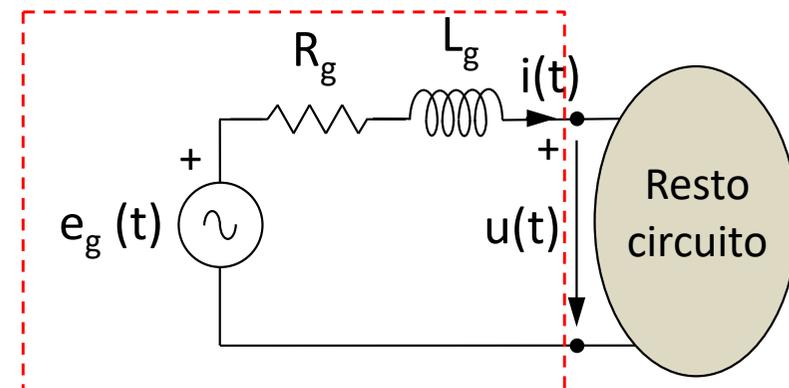
- 2.2.4. Fuente real de tensión
  - En una fuente independiente de tensión **real**, se observa que la tensión en sus bornes disminuye conforme aumenta la intensidad que se solicita a dicha fuente.



$$u(t) = e_g(t) - R_g \cdot i(t)$$



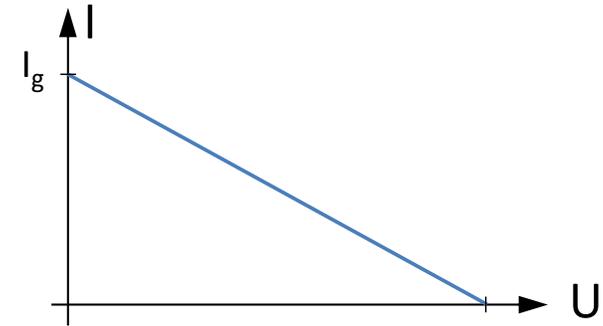
Circuito equivalente de una fuente real de tensión continua



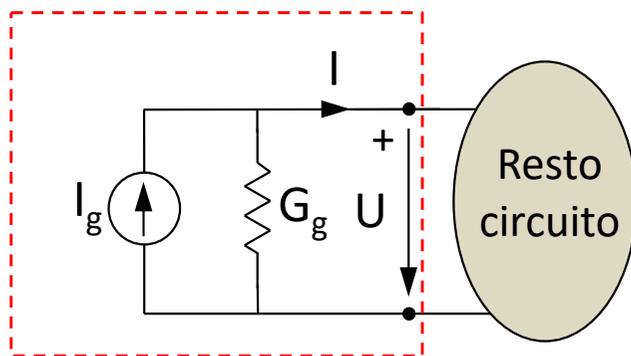
Circuito equivalente de una fuente real de tensión sinusoidal

## 2.2.5. Fuente real de intensidad

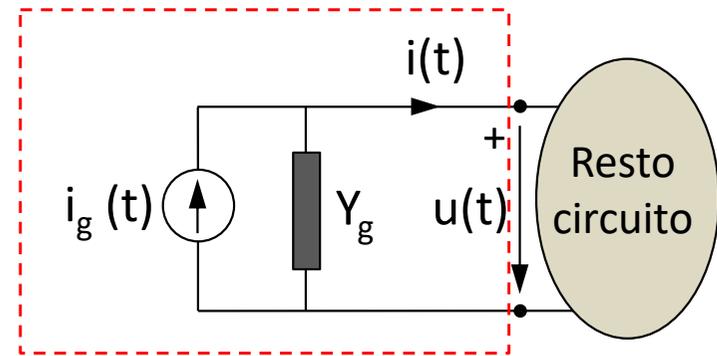
- 2.2.5. Fuente real de intensidad
  - En una fuente *real* de intensidad se observa que conforme aumenta la tensión entre sus bornes va disminuyendo la intensidad que suministra.



$$i(t) = i_g(t) - G_g \cdot u(t)$$



Circuito equivalente de una fuente real de intensidad continua

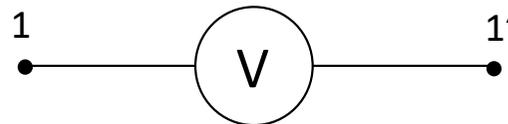


Circuito equivalente de una fuente real de intensidad sinusoidal

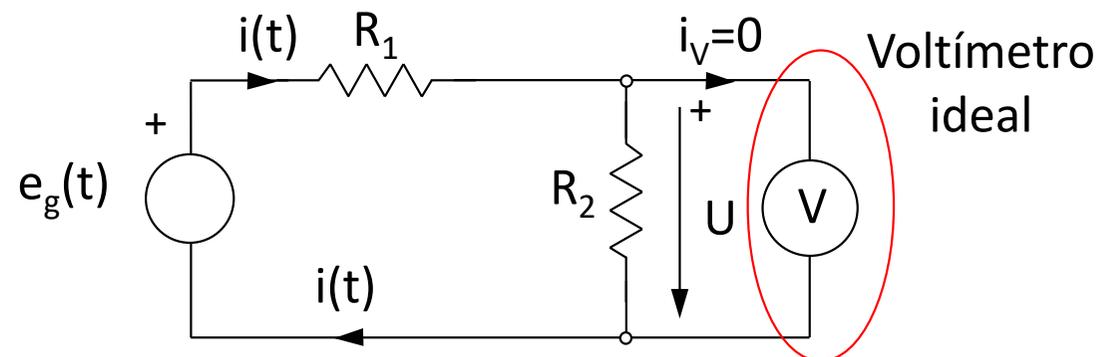
## 2.2.6. Voltímetro

- 2.2.6. Voltímetro

- Instrumento que sirve para medir la tensión existente entre dos puntos de un circuito eléctrico.

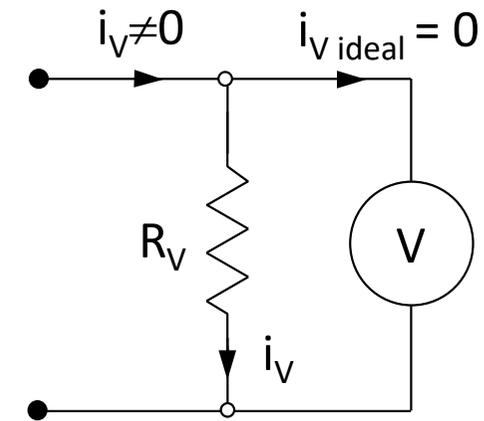


- Se conecta en paralelo con los dos puntos entre los que se desea medir la tensión.



## 2.2.6. Voltímetro

- **Comportamiento ideal del voltímetro:** No circula intensidad por el voltímetro.
- **Comportamiento real del voltímetro:** Circula cierta intensidad por el voltímetro. Este comportamiento se puede modelar colocando una resistencia interna ( $R_V$ ) en paralelo con un voltímetro ideal.
- Voltímetro ideal  $\Rightarrow$  Voltímetro real con resistencia interna infinita



Circuito equivalente de un voltímetro real

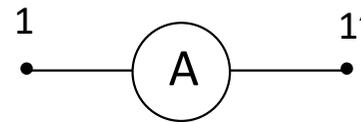
$R_V$  viene indicada por el fabricante

Si  $R_V = \infty$   
Voltímetro ideal

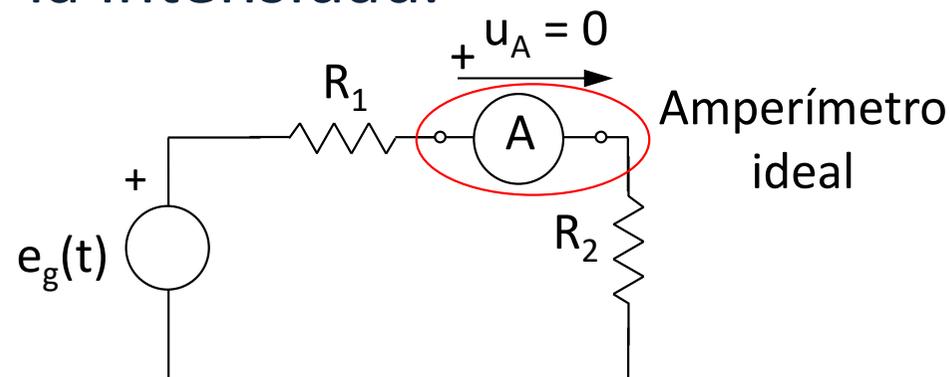
## 2.2.7. Amperímetro

- 2.2.7. Amperímetro

- Instrumento empleado para medir la intensidad que circula por un circuito.

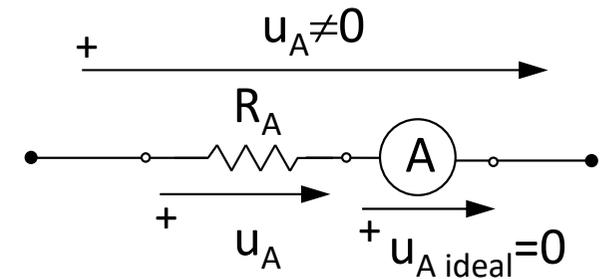


- Se conecta en serie con la rama del circuito en la que se desea medir la intensidad.



## 2.2.7. Amperímetro

- **Comportamiento ideal del amperímetro:** No hay caída de tensión entre sus bornes.
- **Comportamiento real del amperímetro:** Se produce una cierta caída de tensión entre sus bornes. Este comportamiento se puede modelar colocando una resistencia interna ( $R_A$ ) en serie con un amperímetro ideal.
- Amperímetro ideal  $\Rightarrow$  Amperímetro real con resistencia interna cero.



Circuito equivalente de un amperímetro real

$R_A$  viene indicada por el fabricante

Si  $R_A = 0$   
Amperímetro  
ideal

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección *Textos Docentes*, vol. 58. *Prensas Universitarias de Zaragoza*.

# ***Tema 3***

## *Energía y potencia*

Curso OCW de:

***Fundamentos de Electrotecnia***



**Centro Universitario  
de la Defensa Zaragoza**

## **Tema 3.- Energía y Potencia.**

3.1.-Definiciones.

3.2.-Energía y potencia en dipolos.

3.2.1.-Resistencia.

3.2.2.-Condensador.

3.2.3.-Bobina.

3.2.4.-Fuente ideal de tensión.

3.2.5.-Fuente ideal de intensidad.

3.3.-Energía y potencia en cuadripolos.

3.3.1.-Bobinas acopladas magnéticamente.

3.3.2.-Transformador ideal.

## ***3.1. Definiciones***

## 3.1. Definiciones

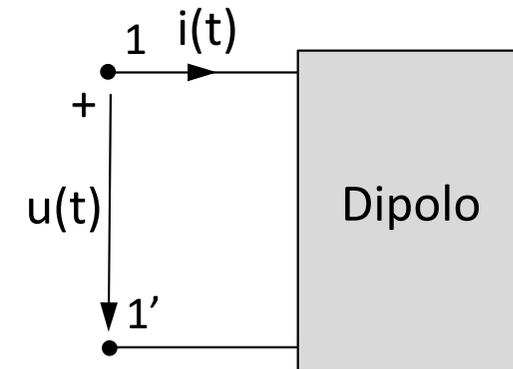
- Para las referencias de la figura, se define la **potencia absorbida** como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- Y la **energía absorbida** como:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = w(t_0) + \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau$$

(suponiendo que  $w(-\infty) = 0$ )



Recordar que:

- Si  $p_{abs}(t) > 0$ , el dipolo *absorbe* potencia.
- Si  $p_{abs}(t) < 0$ , el dipolo *cede* potencia.
- Se cumple que:

$$p_{ced}(t) = -p_{abs}(t)$$

## ***3.2. Energía y potencia en dipolos***

## 3.2.1. Resistencia

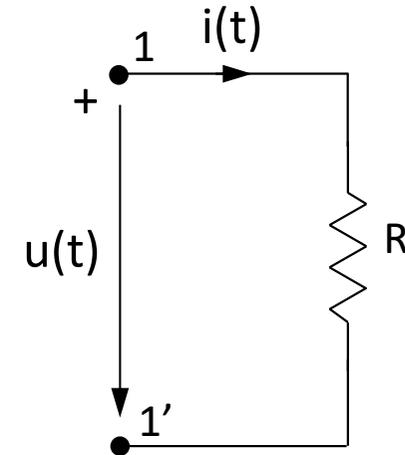
- La **potencia absorbida** por una resistencia, para las referencias dadas, se calcula como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad \left[ \begin{array}{l} u(t) = R \cdot i(t) \\ i(t) = G \cdot u(t) \end{array} \right]$$

$$p_{abs}(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} = G \cdot u^2(t)$$

- La **energía absorbida** por una resistencia se calcula:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t R \cdot i^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{u^2(\tau)}{R} d\tau$$



La energía absorbida por una resistencia:

- Es siempre positiva
- Se disipa en forma de calor: **Ley de Joule**

## 3.2.2. Condensador

- La **potencia absorbida** por un condensador es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad \left[ i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \right]$$

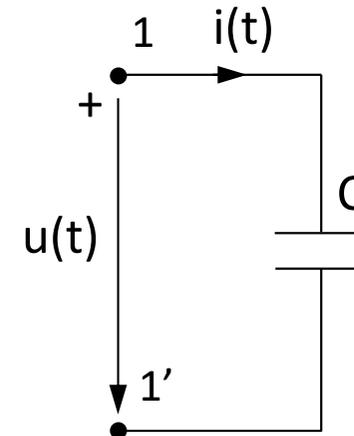
$$p_{abs}(t) = C \cdot u(t) \frac{du(t)}{dt}$$

- La **energía almacenada** por un condensador es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t C \cdot u(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} C \cdot u \, du = \frac{1}{2} C [u^2(t) - u^2(-\infty)]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t)$$

(suponiendo que  $u(-\infty) = 0$ )



La **potencia que cede** un condensador siempre es a costa de la *energía que ha almacenado* en forma de campo eléctrico entre sus placas.

La **energía almacenada** en un condensador *sólo depende del valor de la tensión en ese momento* y no de la forma en la que varía esta tensión.

### 3.2.3. Bobina

- La **potencia absorbida** por una bobina es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad \left[ u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \right]$$

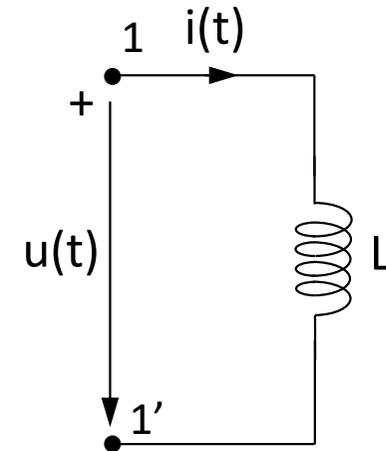
$$p_{abs}(t) = L \cdot i(t) \frac{di(t)}{dt}$$

- La **energía almacenada** por una bobina es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t L \cdot i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} L \cdot i \, di = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(-\infty)]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)$$

(suponiendo que  $i(-\infty) = 0$ )



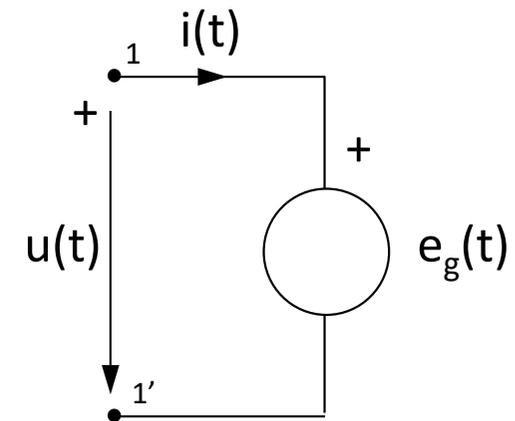
La **potencia que cede** una bobina siempre es a costa de la **energía que ha almacenado** en forma de campo magnético en su núcleo. La **energía almacenada** en una bobina *sólo depende del valor de la intensidad en ese momento* y no de la forma en la que varía esta intensidad.

## 3.2.4. Fuente de tensión

- La **potencia absorbida** por una fuente ideal de tensión es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [u(t) = e_g(t)]$$

$$p_{abs}(t) = e_g(t) \cdot i(t)$$



- La **energía almacenada** por una fuente de tensión es:

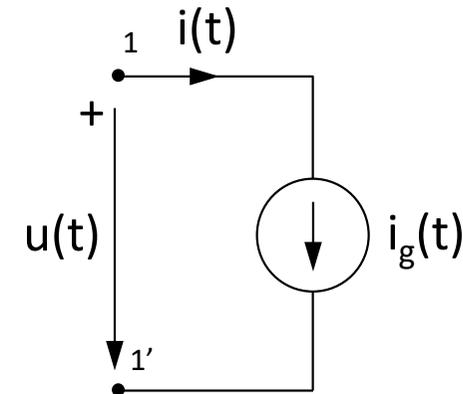
$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e_g(\tau) \cdot i(\tau) d\tau$$

## 3.2.5. Fuente de intensidad

- La **potencia absorbida** por una fuente ideal de intensidad es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [i(t) = i_g(t)]$$

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i_g(t)$$



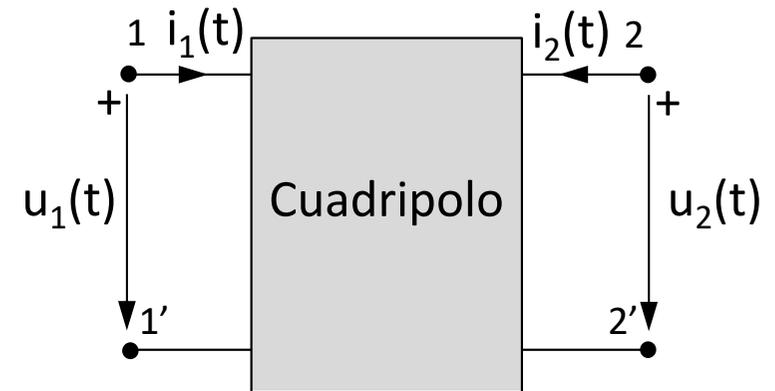
- La **energía almacenada** por una fuente de intensidad es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i_g(\tau) d\tau$$

### ***3.3. Energía y potencia en cuadripolos***

### 3.3. Energía y potencia en cuadripolos

- Un cuadripolo puede absorber potencia por cada par de terminales
- Así pues, para las referencias de la figura, se define la potencia absorbida como:



$$p_{abs}(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t)$$

- Y la energía absorbida como:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t [u_1(\tau) \cdot i_1(\tau) + u_2(\tau) \cdot i_2(\tau)] d\tau$$

## 3.3.1. Bobinas acopladas magnéticamente

– La **potencia absorbida** es:

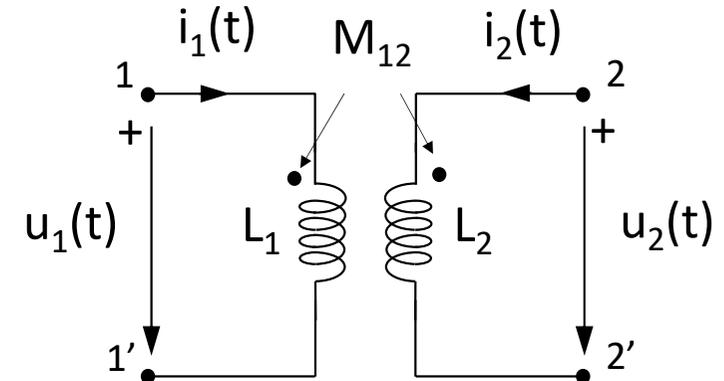
$$p_{abs}(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t)$$

$$p_{abs}(t) = L_1 i_1(t) \frac{di_1(t)}{dt} + M \left( i_1(t) \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \frac{di_1(t)}{dt} \right) + L_2 i_2(t) \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$p_{abs}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) \cdot i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \right)$$

– La **energía almacenada** es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) \cdot i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$$



$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

La **potencia que cede** siempre es a costa de la *energía que ha almacenado* en forma de campo magnético en su núcleo.

## 3.3.2. Transformador ideal

– La *potencia absorbida* es:

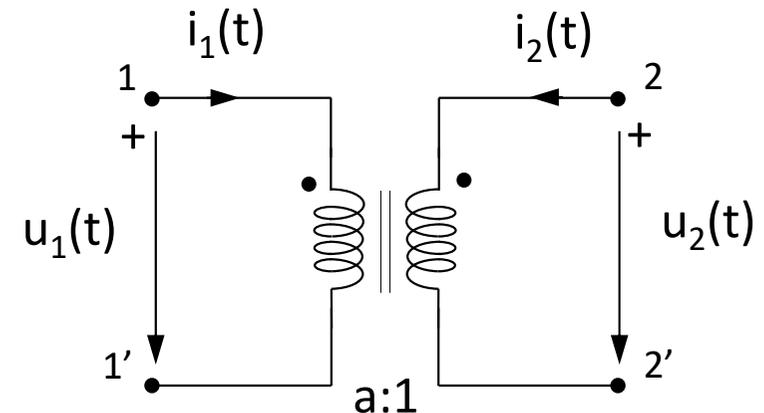
$$p_{abs}(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) + u_2(t) \cdot i_2(t)$$

$$p_{abs}(t) = a \cdot u_2(t) \left( -\frac{1}{a} i_2(t) \right) + u_2(t) \cdot i_2(t)$$

$$p_{abs}(t) = 0$$

– La *energía almacenada* es:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = 0$$



$$u_1(t) = a \cdot u_2(t)$$

$$i_1(t) = -\frac{1}{a} i_2(t)$$

La *potencia que absorbe* el primario de un transformador ideal es **igual** a la *potencia que cede* el secundario.

El **transformador ideal** *no absorbe ni cede potencia ni almacena energía*.

## ***3.4. Balance de potencia en un circuito***

### 3.4. Balance de potencia en un circuito

- Para cualquier circuito se cumple que, en todo instante, la suma algebraica de la potencia absorbida por todos sus elementos es siempre igual a cero.

$$\sum p_{abs}(t) = 0$$

$$\sum p_{ced}(t) \Big|_{\text{elementos activos}} = \sum p_{abs}(t) \Big|_{\text{elementos pasivos}}$$

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección *Textos Docentes*, vol. 58. *Prensas Universitarias de Zaragoza*.

# ***Tema 4***

## *Métodos de análisis de circuitos*

Curso OCW de:

***Fundamentos de Electrotecnia***



**Centro Universitario  
de la Defensa Zaragoza**

## **Tema 4.- Métodos de análisis de circuitos.**

4.1.- Introducción.

4.2.- Impedancias y admitancias operacionales.

4.3.- Representación de los circuitos.

4.4.- Equivalencias entre ramas.

4.4.1.- Equivalencia entre fuentes reales.

4.4.2.- Elementos en paralelo y en serie con fuentes ideales.

4.5.- Métodos de análisis de circuitos.

4.5.1.- Acerca del número de ecuaciones e incógnitas.

4.5.2.- Método de análisis por nudos.

4.5.3.- Método de análisis por mallas.

4.6. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales.

4.6.1.- Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente.

4.6.2.- Circuitos con transformadores ideales.

## ***4.1. Introducción***

## 4.1. Introducción

- *Analizar un circuito* consiste en determinar la tensión y la intensidad, en función del tiempo, en cada uno de los elementos que componen dicho circuito.
- **Datos iniciales:**
  - la configuración del circuito,
  - el valor de las fuentes de tensión e intensidad del circuito,
  - el valor de los elementos que constituyen el circuito,
  - las tensiones e intensidades iniciales en cada una de las ramas del circuito.
- *A partir de estos datos, mediante las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de definición de los elementos, se obtiene la **solución del circuito** (tensiones e intensidades en cada elemento del circuito).*



- *En este capítulo se van a estudiar métodos que sistematizan el análisis de circuitos.*

## ***4.2. Impedancias y admitancias operacionales***

## 4.2.1. Definición de impedancia y admitancia operacional

- Se define el operador  $D$  (*operador derivada*) como:  $D = \frac{d}{dt}$

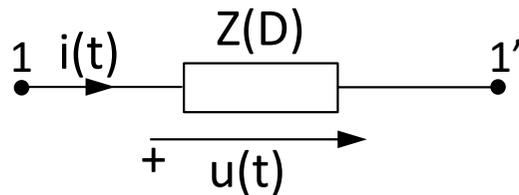
- y su inversa como:  $\frac{1}{D} = \int dt$

Ecuaciones de definición de los distintos elementos en función del operador  $D$

Resistencia	Bobina	Condensador
$u(t) = R \cdot i(t)$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$
$u(t) = R \cdot i(t)$	$u(t) = L \cdot D \cdot i(t)$	$i(t) = C \cdot D \cdot u(t)$
$i(t) = G \cdot u(t)$	$i(t) = \frac{1}{L \cdot D} \cdot u(t)$	$u(t) = \frac{1}{C \cdot D} \cdot i(t)$

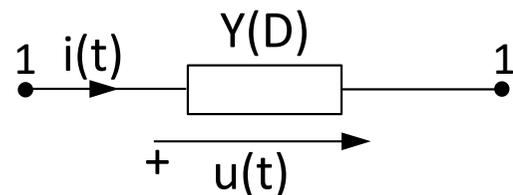
# 4.2.1. Definición de impedancia y admitancia operacional

- En general:



$$u(t) = Z(D) \cdot i(t)$$

$Z(D)$ : impedancia operacional



$$i(t) = Y(D) \cdot u(t)$$

$Y(D)$ : admitancia operacional

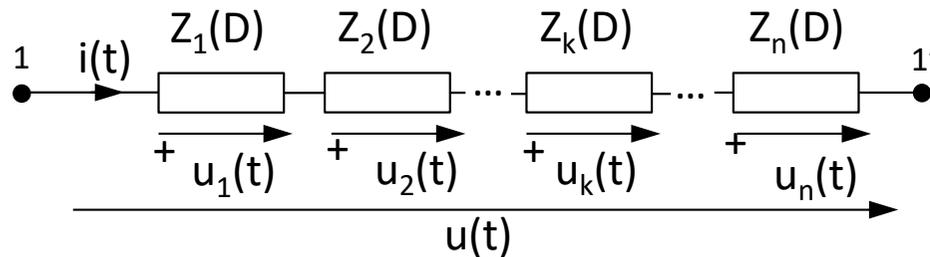
Se cumple que:

$$Z(D) = \frac{1}{Y(D)}$$

	Resistencia	Bobina	Condensador
Impedancia operacional	$Z(D) = R$	$Z(D) = L \cdot D$	$Z(D) = \frac{1}{C \cdot D}$
Admitancia operacional	$Y(D) = G$	$Y(D) = \frac{1}{L \cdot D}$	$Y(D) = C \cdot D$

## 4.2.2. Asociación de impedancias

A) En serie:



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_k(t) + \dots + u_n(t)$$

$$u(t) = Z_1(D) \cdot i(t) + Z_2(D) \cdot i(t) + \dots + Z_k(D) \cdot i(t) + \dots + Z_n(D) \cdot i(t)$$

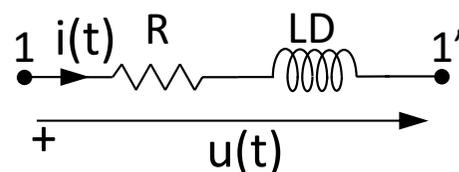
$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^n Z_k(D) \cdot i(t) \\ u(t) &= Z_{eq}(D) \cdot i(t) \end{aligned} \right\} \boxed{Z_{eq}(D) = \sum_{k=1}^n Z_k(D)}$$

$$\left. \begin{aligned} u_k(t) &= Z_k(D) \cdot i(t) \\ u(t) &= Z_{eq}(D) \cdot i(t) \end{aligned} \right\} \frac{u_k(t)}{u(t)} = \frac{Z_k(D)}{\sum_{k=1}^n Z_k(D)}$$

$$\boxed{u_k(t) = u(t) \frac{Z_k(D)}{\sum_{k=1}^n Z_k(D)}}$$

*Divisor de tensión*

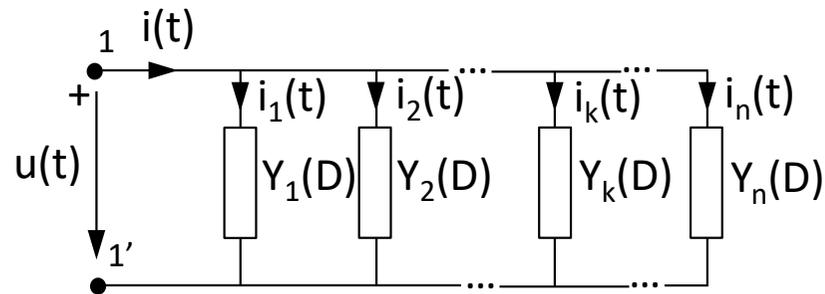
Ejemplo:



$$\left. \begin{aligned} Z_R(D) &= R \\ Z_L(D) &= LD \end{aligned} \right\} Z_T(D) = Z_R(D) + Z_L(D) = R + LD$$

## 4.2.2. Asociación de impedancias

B) En paralelo:



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_k(t) + \dots + i_n(t)$$

$$i(t) = Y_1(D) \cdot u(t) + Y_2(D) \cdot u(t) + \dots + Y_k(D) \cdot u(t) + \dots + Y_n(D) \cdot u(t)$$

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \sum_{k=1}^n Y_k(D) \cdot u(t) \\ i(t) &= Y_{eq}(D) \cdot u(t) \end{aligned} \right\}$$

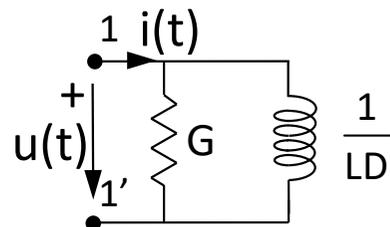
$$Y_{eq}(D) = \sum_{k=1}^n Y_k(D)$$

$$\left. \begin{aligned} i_k(t) &= Y_k(D) \cdot u(t) \\ i(t) &= Y_{eq}(D) \cdot u(t) \end{aligned} \right\} \frac{i_k(t)}{i(t)} = \frac{Y_k(D)}{\sum_{k=1}^n Y_k(D)}$$

$$i_k(t) = i(t) \frac{Y_k(D)}{\sum_{k=1}^n Y_k(D)}$$

*Divisor de intensidad*

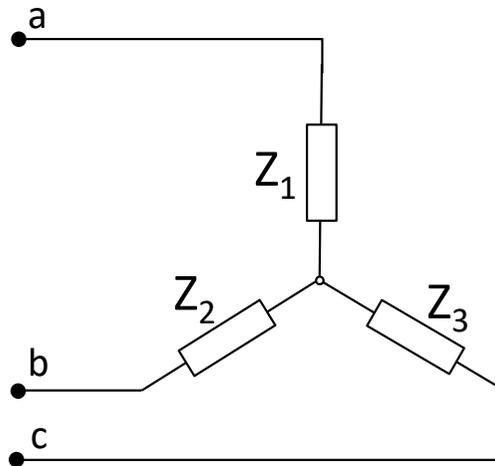
Ejemplo:



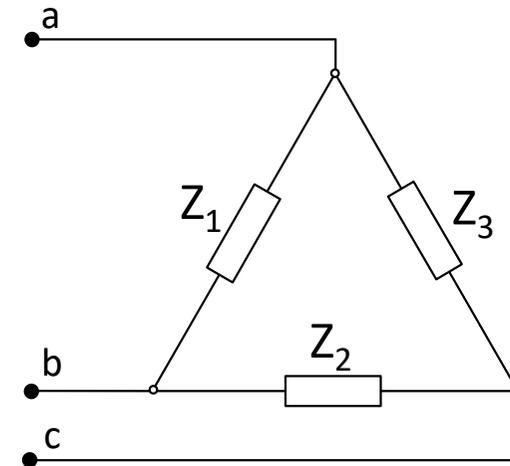
$$\left. \begin{aligned} Y_R(D) &= G \\ Y_L(D) &= \frac{1}{LD} \end{aligned} \right\} Y_T(D) = Y_R(D) + Y_L(D) = G + \frac{1}{LD} = \frac{1 + GLD}{LD}$$

## 4.2.2. Asociación de impedancias

### C) Asociación en estrella y en triángulo:



Asociación en estrella

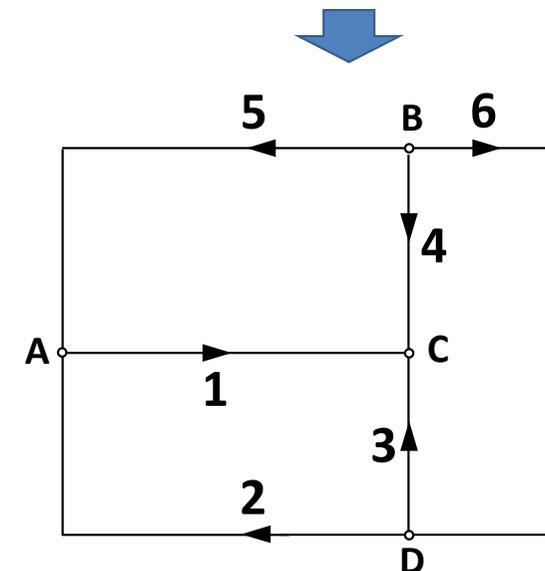
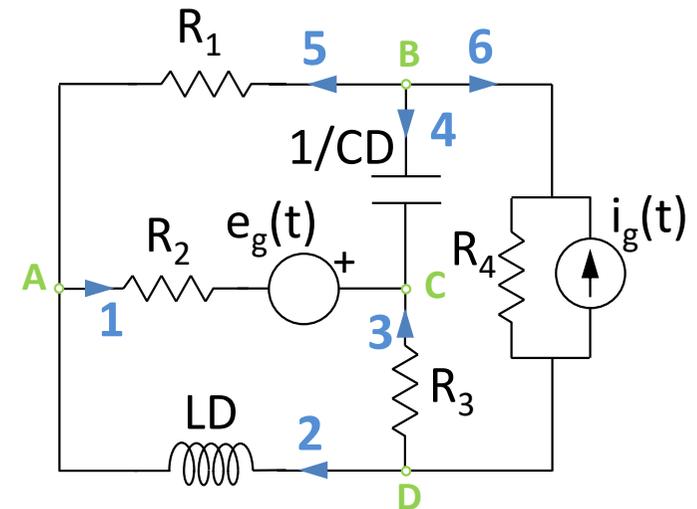


Asociación en triángulo

## ***4.3. Representación de los circuitos***

## 4.3. Representación de circuitos

- **Definiciones:**
  - **Rama:** Elemento o grupo de elementos de un circuito que presenta dos terminales y del que se puede conocer su ecuación de definición. En el circuito de la figura podemos considerar que tenemos 6 ramas (se podrían contar hasta 8, en función de si se consideran las fuentes como reales o bien como ideales)
  - **Nudo:** Punto de unión de dos o más ramas. El circuito de la figura tiene 4 nudos (A, B, C y D).
  - **Grafo reticular:** Representación de un circuito resultado de sustituir cada rama de su esquema por un segmento orientado.
  - **Lazo:** Conjunto de ramas de un circuito que forman una línea cerrada (1-4-5; 1-2-3; 3-4-6; 2-3-4-5; 2-5-6; etc.).
  - **Malla:** Lazo de un circuito que no contiene a otro lazo en su interior. En el circuito de la figura sólo hay tres mallas: (1-2-3; 1-4-5; 3-4-6).



Grafo reticular

## ***4.4. Equivalencias entre ramas***

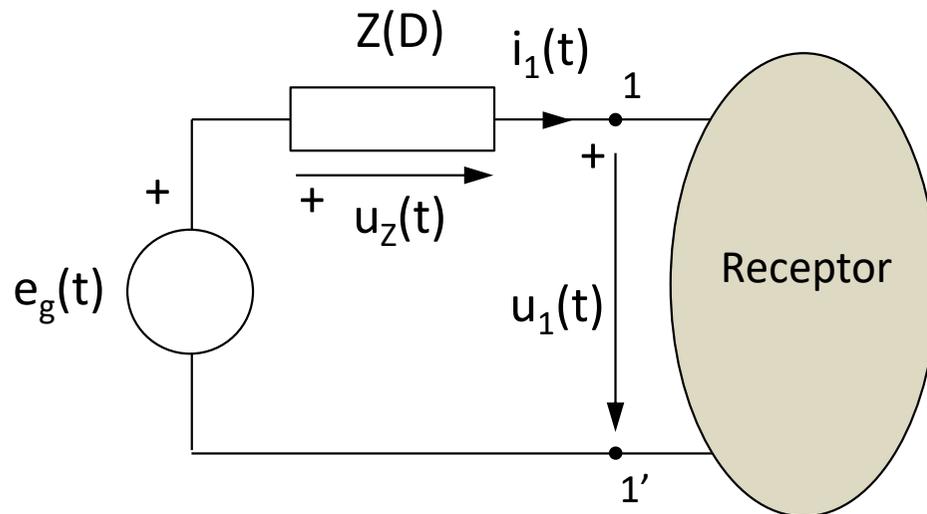
## 4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales

- *Dos dipolos activos se dicen equivalentes respecto de sus terminales si, al cargarlos con el mismo receptor, la tensión entre sus bornes y la intensidad que entra (sale) de ellos es la misma.*
- *Sean una fuente real de tensión y una fuente real de intensidad. Ambas fuentes se conectan al mismo receptor y se calcula la tensión entre sus terminales en estas condiciones:*

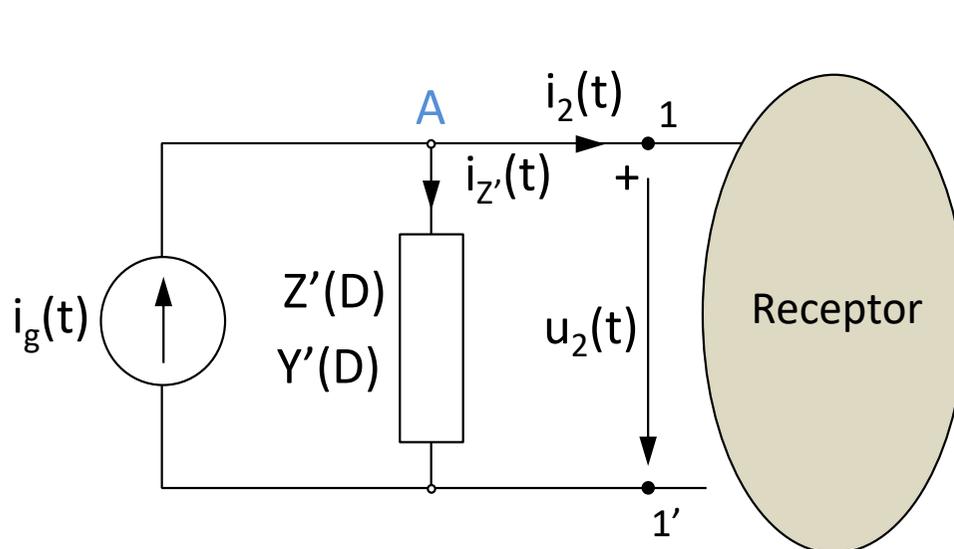


Diapositiva siguiente

# 4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales



$$u_1(t) = e_g(t) - u_z(t) = e_g(t) - Z(D) \cdot i_1(t)$$



1ª LK nudo A  $\nearrow i_g(t) - i_2(t)$

$$u_2(t) = Z'(D) \cdot i_{z'}(t) = Z'(D)(i_g(t) - i_2(t)) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) \cdot i_2(t)$$

## 4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales

Fuente de tensión:  $u_1(t) = e_g(t) - Z(D) \cdot i_1(t)$

Fuente de intensidad:  $u_2(t) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) \cdot i_2(t)$

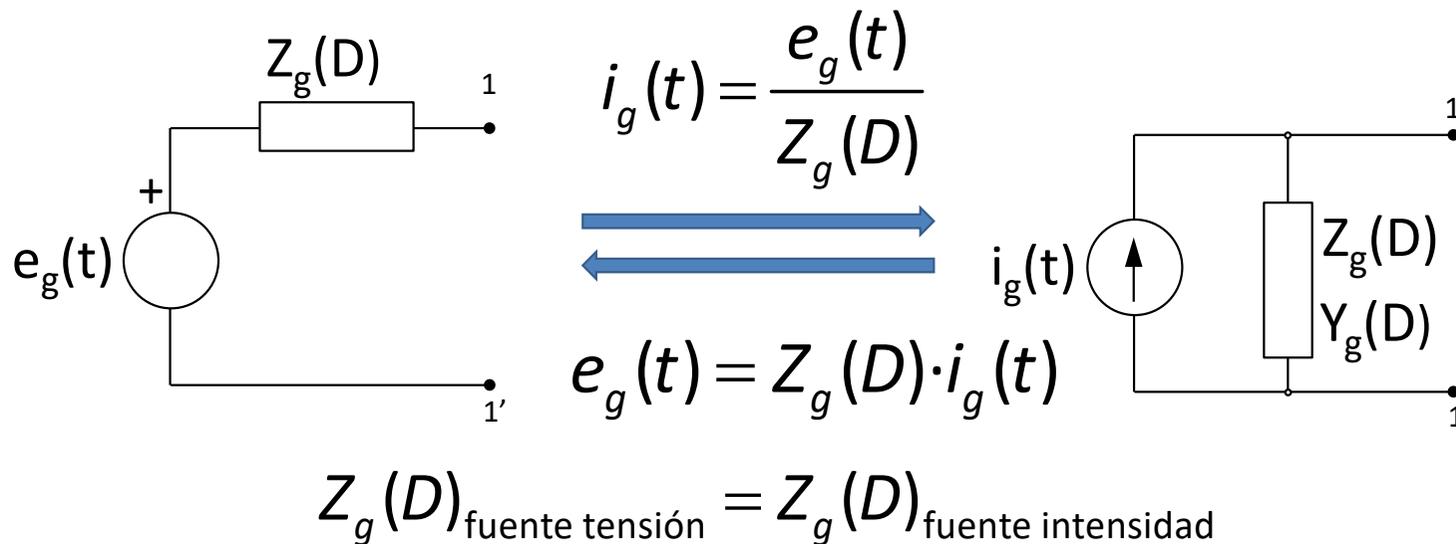
Para que las fuentes sean equivalentes: 
$$\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = u(t) \\ i_1(t) = i_2(t) = i(t) \end{cases}$$

Entonces:  $e_g(t) - Z(D) \cdot i(t) = Z'(D) \cdot i_g(t) - Z'(D) \cdot i(t)$



$$\begin{aligned} Z(D) &= Z'(D) \\ e_g(t) &= Z(D) \cdot i_g(t) \end{aligned}$$

## 4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales

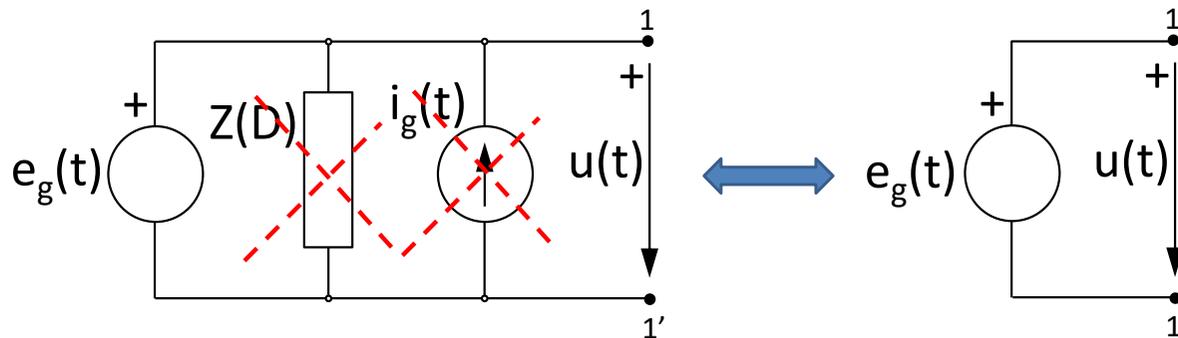


- La flecha de la fuente de intensidad ha de apuntar hacia el terminal marcado con el “+” de la fuente de tensión

• **Atención:** La equivalencia entre fuentes reales es sólo válida para el resto de los elementos del circuito al cual están conectadas, no para los elementos que forman la fuente real.

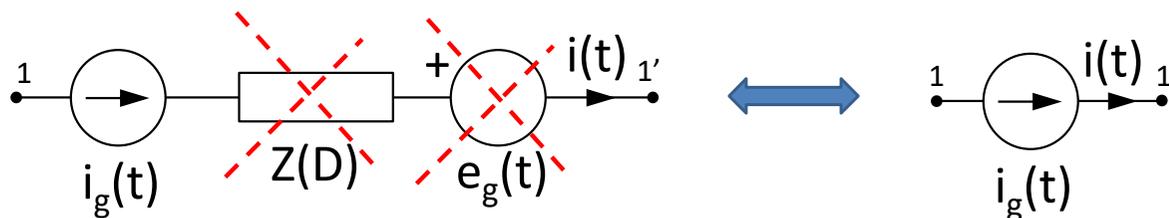
## 4.4.2. Elementos en paralelo y en serie con fuentes ideales

- Elementos en paralelo con una **fente ideal** de tensión



En ambos casos:  
 $u(t) = e_g(t)$

- Elementos en serie con una **fente ideal** de intensidad



En ambos casos:  
 $i(t) = i_g(t)$

**Atención:** Estas equivalencias son sólo válidas para los elementos del resto del circuito, no para los elementos que intervienen en ella.

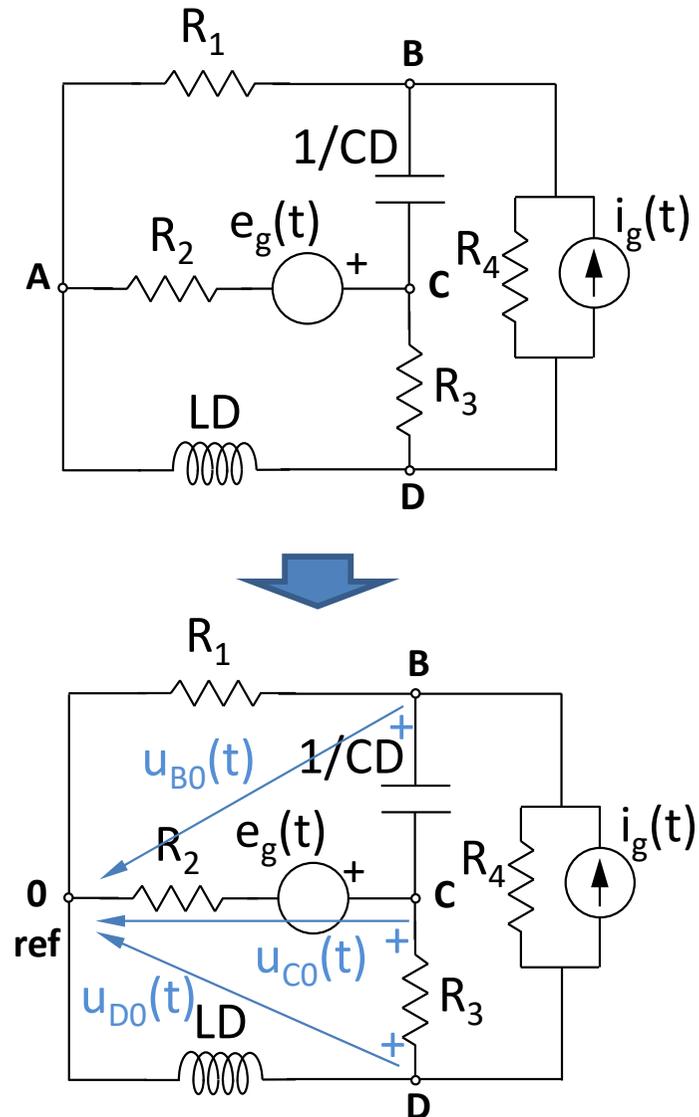
## ***4.5. Métodos de análisis de circuitos***

## 4.5.1. Acerca del número de ecuaciones e incógnitas

- *Balance de ecuaciones e incógnitas que se tienen al realizar el análisis de un circuito:*
  - Incógnitas:
    - Si el circuito tiene  $r$  ramas, tendremos  **$2r$  incógnitas** correspondientes a la tensión y la intensidad de cada rama.
  - Ecuaciones linealmente independientes:
    - De las ecuaciones de definición de cada rama se obtienen  $r$  ecuaciones linealmente independientes.
    - Mediante la aplicación de la Ley de Kirchhoff de las intensidades se pueden obtener  $n-1$  ( $n =$  número de nodos del circuito) ecuaciones linealmente independientes.
    - Mediante la aplicación de la Ley de Kirchhoff de las tensiones se pueden obtener  $r-(n-1)$  ecuaciones linealmente independientes.
  - Número de ecuaciones lin. independientes:  $r+(n-1)+[r-(n-1)] = \mathbf{2r}$
- *Si número de ecuaciones linealmente independientes = número de incógnitas  $\Rightarrow$  **El sistema tiene solución única***

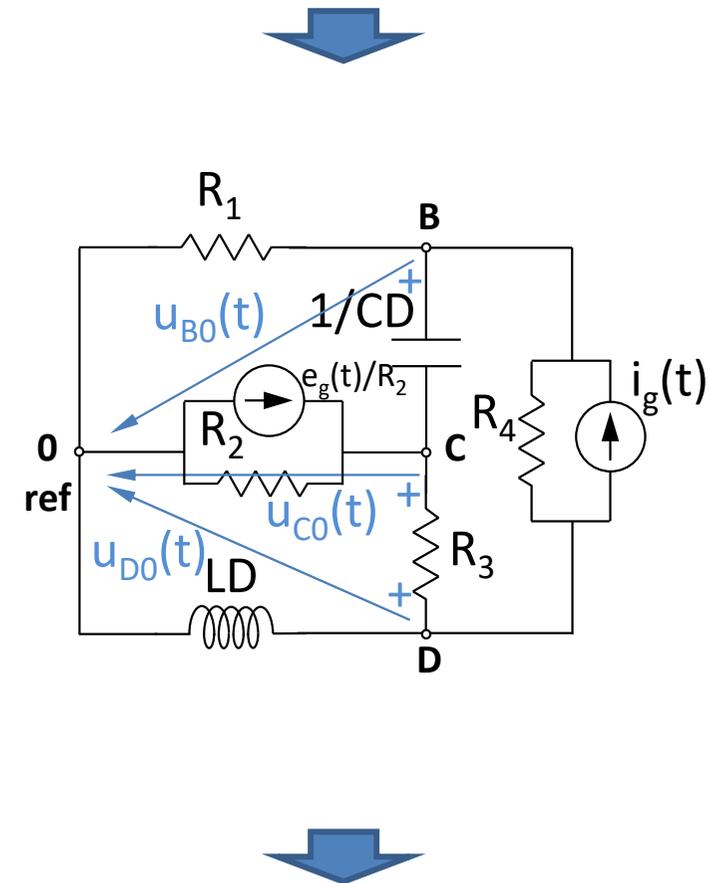
## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Consiste en aplicar la Ley de Kirchhoff de las intensidades a cada uno de los nudos del circuito, excepto a uno de ellos que se toma como referencia, utilizando para ello las **tensiones de nudo**.
  - **Tensiones de nudo:** Cada una de las tensiones de los  $n-1$  nudos restantes al nudo de referencia ( $u_{B0}(t)$ ,  $u_{C0}(t)$  y  $u_{D0}(t)$ )
  - **Criterio de aplicación de la LKI:** Suma de las intensidades que salen de un nudo por los elementos pasivos que concurren en él = Suma de las intensidades que entran al nudo provenientes de fuentes.
  - Es **deseable** que todas las fuentes presentes en el circuito sean fuentes de intensidad (en el caso de fuentes reales de tensión, aplicar la equivalencia de fuentes reales)



## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Recomendaciones y notas:
  - *Elección del nudo de referencia:* Se puede escoger a tal fin cualquier nudo del circuito; sin embargo, se recomienda elegir aquel nudo al que concurran un mayor número de ramas por resultar las ecuaciones, en general, más sencillas.
  - A la hora de determinar los nudos del circuito, hay que asegurarse de que todos y cada uno de los elementos del circuito está situado entre dos nudos.
  - Si dos o más nudos del circuito están unidos por un cortocircuito, eléctricamente todos esos nudos son sólo uno y, en consecuencia, todos han de tener igual nombre.



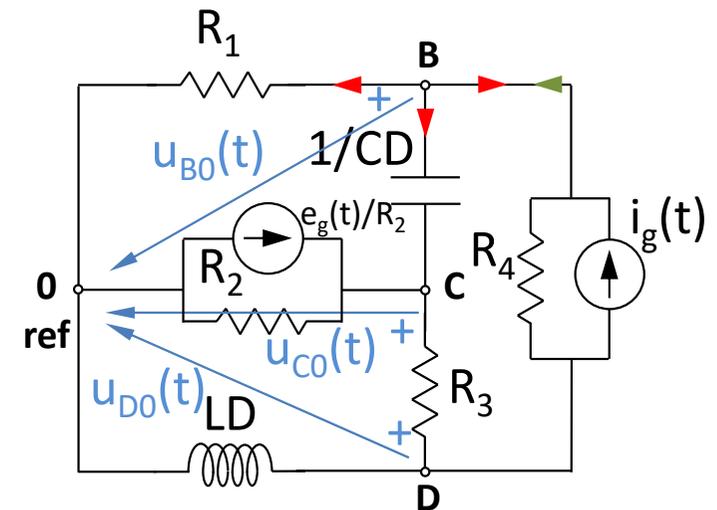
## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Aplicación de la LKI a todos los nudos (siguiendo el criterio dado), excepto al nudo de referencia

**Nudo B:**

$$\frac{u_{B0}(t)}{R_1} + \frac{u_{B0}(t) - u_{C0}(t)}{1/CD} + \frac{u_{B0}(t) - u_{D0}(t)}{R_4} = i_g(t)$$

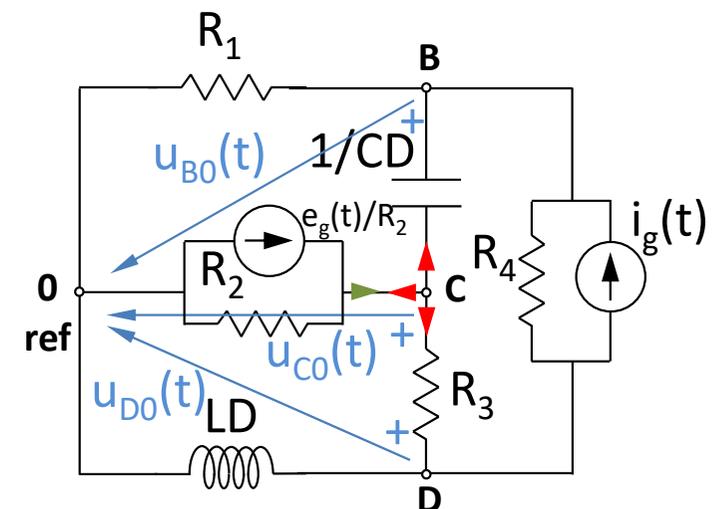
$$\left( \frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4} \right) u_{B0}(t) - CD \cdot u_{C0}(t) - \frac{1}{R_4} u_{D0}(t) = i_g(t)$$



**Nudo C:**

$$\frac{u_{C0}(t)}{R_2} + \frac{u_{C0}(t) - u_{B0}(t)}{1/CD} + \frac{u_{C0}(t) - u_{D0}(t)}{R_3} = \frac{e_g(t)}{R_2}$$

$$-CD \cdot u_{B0}(t) + \left( \frac{1}{R_2} + CD + \frac{1}{R_3} \right) u_{C0}(t) - \frac{1}{R_3} u_{D0}(t) = \frac{e_g(t)}{R_2}$$

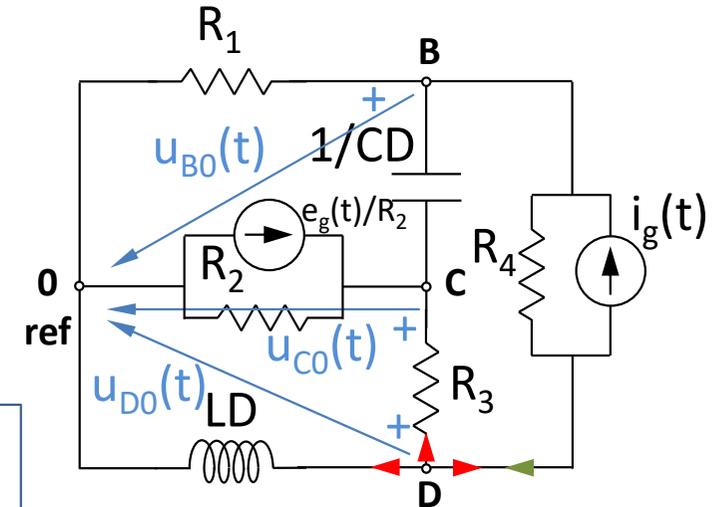


## 4.5.2. Método de análisis por nudos

**Nudo D:** 
$$\frac{u_{D0}(t)}{LD} + \frac{u_{D0}(t) - u_{C0}(t)}{R_3} + \frac{u_{D0}(t) - u_{B0}(t)}{R_4} = -i_g(t)$$

$$-\frac{1}{R_4}u_{B0}(t) + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4}\right)u_{D0}(t) - \frac{1}{R_3}u_{C0}(t) = -i_g(t)$$

Nota: Las intensidades siempre se consideran saliendo por los elementos pasivos, independientemente del nudo que estemos considerando



Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4}\right) & -CD & -\frac{1}{R_4} \\ -CD & \left(\frac{1}{R_3} + CD + \frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{B0}(t) \\ u_{C0}(t) \\ u_{D0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) \\ e_g(t)/R_2 \\ -i_g(t) \end{bmatrix}$$

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Los elementos de la primera matriz tienen dimensiones de admitancias, los de la segunda tienen dimensiones de tensiones y los elementos de la tercera, dimensiones de intensidades. En general, se puede escribir:*

$$\left[ Y_{ij} \right] \cdot \left[ u_i(t) \right] = \left[ i_{ial}(t) \right]$$

donde:

$\left[ Y_{ij} \right]$ : Matriz de admitancias de nudo (matriz simétrica)

$\left[ u_i(t) \right]$ : Vector de tensiones de nudo

$\left[ i_{ial}(t) \right]$ : Vector de intensidades de alimentación de nudo

$Y_{ii}$ : Admitancia propia de nudo

$Y_{ij} \Big|_{i \neq j}$ : Admitancia mutua de nudo

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - $Y_{ii}$ : Suma de las admitancias de los elementos pasivos que concurren en el nudo  $i$ .
  - $Y_{ij|_{i \neq j}}$ : Suma, con signo  $-$ , de las admitancias de los elementos pasivos que comparten el nudo  $i$  y el nudo  $j$
  - $u_i(t)$ : Tensiones de nudo (incógnitas).
  - $i_{ial}(t)$ : Suma algebraica de las intensidades provenientes de fuentes que entran en el nudo  $i$ . Estas intensidades se toman positivas si entran en el nudo  $i$  y negativas si salen de dicho nudo.

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- $Y_{BB}$ : En el nudo B concurren la resistencia  $R_1$ , el condensador C y la resistencia  $R_4$ .

$$Y_{BB} = \frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4}$$

- $Y_{CC}$ : En el nudo C concurren la resistencia  $R_2$ , el condensador C y la resistencia  $R_3$ .

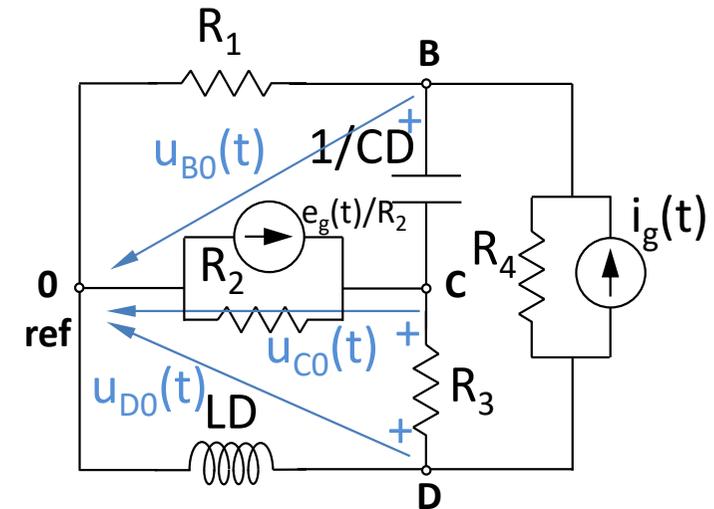
$$Y_{CC} = \frac{1}{R_2} + CD + \frac{1}{R_3}$$

- $Y_{DD}$ : En el nudo D concurren la resistencia  $R_3$ , el condensador L y la resistencia  $R_4$ .

$$Y_{DD} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4}$$

- $Y_{BC}$ : El nudo B y el nudo C comparten el condensador C

$$Y_{BC} = -CD$$



- $Y_{BD}$ : El nudo B y el nudo D comparten la resistencia  $R_4$ .

$$Y_{BD} = -\frac{1}{R_4}$$

- $Y_{CD}$ : El nudo C y el nudo D comparten la resistencia  $R_3$ .

$$Y_{CD} = -\frac{1}{R_3}$$

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Matriz simétrica  $\Rightarrow Y_{CB}=Y_{BC}, Y_{DB}=Y_{BD}, Y_{DC}=Y_{CD}$
- $i_{Bal}$ : Al nudo B le llega la intensidad proveniente de la fuente  $i_g(t)$ , y entra en dicho nudo.

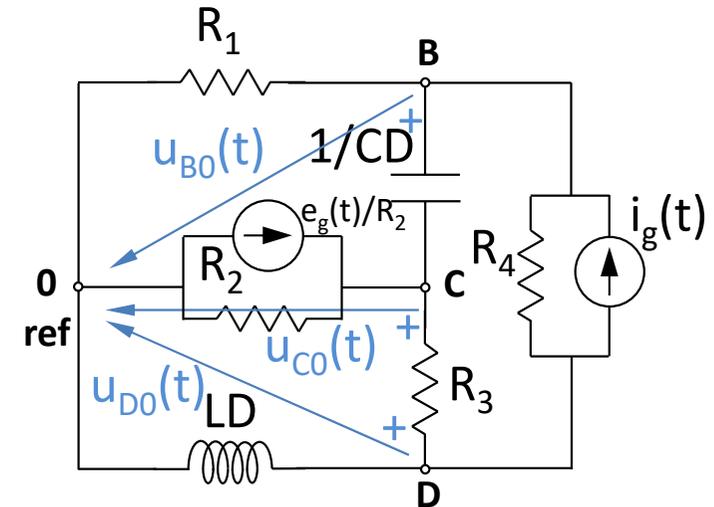
$$i_{Bal}(t) = i_g(t)$$

- $i_{Cal}$ : Al nudo C le llega la intensidad proveniente de la fuente  $e_g(t)/R_2$ , y entra en dicho nudo.

$$i_{Cal}(t) = e_g(t) / R_2$$

- $i_{Dal}$ : Al nudo D le llega la intensidad proveniente de la fuente  $i_g(t)$ , y sale de dicho nudo.

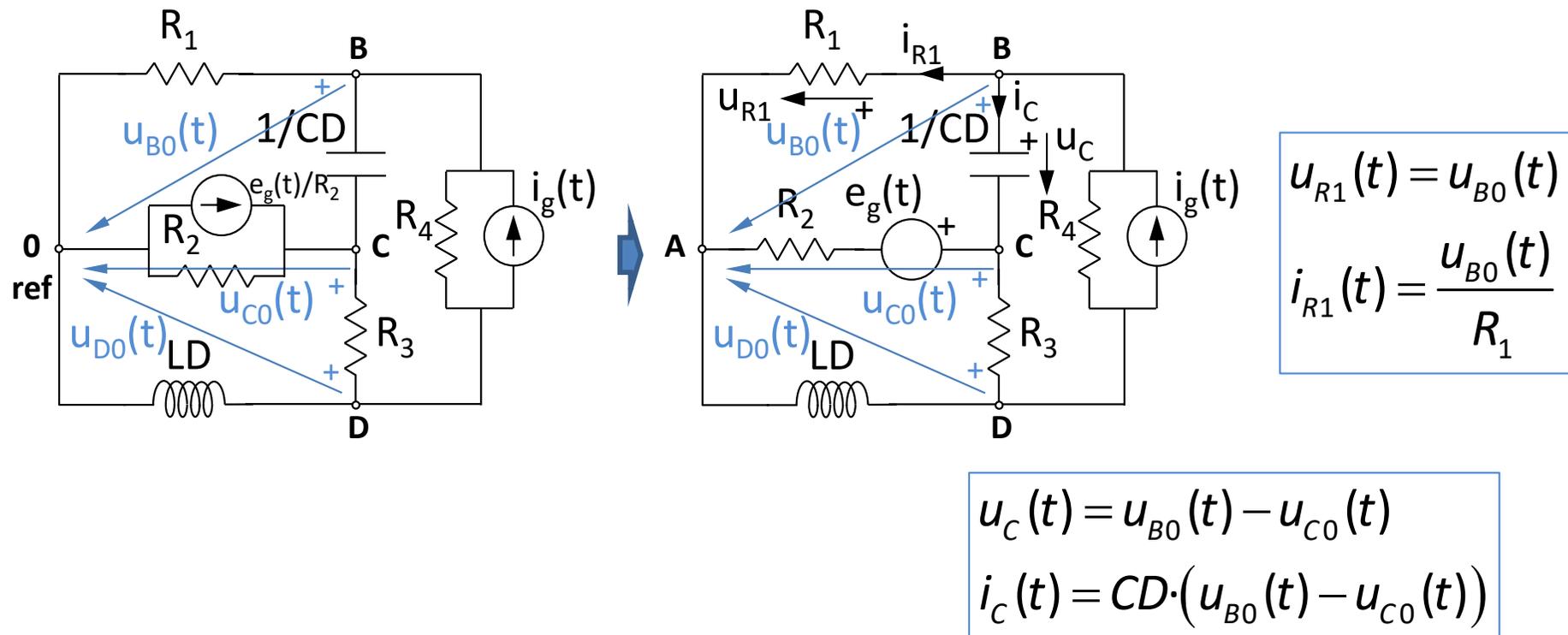
$$i_{Dal}(t) = -i_g(t)$$



$$\begin{bmatrix}
 \left( \frac{1}{R_1} + CD + \frac{1}{R_4} \right) & -CD & -\frac{1}{R_4} \\
 -CD & \left( \frac{1}{R_3} + CD + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_3} \\
 \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{LD} + \frac{1}{R_4} \right)
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 u_{B0}(t) \\
 u_{C0}(t) \\
 u_{D0}(t)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 i_g(t) \\
 e_g(t)/R_2 \\
 -i_g(t)
 \end{bmatrix}$$

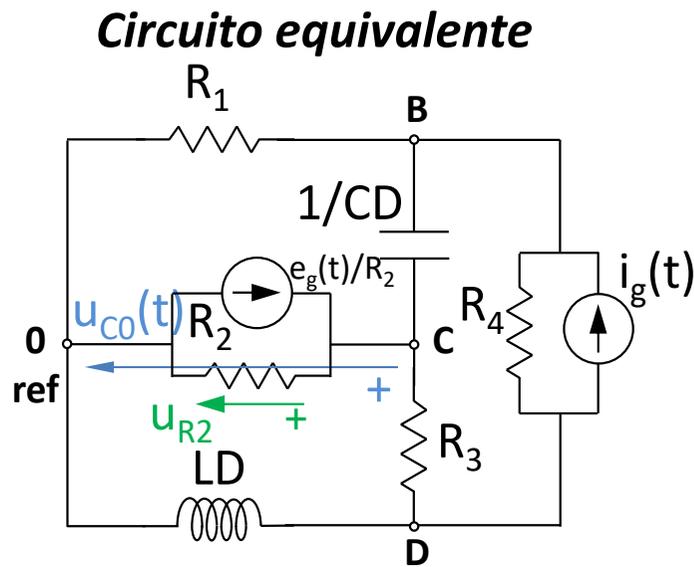
## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Una vez resuelto el sistema (que, en el caso más general, se tratará de un sistema de ecuaciones diferenciales), a partir de las tensiones de nudo, se pueden determinar las tensiones e intensidades en todos y cada uno de los elementos del circuito.



# 4.5.2. Método de análisis por nudos

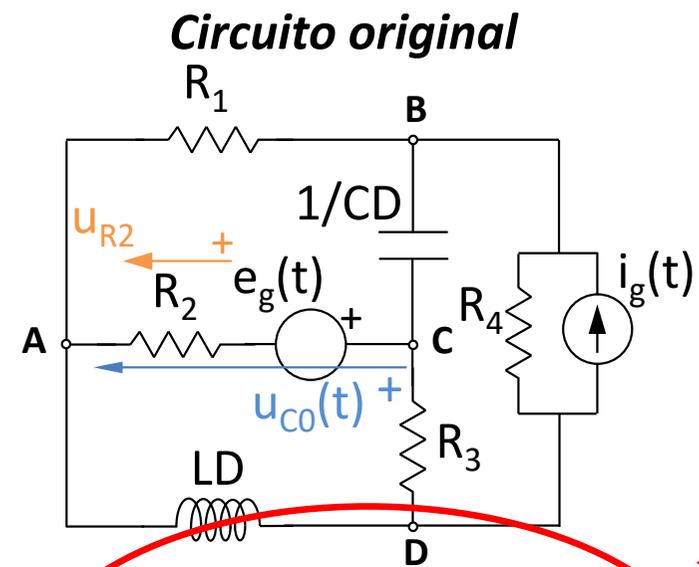
- En el ejemplo empleado, el circuito analizado no es el circuito original, sino que se trata de un circuito equivalente a éste. A la hora de calcular tensiones e intensidades en el circuito original a partir del circuito equivalente, **atención** a las ramas “transformadas” y los elementos que las forman.



$$u_{R2}(t) = u_{C0}(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_{C0}(t)}{R_2}$$

**Distintas !!!!!**



$$u_{R2}(t) = u_{C0}(t) - e_g(t)$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_{C0}(t) - e_g(t)}{R_2}$$

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

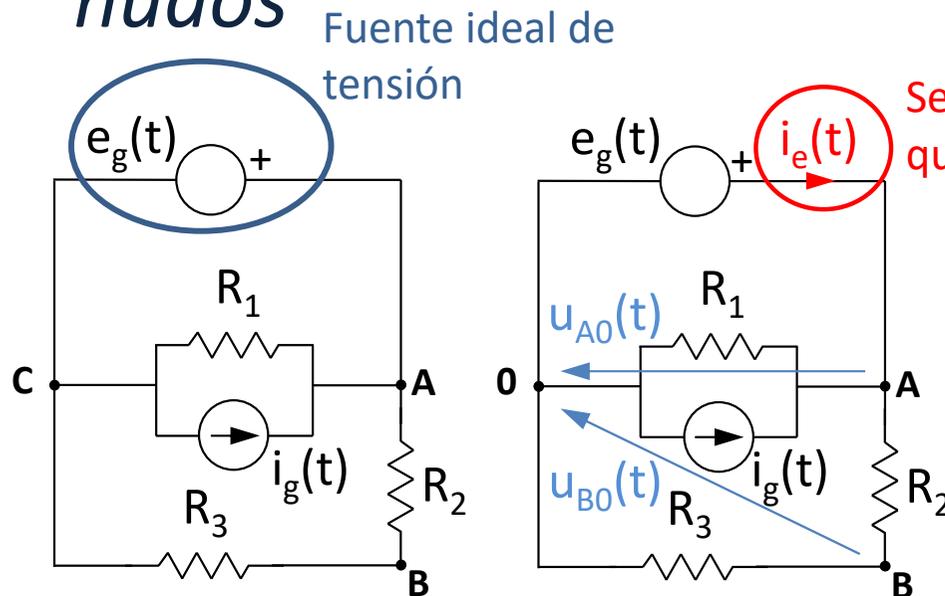
- ***Circuitos con fuentes ideales de tensión:***
  - El método de nudos prefiere que las fuentes sean de intensidad. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de tensión en fuente de intensidad, será necesario encontrar una forma de solventar este “inconveniente”. **Procedimiento:**
  - Se da una referencia a la intensidad que circula por la fuente ideal de tensión.
  - Esta intensidad que circula por la fuente ideal de tensión se trata, a todos los efectos, como se trata a la intensidad suministrada por una fuente de intensidad.

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- **Circuitos con fuentes ideales de tensión (cont.)**
  - Esta intensidad (que es desconocida), al tratarla como la intensidad proveniente de una fuente, aparecerá en el vector de intensidades de alimentación de nudo.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que **añadir una ecuación adicional** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de nudos.
  - **Forma de construir la ecuación adicional**: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su tensión) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo).

# 4.5.2. Método de análisis por nudos

- Ejemplo: Analizar el circuito por el método de los nudos**



Se dibuja, en sentido arbitrario, la intensidad que circula por la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{A0}(t) \\ u_{B0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) + i_e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$



2 ecuaciones, 3 incógnitas:  $u_{A0}(t)$ ,  $u_{B0}(t)$  e  $i_e(t)$

Ecuación adicional:  $e_g(t) = u_{A0}(t)$  } Lo que sabemos de la fuente:  $e_g(t)$   
En función de las incógnitas:  $u_{A0}(t)$ ,  $u_{B0}(t)$

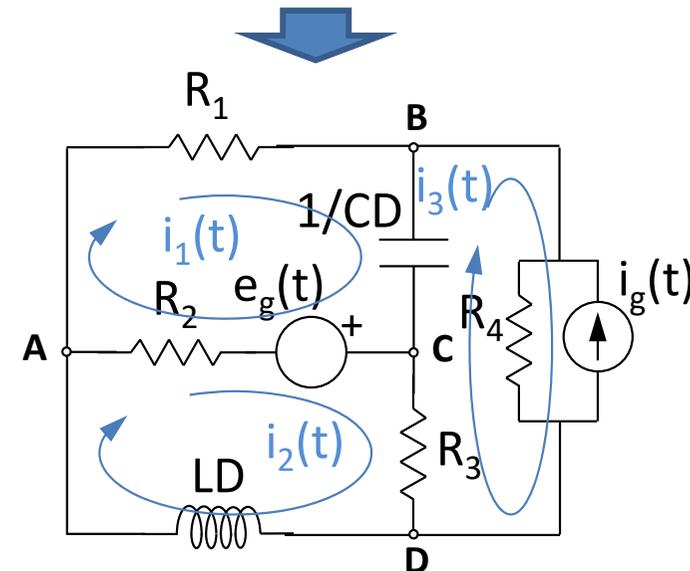
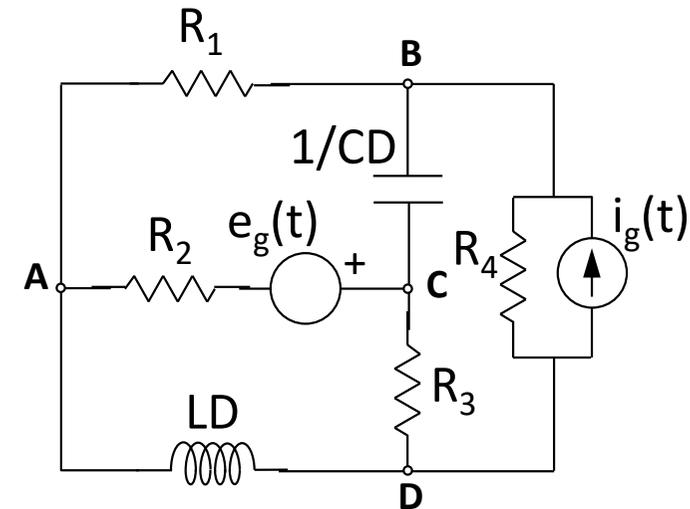
Por lo tanto: 3 ecuaciones lin. indeptes, 3 incógnitas  $\longrightarrow$  SOLUCIÓN ÚNICA

## 4.5.2. Método de análisis por nudos

- **Circuitos con fuentes dependientes:**
  - Una fuente dependiente (de tensión o de intensidad) puede ser real o bien ideal.
  - El tratamiento de las fuentes dependientes es idéntico al seguido con las fuentes independientes.
  - Ahora bien, al depender su valor de la tensión o de la intensidad en otra parte del circuito, cada fuente dependiente introduce una incógnita (la tensión o la intensidad de la cual depende). Para que el sistema de ecuaciones sea determinado, es necesario **añadir una ecuación adicional**.
  - **Forma de construir la ecuación adicional:** Se expresa la tensión o la intensidad de la cuál depende la fuente dependiente, como función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo en este caso).

## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- Consiste en aplicar la Ley de Kirchhoff de las tensiones a cada malla del circuito, utilizando para ello las intensidades de circulación de malla.
  - **Intensidades de circulación de malla:** Intensidad que es común a todos las ramas que forman una malla
  - **Criterio de aplicación de la LKT:** Caídas de tensión positivas las origina la intensidad de la malla considerada.
  - Es **deseable** que todas las fuentes presentes en el circuito sean fuentes de tensión (en el caso de fuentes reales de intensidad, aplicar la equivalencia de fuentes reales)
  - **Nota:** El sentido de las intensidades de circulación de malla es arbitrario, a elección de cada cual, y puede ser distinto en cada malla.



## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- Aplicación de la LKT a todas las mallas del circuito (siguiendo el criterio dado).

– Malla 1:

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{CD} (i_1(t) - i_3(t)) + e_g(t) + R_2 (i_1(t) - i_2(t)) = 0$$

$$\left( R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 \right) i_1(t) - R_2 i_2(t) - \frac{1}{CD} i_3(t) = -e_g(t)$$

– Malla 2:

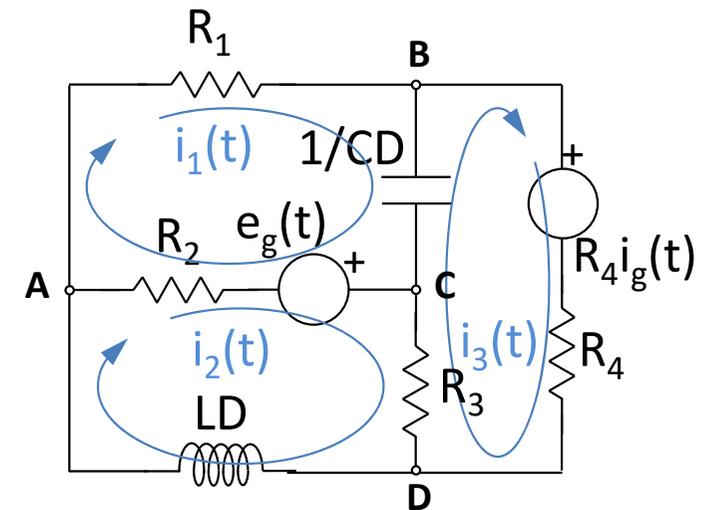
$$R_2 (i_2(t) - i_1(t)) - e_g(t) + R_3 (i_2(t) - i_3(t)) + LD i_2(t) = 0$$

$$-R_2 i_1(t) + (R_2 + R_3 + LD) i_2(t) - R_3 i_3(t) = e_g(t)$$

– Malla 3:

$$R_4 i_g(t) + R_4 i_3(t) + R_3 (i_3(t) - i_2(t)) + \frac{1}{CD} (i_3(t) - i_1(t)) = 0$$

$$-\frac{1}{CD} i_1(t) - R_3 i_2(t) + \left( R_4 + R_3 + \frac{1}{CD} \right) i_3(t) = -R_4 i_g(t)$$



## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- *Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial:*

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\ -R_2 & R_2 + R_3 + LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_4 + R_3 + \frac{1}{CD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_g(t) \\ e_g(t) \\ -R_4 i_g(t) \end{bmatrix}$$

- *Los elementos de la primera matriz tienen dimensiones de impedancias, los de la segunda tienen dimensiones de intensidades y los elementos de la tercera, dimensiones de tensiones. En general, se puede escribir:*

$$\left[ Z_{ij} \right] \cdot \left[ i_i(t) \right] = \left[ e_{ial}(t) \right]$$

## 4.5.3. Método de análisis por mallas

donde:

$[Z_{ij}]$ : Matriz de impedancias de malla (matriz simétrica)

$[i_i(t)]$ : Vector de intensidades de alimentación de malla

$[e_{ial}(t)]$ : Vector de tensiones de alimentación de malla

$Z_{ii}$ : Impedancia propia de malla

$Z_{ij} \Big|_{i \neq j}$ : Impedancia mutua de malla

- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - $Z_{ii}$ : Suma de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen a la malla  $i$ .

## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- $Z_{ij|_{i \neq j}}$ : Suma algebraica de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen simultáneamente a la malla  $i$  y a la malla  $j$ 
  - Signo positivo: Las intensidades de ambas mallas llevan el mismo sentido sobre la impedancia considerada.
  - Signo negativo: Las intensidades de ambas mallas tienen sentidos contrarios sobre la impedancia considerada.
- $i_i(t)$ : Intensidades de circulación de malla (incógnitas).
- $e_{ial}(t)$ : Suma algebraica de los valores de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla  $i$ .
  - Signo positivo: Si la intensidad de la malla considerada sale por el terminal marcado con “+” de la fuente.
  - Signo negativo: Si la intensidad de la malla considera entra por el terminal marcado con “+” de la fuente.

## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- $Z_{11}$ : A la malla 1 pertenecen la resistencia  $R_1$ , el condensador  $C$  y la resistencia  $R_2$ .

$$Z_{11} = R_1 + \frac{1}{CD} + R_2$$

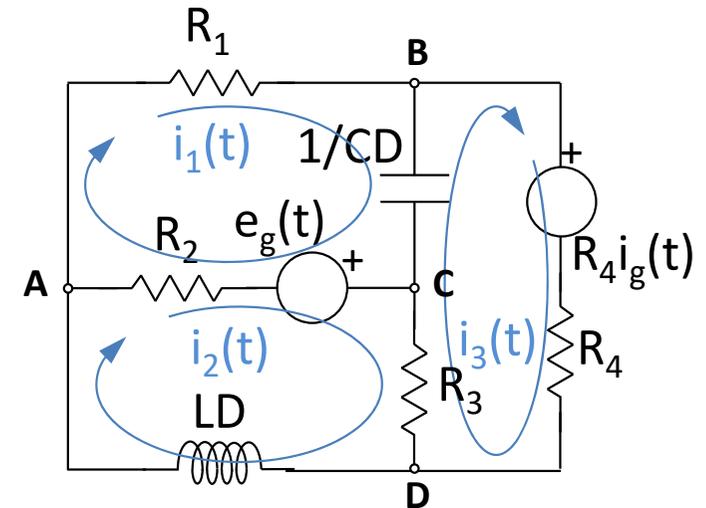
- $Z_{22}$ : A la malla 2 pertenecen la resistencia  $R_2$ , la resistencia  $R_3$  y la bobina  $L$ .

$$Z_{22} = R_2 + R_3 + LD$$

- $Z_{33}$ : A la malla 3 pertenecen la resistencia  $R_4$ , la resistencia  $R_3$  y el condensador  $C$ .

$$Z_{33} = R_4 + R_3 + \frac{1}{CD}$$

- $Z_{12}$ : La malla 1 y la malla 2 comparten la resistencia  $R_2$ .  $i_2$  lleva sentido contrario a  $i_1$  sobre  $R_2$ .  $Z_{12} = -R_2$



- $Z_{13}$ : La malla 1 y la malla 3 comparten el condensador  $C$ .

$$Z_{13} = -\frac{1}{CD}$$

- $Z_{23}$ : La malla 2 y la malla 3 comparten la resistencia  $R_3$ .

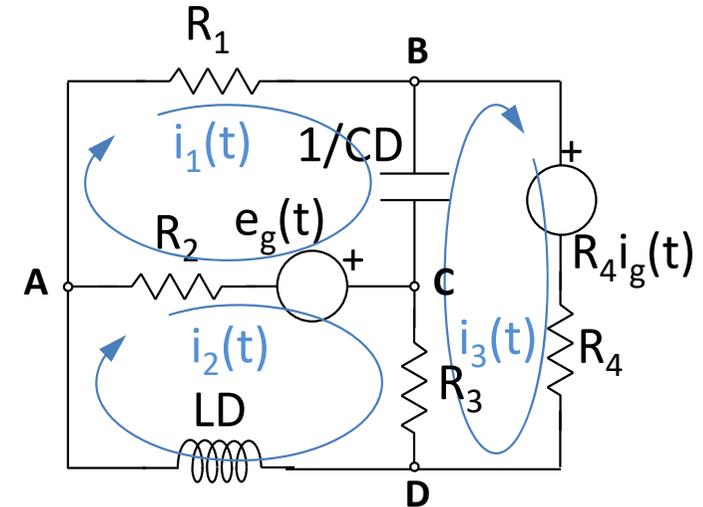
$$Z_{23} = -R_3$$

## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- Matriz simétrica  $\Rightarrow Z_{21}=Z_{12}, Z_{31}=Z_{13}, Z_{32}=Z_{23}$
- $e_{1al}$ : A la malla 1 pertenece la fuente  $e_g(t)$  e  $i_1(t)$  entra por el "+".  

$$e_{1al}(t) = -e_g(t)$$
- $e_{2al}$ : A la malla 2 pertenece la fuente  $e_g(t)$  e  $i_2(t)$  sale por el "+".  

$$e_{2al}(t) = e_g(t)$$
- $e_{3al}$ : A la malla 3 pertenece la fuente  $R_4 i_g(t)$  e  $i_3(t)$  entra por el "+".

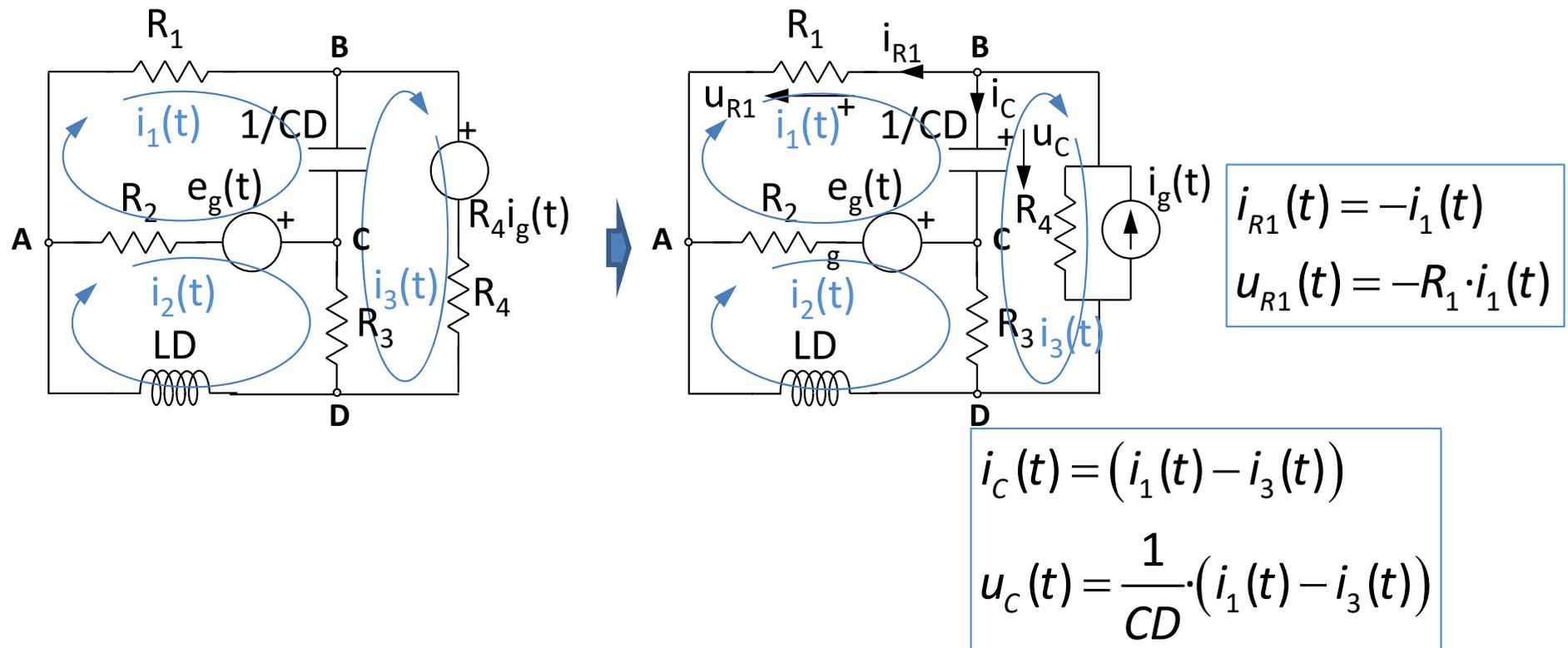


$$e_{3al}(t) = -R_4 i_g(t)$$

$$\begin{bmatrix}
 R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\
 -R_2 & R_2 + R_3 + LD & -R_3 \\
 -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_4 + R_3 + \frac{1}{CD}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 i_1(t) \\
 i_2(t) \\
 i_3(t)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -e_g(t) \\
 e_g(t) \\
 -R_4 i_g(t)
 \end{bmatrix}$$

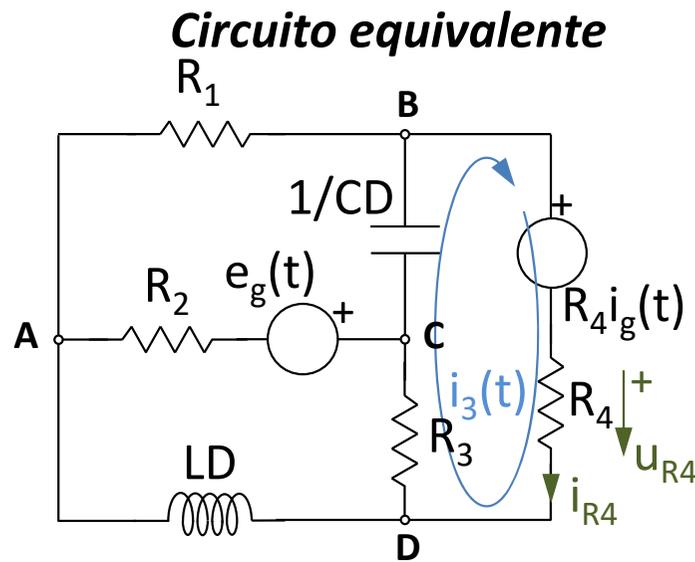
## 4.5.3. Método de análisis por mallas

- Una vez resuelto el sistema (que, en el caso más general, se tratará de un sistema de ecuaciones diferenciales), a partir de las intensidades de malla, se pueden determinar las tensiones e intensidades en todos y cada uno de los elementos del circuito.



# 4.5.3. Método de análisis por mallas

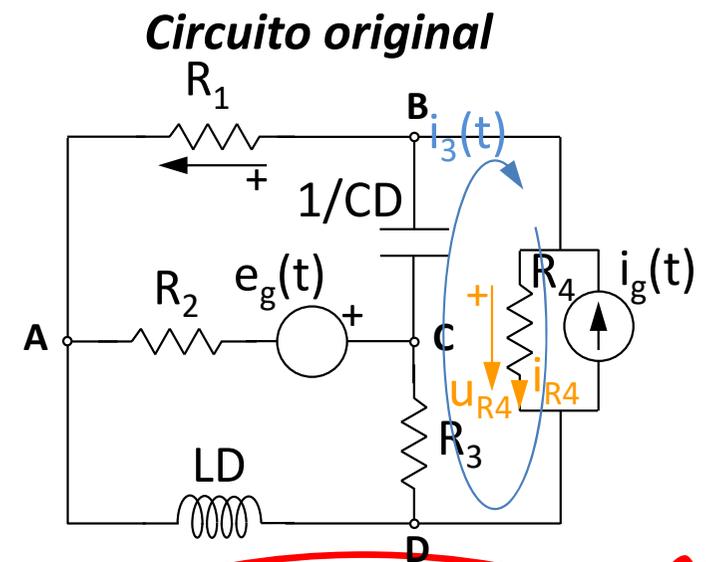
- En el ejemplo empleado, el circuito analizado no es el circuito original, sino que se trata de un circuito equivalente a éste. A la hora de calcular tensiones e intensidades en el circuito original a partir del circuito equivalente, **atención** a las ramas “transformadas” y los elementos que las forman.



$$i_{R4}(t) = i_3(t)$$

$$u_{R4}(t) = R_4 i_3(t)$$

**Distintas !!!!!**



$$i_{R4}(t) = i_3(t) + i_g(t)$$

$$u_{R4}(t) = R_4 (i_3(t) + i_g(t))$$

### 4.5.3. Método de análisis por mallas

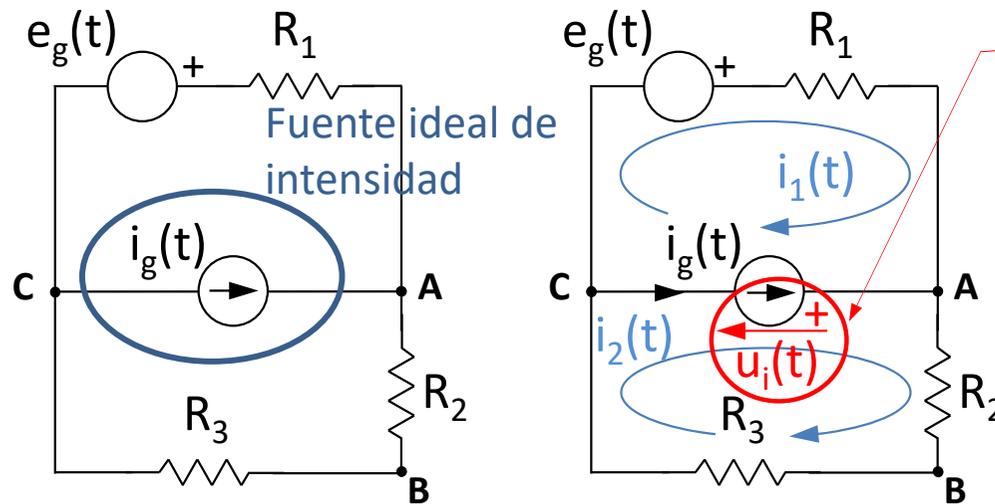
- ***Circuitos con fuentes ideales de intensidad:***
  - El método de mallas prefiere que las fuentes sean de tensión. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de intensidad en fuente de tensión, será necesario encontrar una forma de solventar este “inconveniente”. **Procedimiento:**
  - Se da una referencia a la tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad.
  - Esta tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad se trata, a todos los efectos, como se trata a la tensión en bornes de una fuente de tensión.

### 4.5.3. Método de análisis por mallas

- **Circuitos con fuentes ideales de intensidad (cont)**
  - Esta tensión (que es desconocida), al tratarla como la tensión en bornes de una fuente, aparecerá en el vector de tensiones de alimentación de malla.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que **añadir una ecuación adicional** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de mallas.
  - **Forma de construir la ecuación adicional**: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su intensidad) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las intensidades de malla).

# 4.5.3. Método de análisis por mallas

- Ejemplo: Analizar el circuito por el método de las mallas



Se dibuja, en sentido arbitrario, la tensión en bornes de la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_g(t) - u_i(t) \\ u_i(t) \end{bmatrix}$$



2 ecuaciones, 3 incógnitas:  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  y  $u_i(t)$

Ecuación adicional:  $i_g(t) = i_2(t) - i_1(t)$  } Lo que sabemos de la fuente:  $i_g(t)$   
En función de las incógnitas:  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$

Por lo tanto: 3 ecuaciones, 3 incógnitas ➡ SOLUCIÓN ÚNICA

## ***4.6. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales***

## 4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

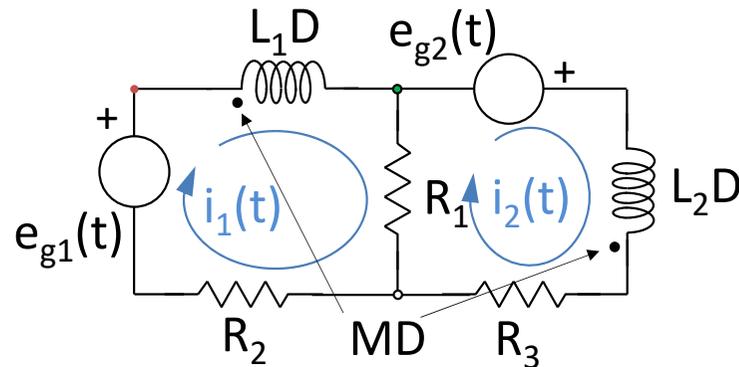
- *Los circuitos que contengan bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales, se analizarán mediante el método de las mallas (salvo casos especiales en los que se pueda obviar el acoplamiento magnético).*
- *Es posible la escritura directa de las ecuaciones de malla, si bien, en el caso de presencia de bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores la regla para dicha escritura se hace más complicada (buscar en la bibliografía en caso de interés)*

## 4.6. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente y/o transformadores ideales

- *En el caso de presencia de bobinas acopladas magnéticamente, se recomienda aplicar la 2ª LK a cada malla. Para aplicarla, se suman las tensiones en todos los elementos de cada malla y se hace esta suma igual a cero. Se recomienda empezar la suma de tensiones en un punto de la malla y terminarla en ese mismo punto, teniendo en cuenta que las tensiones en las bobinas acopladas no sólo se deben a que circula intensidad por ellas, sino que también se deben a que circula intensidad por las bobinas con las que están acopladas.*
- *En el caso de presencia de transformadores ideales, se recomienda aplicar la LKT a cada malla incluyendo la caída de tensión en los devanados del transformador y escribir más adelante las ecuaciones de definición del transformador de acuerdo a las referencias consideradas.*
- *Recordar el criterio de escritura de la LKT en el método de análisis por mallas: **Caídas de tensión positivas las crea la intensidad de la malla considerada en cada momento.***

## 4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

- *Ejemplo:*



En la bobina  $L_1$  cae tensión debido a que circula intensidad por ella (en este caso  $i_1(t)$ ), pero también debido a que circula intensidad por la bobina  $L_2$  (en este caso  $i_2(t)$ ).

Idem para la bobina  $L_2$

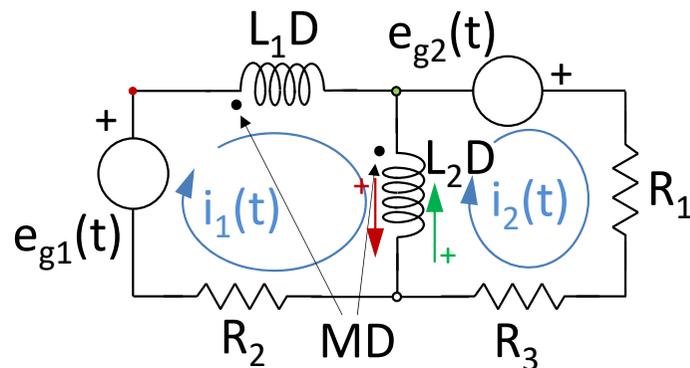
- Malla 1: 
$$\underbrace{L_1 D \cdot i_1(t) - MD \cdot i_2(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_1} + R_1 (i_1(t) - i_2(t)) + R_2 i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$$

- Malla 2: 
$$-e_{g2}(t) + \underbrace{L_2 D \cdot i_2(t) - MD \cdot i_1(t)}_{\text{Caída de tensión en bobina } L_2} + R_3 i_2(t) + R_1 (i_2(t) - i_1(t)) = 0$$

$$\begin{bmatrix} L_1 D + R_1 + R_2 & -R_1 - MD \\ -R_1 - MD & L_2 D + R_3 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{g1}(t) \\ e_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

## 4.6.1. Circuitos con bobinas acopladas magnéticamente

- Ejemplo:



Por el criterio expresado:

+ ↓ Caída de tensión positiva en  $L_2$  como elemento de la malla 1

+ ↑ Caída de tensión positiva en  $L_2$  como elemento de la malla 2

- Malla 1:  $L_1 D \cdot i_1(t) + MD \cdot (i_1(t) - i_2(t)) + L_2 D \cdot (i_1(t) - i_2(t)) + MD \cdot i_1(t) + R_2 i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$   

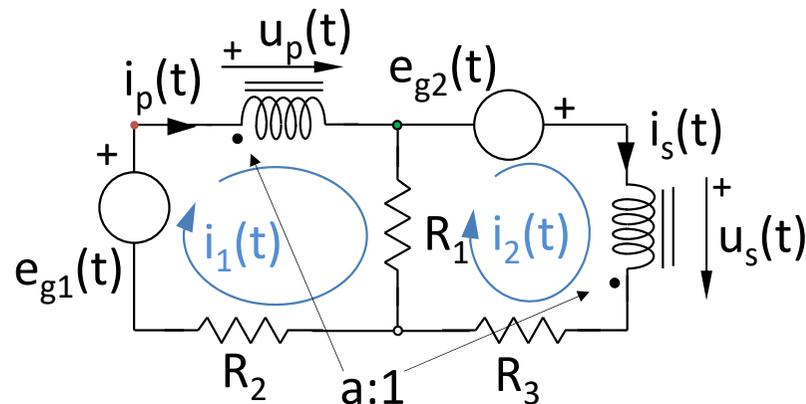
Caída de tensión en bobina  $L_1$ 
Caída de tensión en bobina  $L_2$

- Malla 2:  $-e_{g2}(t) + R_1 i_2(t) + R_3 i_2(t) + L_2 D \cdot (i_2(t) - i_1(t)) - MD \cdot i_1(t) = 0$   
Caída de tensión en bobina  $L_2$

$$\begin{bmatrix} L_1 D + L_2 D + R_2 + 2MD & -MD - L_2 D \\ -MD - L_2 D & L_2 D + R_3 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{g1}(t) \\ e_{g2}(t) \end{bmatrix}$$

## 4.6.2. Circuitos con transformadores ideales

- *Ejemplo:*



Ecs. transformador:

$$\frac{u_p(t)}{u_s(t)} = -a \rightarrow u_p(t) = -au_s(t)$$

$$\frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{1}{a} \rightarrow i_1(t) = \frac{1}{a}i_2(t)$$

$$i_p(t) = i_1(t)$$

$$i_s(t) = i_2(t)$$

- Malla 1:  $u_p(t) + R_1(i_1(t) - i_2(t)) + R_2i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$
- Malla 2:  $-e_{g2}(t) + u_s(t) + R_3i_2(t) + R_1(i_2(t) - i_1(t)) = 0$

$$-au_s(t) + R_1(i_1(t) - i_2(t)) + R_2i_1(t) - e_{g1}(t) = 0$$

$$-e_{g2}(t) + u_s(t) + R_3i_2(t) + R_1(i_2(t) - i_1(t)) = 0$$

$$i_1(t) = \frac{1}{a}i_2(t)$$

incógnitas:  $u_s(t), i_1(t), i_2(t)$

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección *Textos Docentes*, vol. 58. *Prensas Universitarias de Zaragoza*.

# ***Tema 5***

## *Teoremas Fundamentales del Análisis de Circuitos*



## ***Tema 5.- Teoremas fundamentales del análisis de circuitos.***

5.1.-Introducción.

5.2.-Teorema de Superposición.

5.3.-Teorema de Thévenin. Equivalente Thévenin.

5.4.-Teorema de Norton. Equivalente Norton.

5.5.-Equivalente Thévenin y equivalente Norton.

## ***5.1. Introducción***

## 5.1. Introducción

- *Los teoremas que a continuación se exponen pueden representar una **alternativa** o un **complemento** a los métodos de análisis de circuitos.*
- *Tradicionalmente, los teoremas han servido para simplificar los circuitos a analizar y reducir la complejidad de su análisis.*
- *En otros casos, como se verá más adelante, será obligatorio el uso de un teorema si se desea analizar un circuito en determinadas condiciones utilizando una técnica concreta (circuitos en RES analizados por el método simbólico).*

## 5.1. Introducción

- *Un **circuito lineal** es aquel cuyo comportamiento puede caracterizarse por medio de una ecuación diferencial lineal.*
- *Una propiedad importante de los circuitos lineales es que, si todas las fuentes de un circuito lineal son multiplicadas por una cantidad constante, las respuestas de dicho circuito se verán multiplicadas por esa misma constante (**principio de linealidad**).*

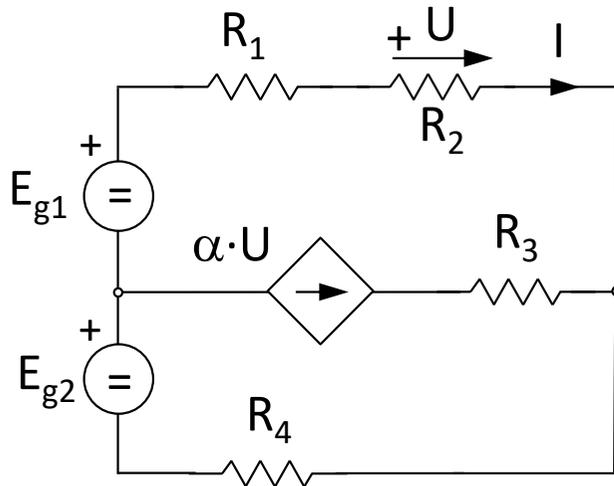
## ***5.2. Teorema de superposición***

## 5.2. Teorema de superposición

- *Si en un circuito lineal actúan varias fuentes de excitación de forma simultánea, la respuesta (tensión o intensidad) total de dicho circuito cuando actúan todas las fuentes a la vez será igual a la suma de las respuestas de ese mismo circuito cuando actúa cada una de las fuentes de excitación por separado.*
- *Este teorema es válido para circuitos que incluyan fuentes dependientes.*

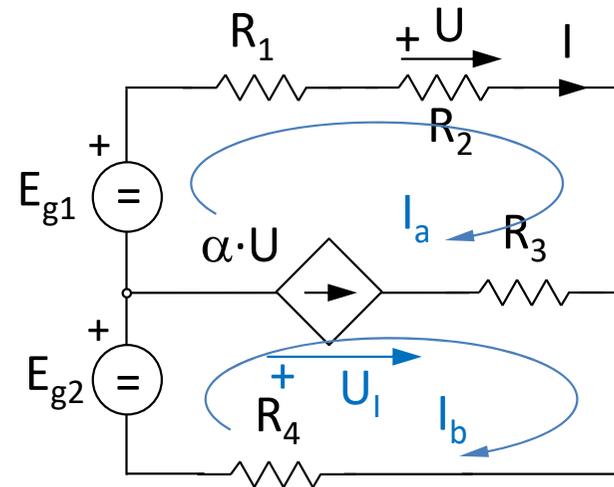
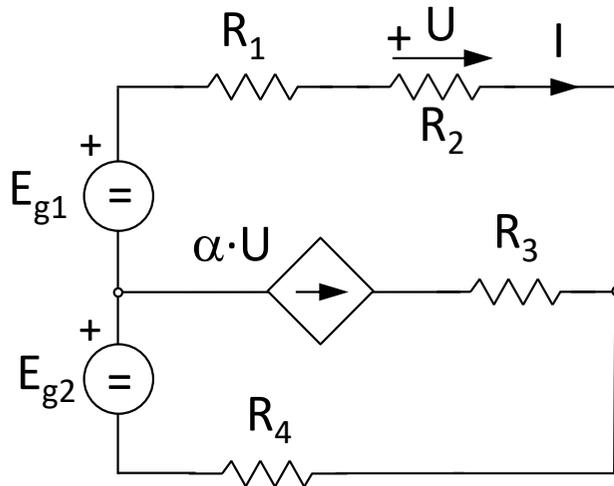
## 5.2. Teorema de superposición

**Ejemplo:** Determinar la intensidad  $I$ .



## 5.2. Teorema de superposición

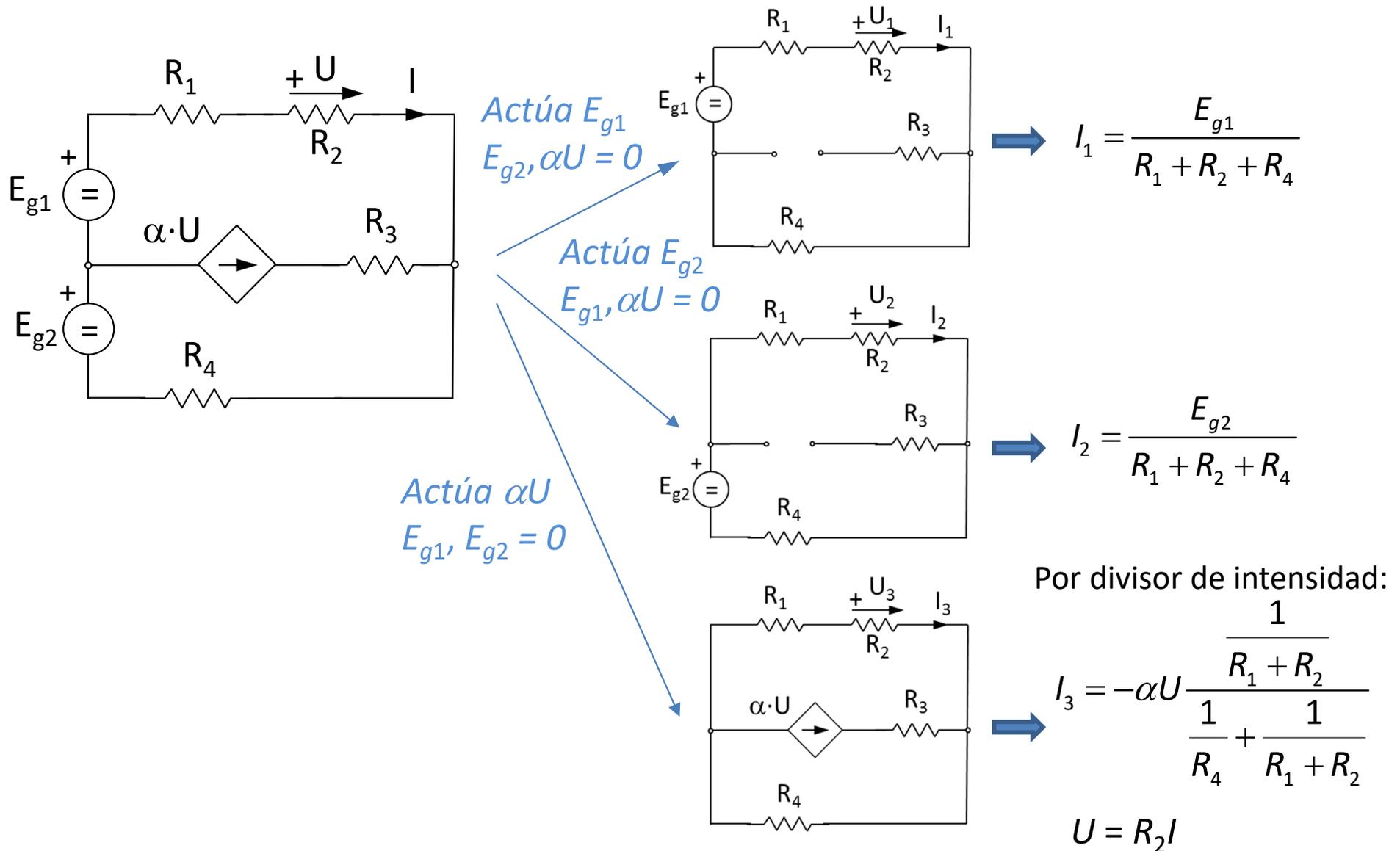
**OPCIÓN 1:** Determinar la intensidad  $I$  aplicando mallas.



$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{g1} + U_I \\ E_{g2} - U_I \end{bmatrix} \\ \text{Ecuación adicional: } \alpha U &= I_b - I_a \\ \text{Ecuación adicional: } U &= R_2 I_a \end{aligned} \right\} I_a = I$$

## 5.2. Teorema de superposición

**Opción 2:** Determinar la intensidad  $I$  aplicando el **teorema de superposición**.



## 5.2. Teorema de superposición

**Opción 2:** Determinar la intensidad  $I$  aplicando el **teorema de superposición**.

$$I_1 = \frac{E_{g1}}{R_1 + R_2 + R_4} \quad I_2 = \frac{E_{g2}}{R_1 + R_2 + R_4} \quad I_3 = -\alpha U \frac{\frac{1}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1 + R_2}}$$

Superposición:

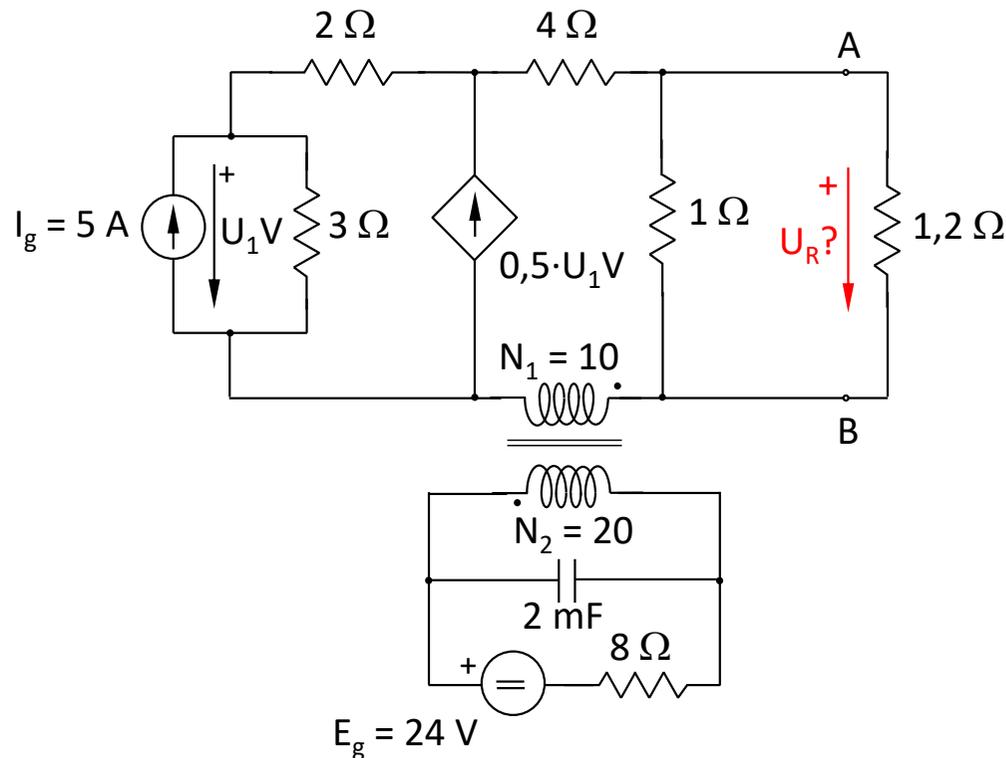
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$U = R_2 I$$

$$I = \frac{E_{g1} + E_{g2}}{\alpha R_2 R_4 + R_1 + R_2 + R_4}$$

## ***5.3. Teorema de Thévenin. Equivalente Thévenin***

## 5.3. Teorema de Thévenin



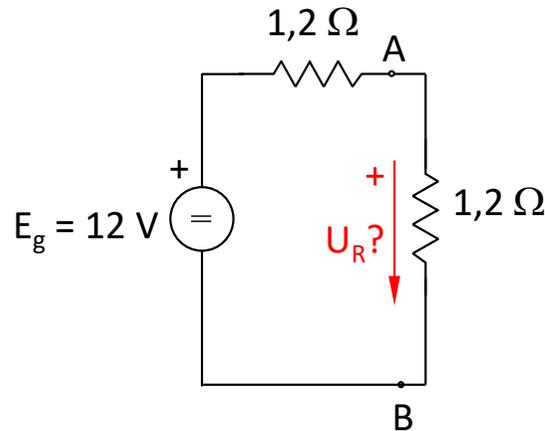
2 minutos para  
calcular  $U_R$

$$U_R = ? \text{ V}$$

¿Imposible???

## 5.3. Teorema de Thévenin

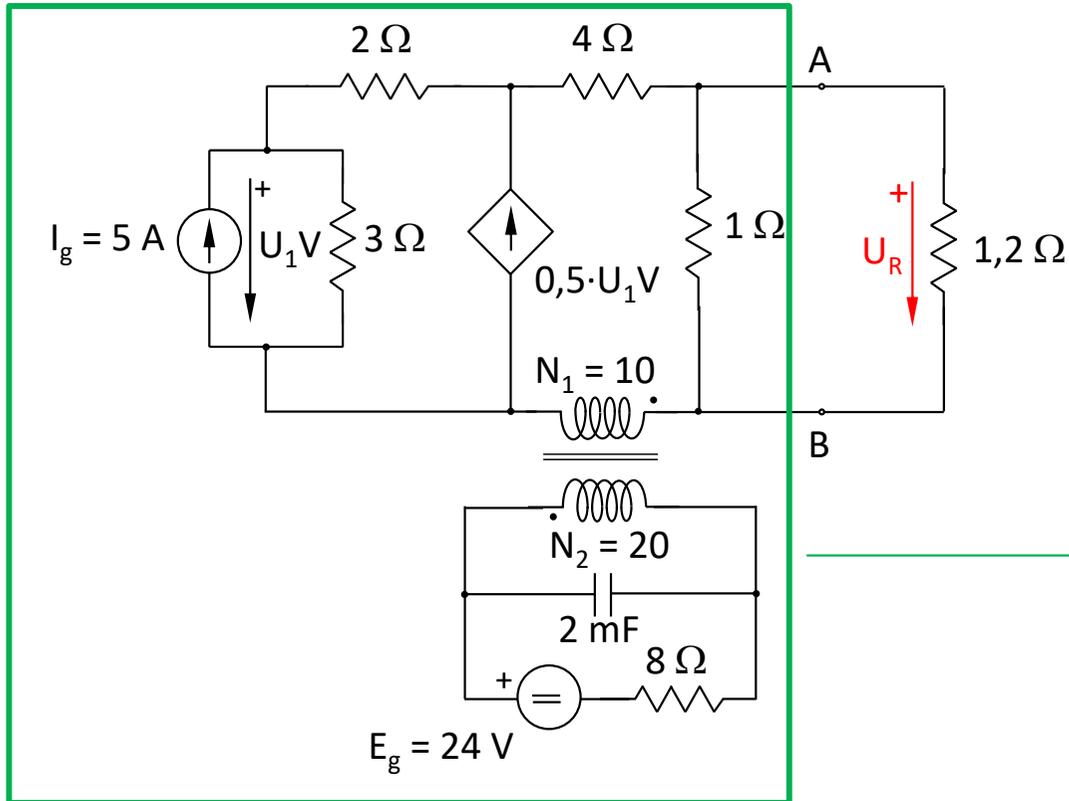
2 minutos para  
calcular  $U_R$



$$U_R = 6 \text{ V}$$

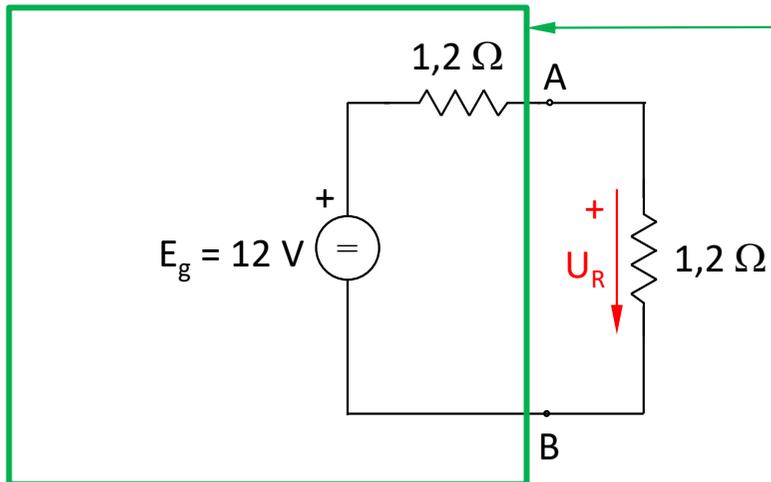
Fácil ¿no????

# 5.3. Teorema de Thévenin



$U_R = 6\text{ V}$  ← entonces:

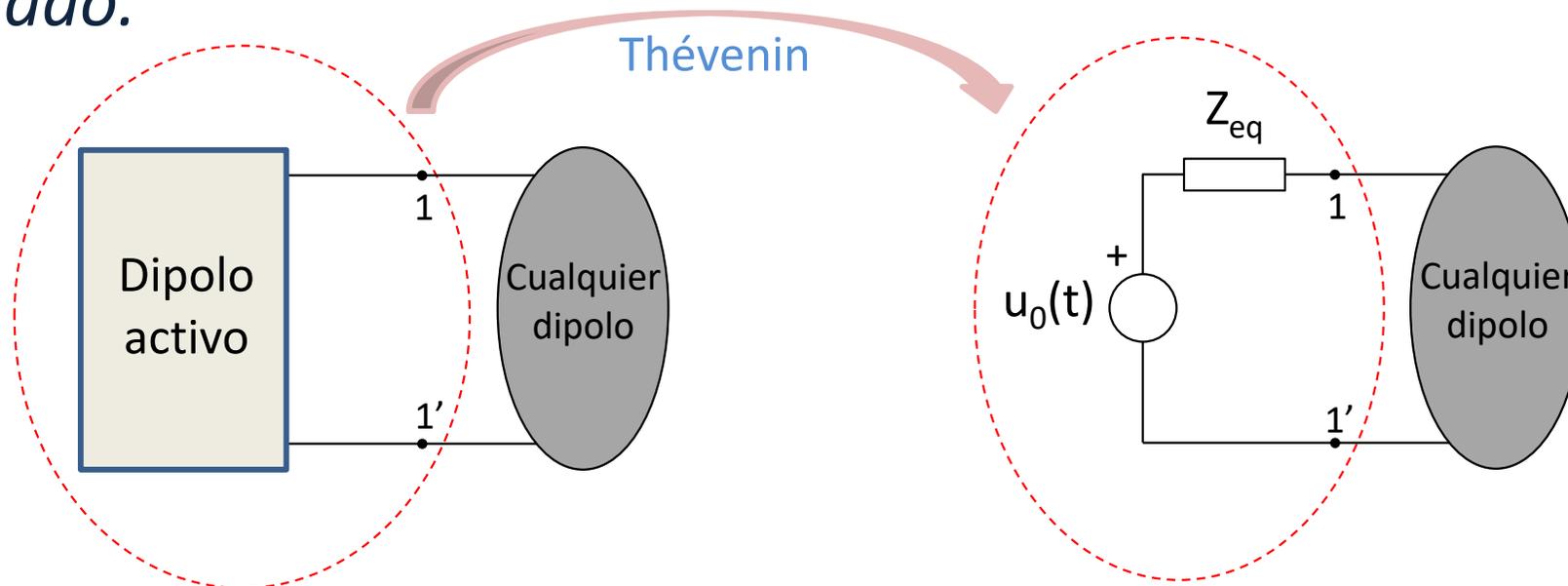
Equivalente Thévenin



$U_R = 6\text{ V}$  La fuente real de tensión es equivalente al dipolo de arriba

## 5.3. Teorema de Thévenin

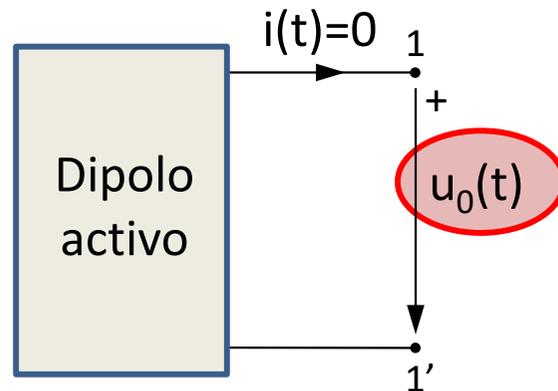
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de tensión**, formada por, una fuente ideal de tensión de valor la tensión que aparece entre los terminales del dipolo activo si éstos se encuentran a circuito abierto, y en serie una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



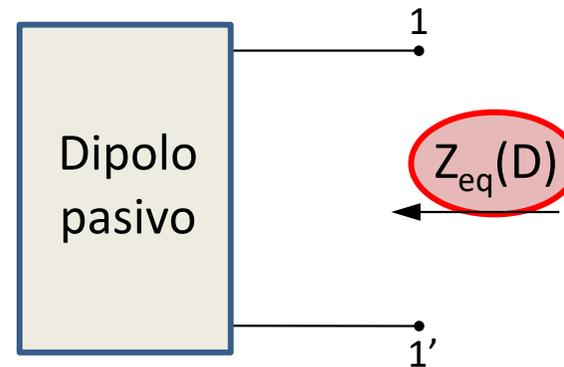
## 5.3. Teorema de Thévenin

- *Determinación de los valores de la fuente real:*

Dipolo activo a circuito abierto



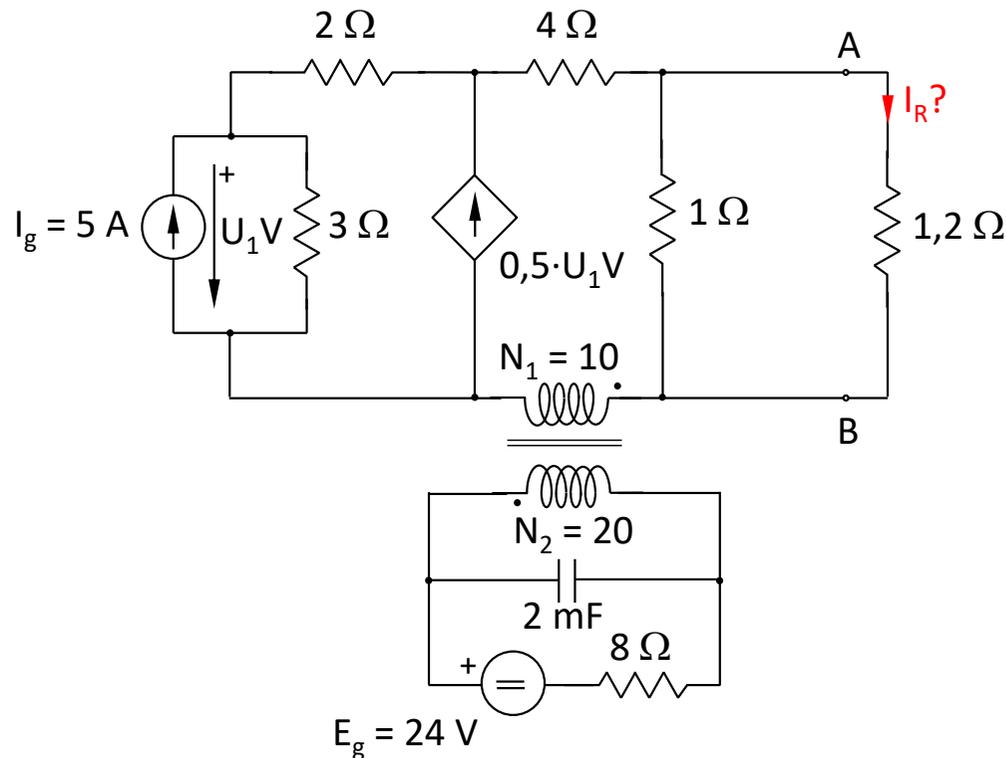
Dipolo pasivo



- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*
- *El **equivalente Thévenin** de un dipolo activo es la fuente real que le es equivalente.*

## ***5.4. Teorema de Norton. Equivalente Norton***

## 5.4. Teorema de Norton



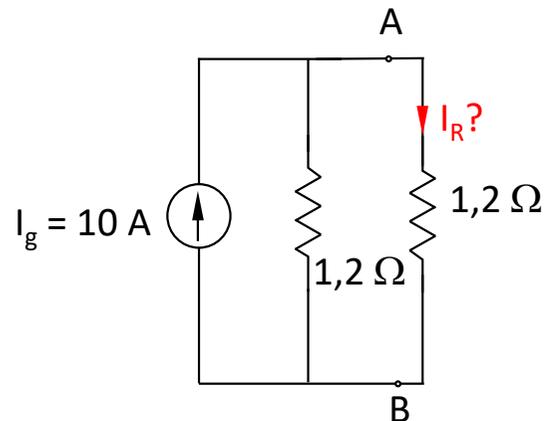
2 minutos para  
calcular  $I_R$

$$I_R = ? \text{ A}$$

¿Imposible???

## 5.4. Teorema de Norton

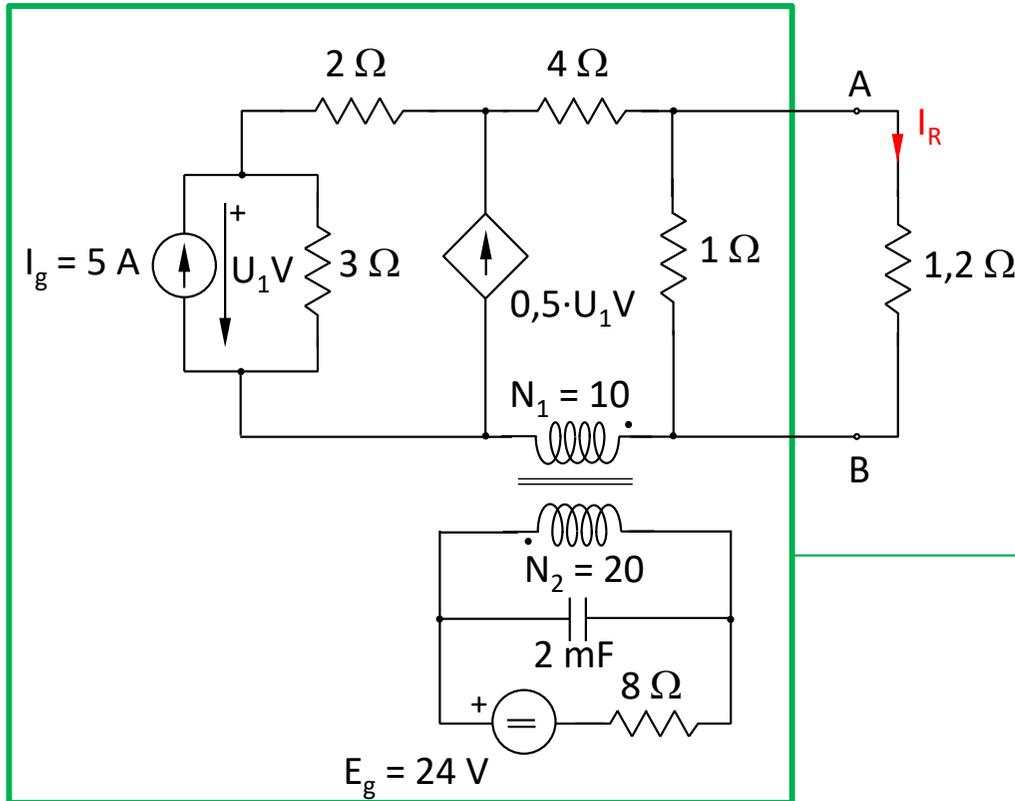
2 minutos para  
calcular  $I_R$



$$I_R = 5\text{ A}$$

Fácil ¿no????

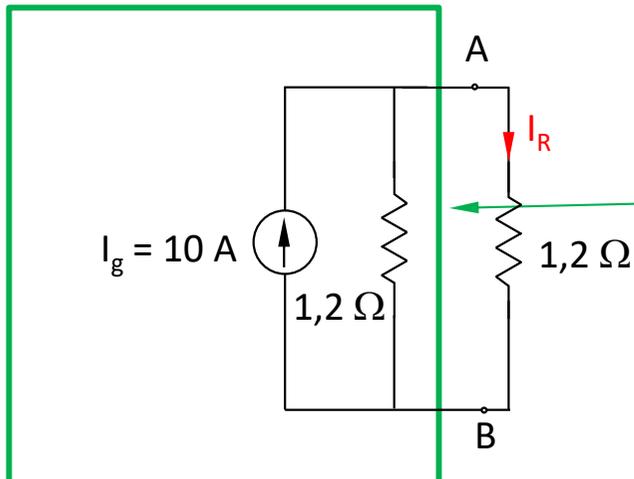
# 5.4. Teorema de Norton



$I_R = 5 \text{ A}$

entonces:

Equivalente Norton

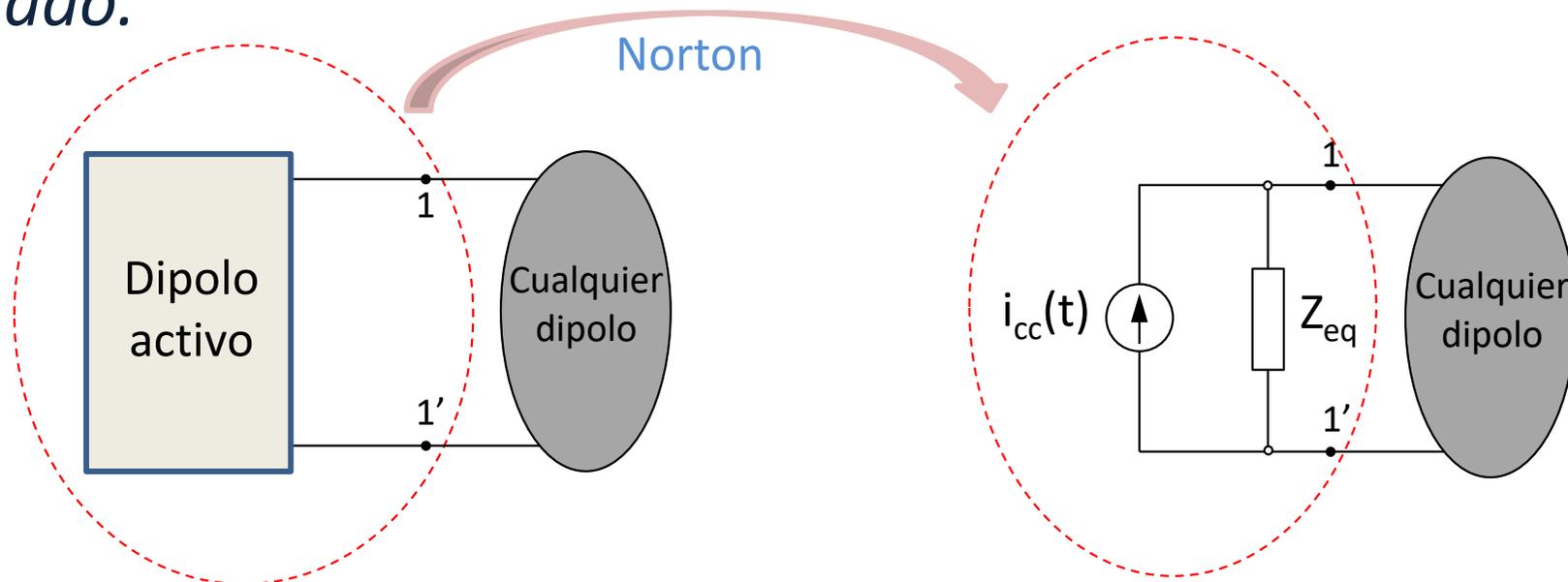


$I_R = 5 \text{ A}$

La fuente real de intensidad es equivalente al dipolo de arriba

## 5.4. Teorema de Norton

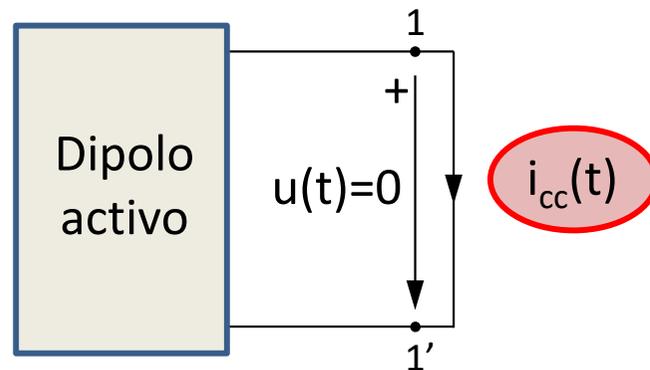
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de intensidad**, formada por, una fuente ideal de intensidad de valor la intensidad que circula entre los terminales del dipolo activo si éstos se cortocircuitan, y en paralelo una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



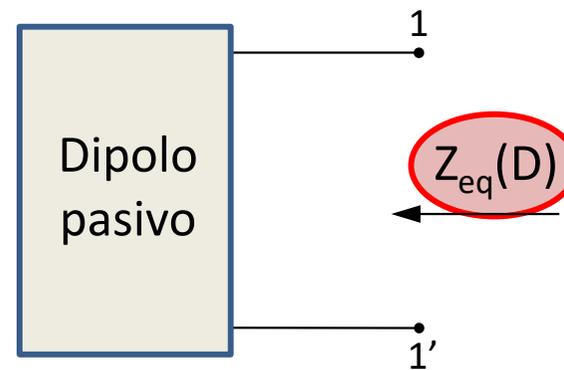
## 5.4. Teorema de Norton

- *Determinación de los valores de la fuente real:*

Dipolo activo en cortocircuito



Dipolo pasivo

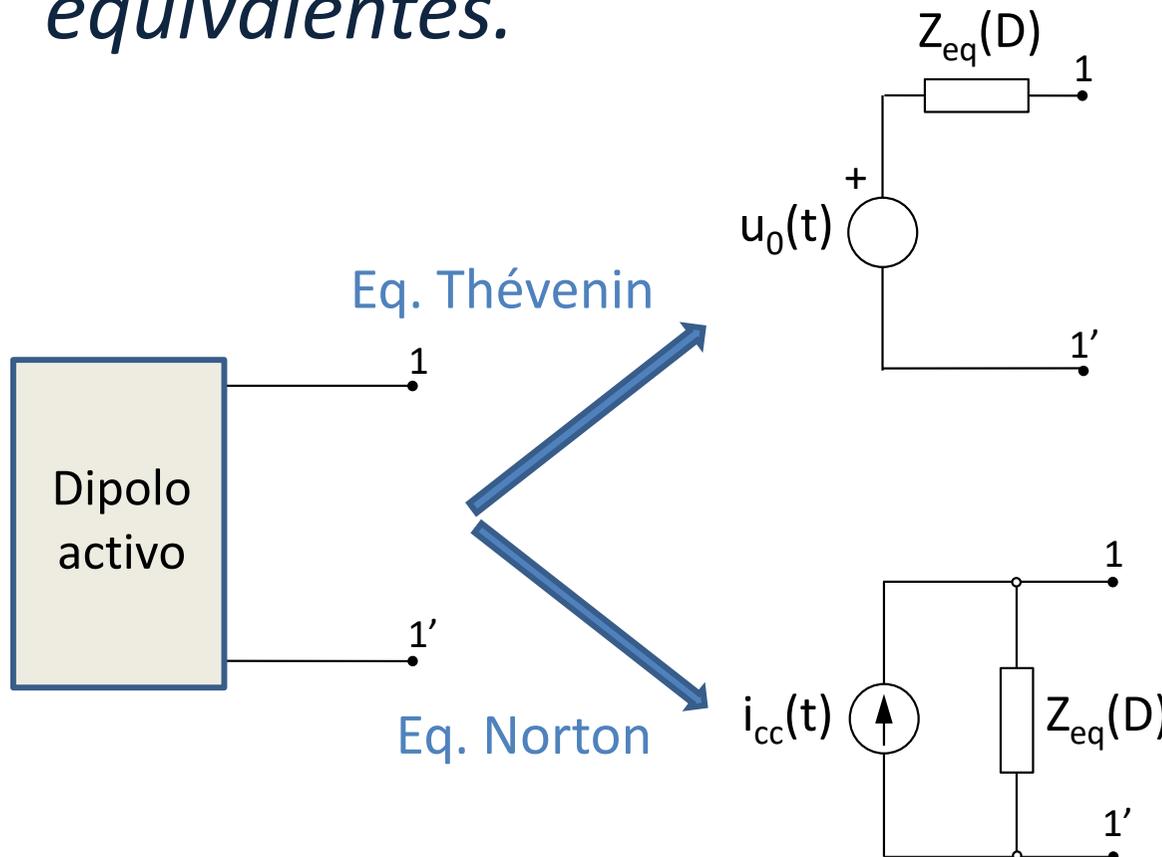


- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*
- *El **equivalente Norton** de un dipolo activo es la fuente real que le es equivalente.*

## ***5.5. Equivalente Thévenin y equivalente Norton***

## 5.5. *Equivalente Thévenin y Equivalente Norton*

- *El equivalente Thévenin y el equivalente Norton de un mismo dipolo activo, son fuentes reales equivalentes.*



Siempre se cumple que:

$$u_0(t) = Z_{eq}(D) \cdot i_{cc}(t)$$

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección *Textos Docentes*, vol. 58. *Prensas Universitarias de Zaragoza*.

# ***Tema 6***

## *Análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal*



## **Tema 6.- *Análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal.***

6.1.- Introducción.

6.2.- Generación de una tensión sinusoidal.

6.3.- Formas de onda sinusoidales. Propiedades.

6.3.1.- Formas de onda sinusoidales.

6.3.2.- Valores asociados a formas de onda sinusoidales.

6.4.- Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales.

6.5.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal (RES).

6.5.1.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal por el método de los coeficientes indeterminados.

6.5.2.- Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal por el método simbólico.

6.6.- Impedancias y Admitancias complejas. Asociación de impedancias complejas.

6.6.1.- Impedancias y admitancias complejas.

6.6.2.- Asociación de impedancias complejas.

continúa ...

- 6.7.- Elementos pasivos en régimen estacionario sinusoidal.
  - 6.7.1.- Resistencia.
  - 6.7.2.- Bobina.
  - 6.7.3.- Condensador.
  - 6.7.4.- Bobinas acopladas magnéticamente.
  - 6.7.5.- Transformador ideal.
- 6.8.- Leyes de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
  - 6.8.1.- Primera ley de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
  - 6.8.2.- Segunda ley de Kirchhoff en régimen estacionario sinusoidal.
- 6.9.- Métodos de análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal.
- 6.10.- Teoremas fundamentales en régimen estacionario sinusoidal.
  - 6.10.1.- Teorema de superposición.
  - 6.10.2.- Teorema de Thévenin.
  - 6.10.3.- Teorema de Norton.
- 6.11.- Estudio de circuitos básicos en régimen estacionario sinusoidal.
  - 6.11.1.- Circuito RC.
  - 6.11.2.- Circuito RL.
  - 6.11.3.- Circuito RLC.
  - 6.11.4.- Resumen.

## ***6.1. Introducción***

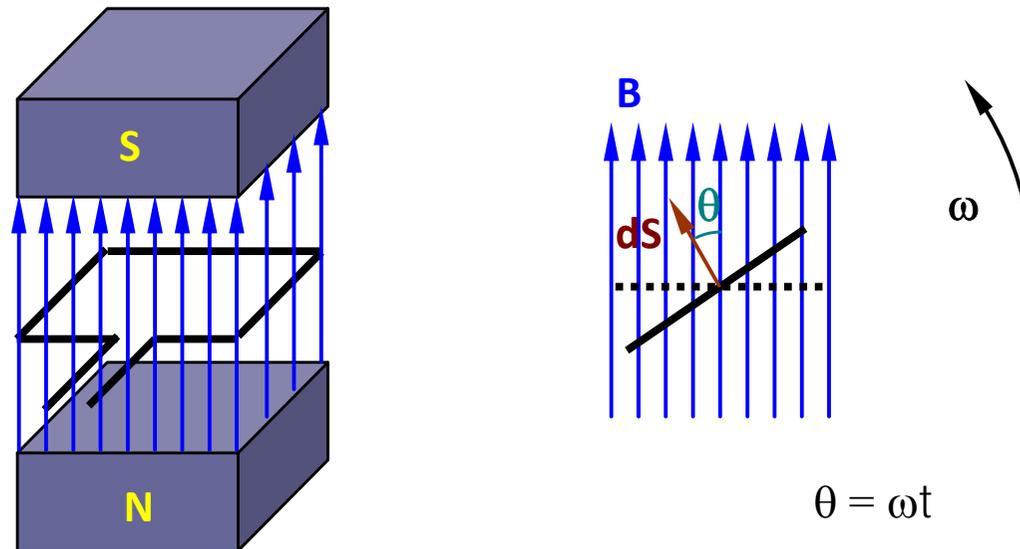
## 6.1. Introducción

- *Generación, transporte, distribución y consumo de la energía eléctrica se llevan a cabo principalmente en forma sinusoidal.*
- *Inicialmente, el principal uso de la electricidad era la iluminación. A medida que la energía eléctrica cobró importancia como fuente de energía, comenzó la disyuntiva entre corriente alterna y corriente continua, adoptándose finalmente como mayoritario el uso de la corriente alterna.*
- *La principal ventaja de la corriente alterna sobre la continua es la eficiencia en el transporte de la energía eléctrica.*
- *Se van a ver los fundamentos del análisis de circuitos en régimen estacionario sinusoidal, utilizando para ello el método simbólico desarrollado por Steinmetz. Para el análisis de dichos circuitos, se utilizarán los números complejos.*

## ***6.2. Generación de una tensión sinusoidal***

## 6.2. Generación de una tensión sinusoidal

- Bobina rectangular de  $N$  espiras situada en un campo magnético uniforme.



- Flujo que atraviesa una espira:  $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot A \cdot \cos \theta$
- Flujo que atraviesa las  $N$  espiras de la bobina:  $\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta$

## 6.2. Generación de una tensión sinusoidal

- Si la bobina gira con una velocidad angular  $\omega$ , el flujo que la atraviesa variará con el tiempo:

$$\Phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \omega t$$

- Por la “Ley de inducción de Faraday”, se inducirá una fuerza electromotriz en bornes de la bobina de valor:

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t = N \cdot \Phi_m \cdot \omega \cdot \text{sen} \omega t$$

- De forma más general, se puede escribir:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

donde  $U_0$  es el valor máximo que alcanza la tensión generada en bornes de la bobina.

## ***6.3. Formas de onda sinusoidales. Propiedades***

## 6.3.1. Formas de onda sinusoidales

- Se dice que una forma de onda es sinusoidal si sigue la ecuación:

$$f(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{donde: } \left\{ \begin{array}{l} F_0 : \text{Amplitud} \\ \omega : \text{Pulsación} \\ \omega t + \varphi : \text{Fase de la onda} \\ \varphi : \text{Fase inicial} \end{array} \right.$$

- Para toda forma de onda sinusoidal se verifica que:

$$\omega \cdot T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f \quad \text{donde: } \left\{ \begin{array}{l} T : \text{periodo (s)} \\ f : \text{frecuencia (Hz)} \end{array} \right.$$

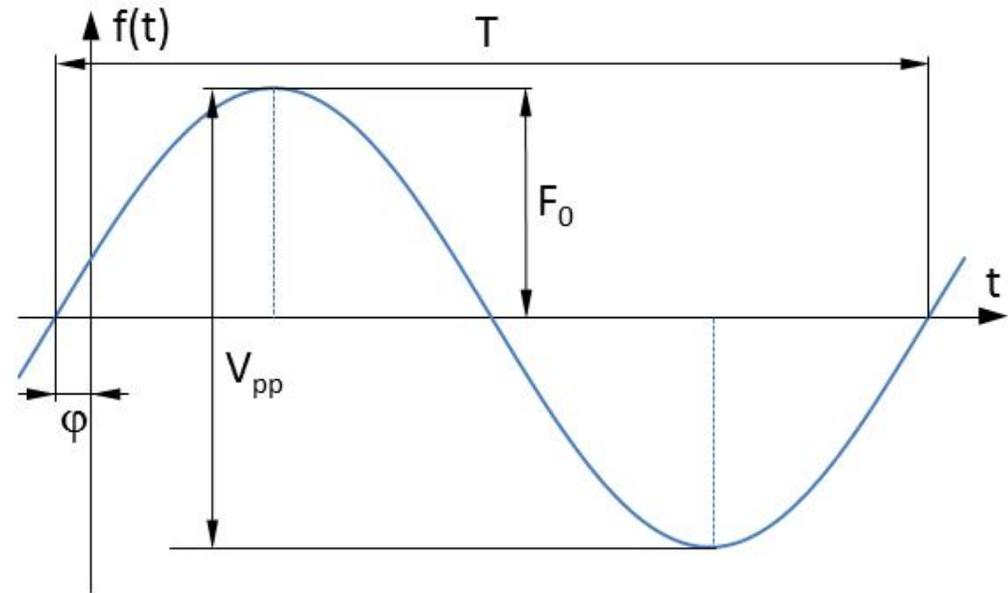
- Toda forma de onda sinusoidal se puede expresar en forma seno o coseno, con sólo cambiar su fase inicial:

$$f(t) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) = F_0 \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \text{sen}(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

## 6.3.2. Valores asociados a formas de onda sinusoidales

- **Valor de pico:** Distancia vertical entre el cero y el valor máximo (o el mínimo) de la forma de onda. **En ondas sinusoidales coincide con la amplitud ( $F_0$ ).**
- **Valor de pico a pico:** Distancia vertical entre el valor máximo y el valor mínimo de una forma de onda. **En ondas sinusoidales, dos veces la amplitud ( $2F_0$ ).**
- **Valor medio:** Promedio integral en un período.



- **Ciclo:** Porción de onda comprendida en un intervalo igual a un período.
- **Frecuencia:** N<sup>o</sup> de ciclos que tienen lugar en una unidad de tiempo.

$$T \cdot f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{F_0}{T} \int_0^T \text{sen } \omega t dt = 0$$

## 6.3.2. Valores asociados a formas de onda sinusoidales

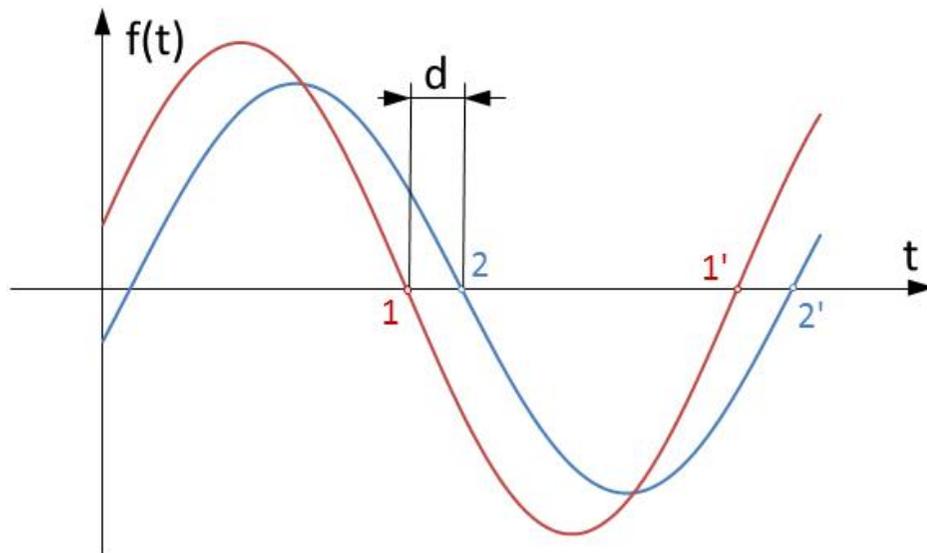
- **Valor eficaz:** Es el resultado de:

$$F_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{Sólo en el caso de formas de onda sinusoidales})$$

- El valor eficaz de cualquier forma de onda siempre es distinto de cero.
- **Interpretación física del valor eficaz:**
  - El valor eficaz de una tensión alterna es el valor de la tensión continua que, aplicada a una resistencia, produce la misma disipación de calor que el producido por dicha tensión alterna aplicada a esa misma resistencia.
  - El valor eficaz de una intensidad alterna es el valor de la intensidad continua que, circulando por una resistencia, produce la misma disipación de calor que el producido por dicha intensidad alterna circulando por esa misma resistencia.

## 6.3.2. Valores asociados a formas de onda sinusoidales

- **Desfase entre dos ondas:**



$d$  suele expresarse en grados

- Para medir el desfase entre dos ondas, se comparan estados homólogos de ambas ondas que estén separados por menos de un semiperiodo (1 y 2 ó 1' y 2', pero no 1 y 2', por ejemplo).
- Adelanta lo que primero sucede y, teniendo en cuenta que el eje horizontal es un eje de tiempo creciente, el punto 1 sucede antes que el punto 2. Por lo tanto, en el ejemplo, la onda 1 adelanta a la onda 2.

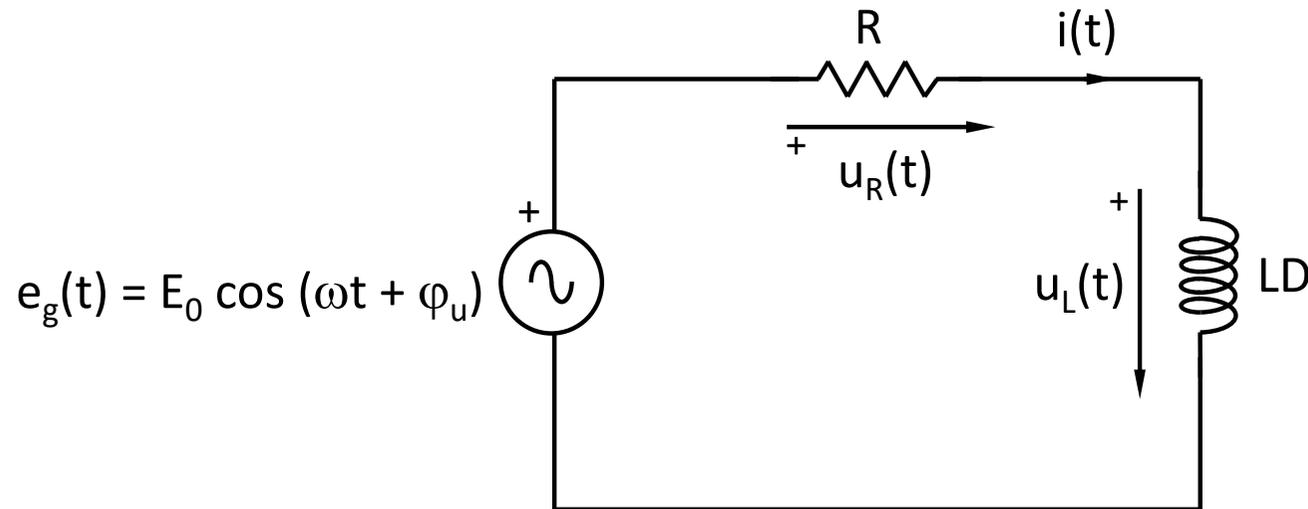
### 6.3.3. *Propiedades de las formas de onda sinusoidales*

- *Las ondas sinusoidales cumplen las siguientes propiedades matemáticas:*
  - Al sumar o restar varias ondas sinusoidales de la misma frecuencia se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia.
  - Al derivar o integrar cualquier número de veces una onda sinusoidal se obtiene otra onda sinusoidal de la misma frecuencia.
  - El producto de dos formas de onda sinusoidales, es otra forma de onda sinusoidal (aunque no de la misma frecuencia).

## ***6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales***

## 6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- Sea un circuito:



- Aplicando la LKT al circuito:  $e_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$
- Y a partir de las ecuaciones de definición de los elementos del circuito:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \qquad u_L(t) = LD \cdot i(t)$$

## 6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- *La ecuación diferencial que rige el comportamiento del circuito es:*

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = e_g(t)$$

- *Y dado que la fuente de tensión es sinusoidal:*

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

- *La solución de esta ecuación diferencial es la intensidad que circula por el circuito (es decir, su respuesta).*

## 6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

- ¿Cómo se resuelve la ecuación diferencial?
  - Solución completa de la ecuación diferencial:

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t)$$

- Ecuación diferencial homogénea:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Solución}} \quad i_h(t) = C e^{-t \frac{R}{L}}$$

C es una constante

- Es el *modo natural* del circuito, constituye su *régimen transitorio*.
- Se amortigua con el tiempo.
- No depende de la forma de onda de la fuente de excitación del circuito.

## 6.4. Circuitos alimentados con fuentes sinusoidales

– Solución particular:

- Se prueba una solución que tenga la misma forma que la excitación del circuito:

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Esta solución constituye el *régimen permanente* o *régimen estacionario* del circuito, y es lo que estamos buscando determinar.
- Queda totalmente determinada calculando el valor de la amplitud  $I_0$  y el valor del ángulo  $\varphi_i$ .

## ***6.5. Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal***

## 6.5. *Determinación del Régimen Estacionario Sinusoidal*

- *El régimen estacionario de un circuito viene dado por la solución particular de la ecuación diferencial que rige el comportamiento de dicho circuito.*
- *Formas de determinar los parámetros de la solución particular:*
  - *Método de los coeficientes indeterminados* o cualquier otro que permita la resolución de la ecuación diferencial.
  - *Método simbólico.*

## 6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

### – *Método de los coeficientes indeterminados:*

- Se considera una solución particular de la ecuación con la misma forma que el término independiente, donde  $I_0$  y  $\varphi_i$  son los coeficientes a determinar.

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Esta solución ha de satisfacer la ecuación diferencial:

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \varphi_i) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

- Desarrollando las sumas de senos y cosenos se llega a:

$$\begin{aligned} -LI_0\omega \sin \omega t \cos \varphi_i - LI_0\omega \cos \omega t \sin \varphi_i + RI_0 \cos \omega t \cos \varphi_i - RI_0 \sin \omega t \sin \varphi_i &= \\ = E_0 \cos \omega t \cos \varphi_u - E_0 \sin \omega t \sin \varphi_u \end{aligned}$$

## 6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

- Agrupando términos e igualando coeficientes, se obtiene:

$$Rl_0 \cos \varphi_i - \omega L l_0 \sin \varphi_i = E_0 \cos \varphi_u$$

$$-Rl_0 \sin \varphi_i - \omega L l_0 \cos \varphi_i = E_0 \sin \varphi_u$$

- Ecuaciones que constituyen un sistema de ecuaciones que permite calcular las incógnitas  $l_0$  y  $\varphi_i$ .
- Elevando al cuadrado los dos miembros de ambas ecuaciones:

$$R^2 l_0^2 \cos^2 \varphi_i + \omega^2 L^2 l_0^2 \sin^2 \varphi_i - 2R\omega L l_0^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i = E_0^2 \cos^2 \varphi_u$$

$$R^2 l_0^2 \sin^2 \varphi_i + \omega^2 L^2 l_0^2 \cos^2 \varphi_i + 2R\omega L l_0^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i = E_0^2 \sin^2 \varphi_u$$

## 6.5.1 Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados

- Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$R^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2 = E_0^2$$

- y despejando, se obtiene:

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

- Si dividimos ambas ecuaciones:

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{-R \operatorname{sen} \varphi_i + \omega L \operatorname{cos} \varphi_i}{R \operatorname{cos} \varphi_i + \omega L \operatorname{sen} \varphi_i}$$

- que también puede escribirse:  $\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i + \frac{\omega L}{R}}{1 - \frac{\omega L}{R} \operatorname{tg} \varphi_i}$

## 6.5.1 *Determinación del RES por el método de los coefs. indeterminados*

- Si se denota por  $\text{tg } \varphi$  a la expresión:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

- se obtiene que:

$$\text{tg } \varphi_u = \text{tg}(\varphi_i + \varphi)$$

- y, por lo tanto:

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

- Esto es, la solución particular de la ecuación diferencial queda:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi)$$

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

### – Método simbólico:

- Consiste en la resolución analítica de circuitos en régimen estacionario sinusoidal mediante la aplicación del cálculo complejo a través del *método vectorial complejo*.

- El método se basa en la fórmula de Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad \text{siendo } j = \sqrt{-1}$$

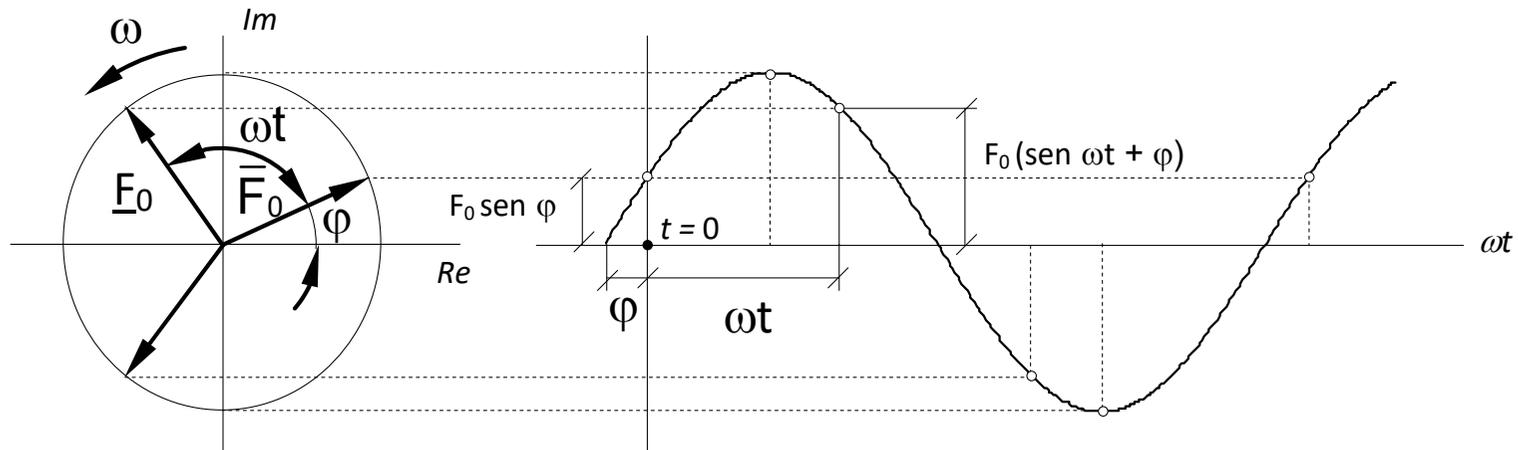
- Esta ecuación representa, en el plano complejo, un vector unitario que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, con una velocidad angular de  $\omega$  radianes/segundo.

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

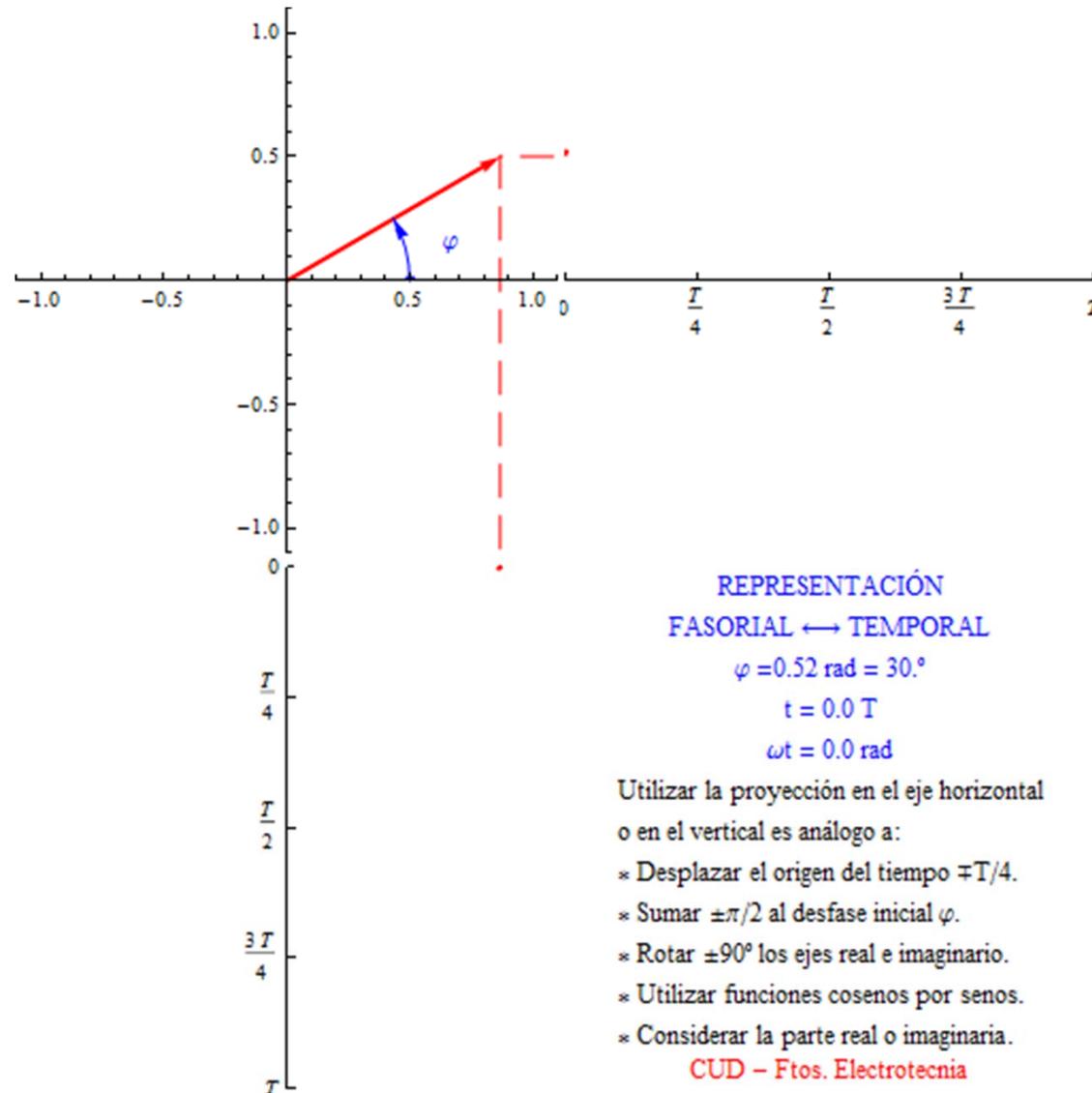
- Sea una forma de onda sinusoidal:

$$f(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- Esta función sinusoidal se puede considerar como el resultado de proyectar en el eje vertical un vector giratorio, tal y como puede verse en la figura siguiente.



## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico



## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- En  $t = 0$ , el número complejo forma un ángulo  $\varphi$  con el eje horizontal. De acuerdo con el álgebra de los números complejos y la fórmula de *Euler*, este número se puede representar por la forma:

$$\bar{F}_0 = F_0 e^{j\varphi} = F_0 \cos \varphi + j F_0 \operatorname{sen} \varphi$$

- Ahora bien, si el vector que representa al número complejo gira en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad angular de  $\omega$  rad/s, en el instante  $t$  el vector habrá barrido un ángulo  $\omega t$ , que sumado a la fase inicial significará que el ángulo que forma el vector con el eje real será:

$$\theta = \omega t + \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ \omega: \text{pulsación (radianes / segundo)} \\ f: \text{frecuencia (Herzios)} \end{array} \right.$$

- En estas condiciones, el vector giratorio  $\underline{F}_0$  (*FASOR*) se puede representar en la forma:

$$\underline{F}_0 = F_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (F_0 e^{j\varphi}) e^{j\omega t} = \bar{F}_0 e^{j\omega t}$$

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- La aplicación del método simbólico para determinar la solución particular de la ecuación diferencial se basa en la transformación del circuito al campo complejo, basándose en la posibilidad de representar las ondas sinusoidales mediante fasores.
- **Transformación del circuito al campo complejo:**
  - La fuente de excitación es sinusoidal, por lo que se le puede asociar un fasor:

$$\underline{E}_0 = E_0 \angle \varphi_u = (E_0 e^{j\varphi_u}) e^{j\omega t} = E_0 \cos(\omega t + \varphi_u) + jE_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_u)$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial la fuente sinusoidal por su fasor asociado, se tendrá:

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = \underline{E}_0$$

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- En cuanto a la intensidad que circula por el circuito, también será sinusoidal, y se le podrá asociar un fasor:

$$\underline{i}_0 = I_0 \angle \varphi_i = (I_0 e^{j\varphi_i}) e^{j\omega t} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) + j I_0 \sin(\omega t + \varphi_i)$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$R I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} + j\omega L I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = E_0 e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$



$$(R + j\omega L) \underline{i}_0 = \underline{E}_0$$

- Puede verse que esta ecuación se trata ahora de una ecuación en números complejos, en vez de una ecuación diferencial.

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Se resuelve planteando la igualdad de módulos y argumentos:

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I_0 = E_0$$

$$\varphi + \varphi_i = \varphi_u \quad \text{siendo } \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

- Si en vez de utilizar valores de amplitud si se utilizan valores eficaces, algo habitual en ingeniería eléctrica, la ecuación se escribirá:

$$(R + j\omega L)\underline{I} = \underline{E}$$

- Este proceso de transformación para conseguir que las ecuaciones diferenciales pasen a ser ecuaciones algebraicas, suele denominarse “**transformar el circuito al campo complejo**”.

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Una vez resuelta la ecuación o sistemas de ecuaciones en números complejos, se tendrán los fasores correspondientes a las respuestas de los circuitos.
- Para hacer la transformación inversa, y obtener así la expresión temporal de las respuestas de los circuitos, se tomará la parte real o la parte imaginaria de los números complejos que representan a estos fasores en función de si las excitaciones se han expresado en forma coseno (parte real) o en forma seno (parte imaginaria).

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i \begin{cases} \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i) & \text{si fuentes en forma coseno} \\ \rightarrow i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Im}[\underline{I}] = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \varphi_i) & \text{si fuentes en forma seno} \end{cases}$$

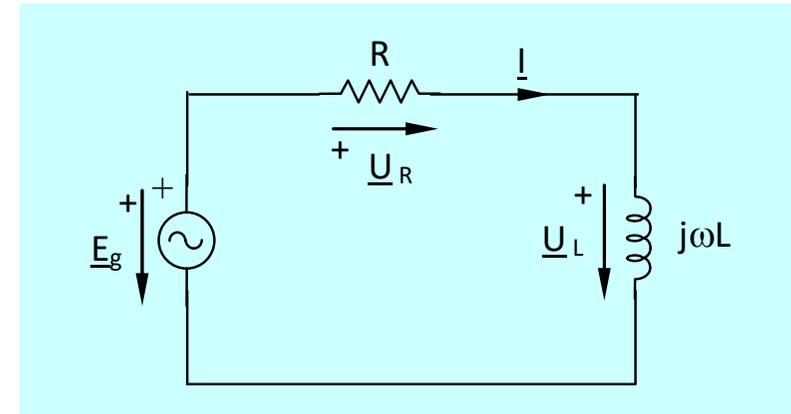
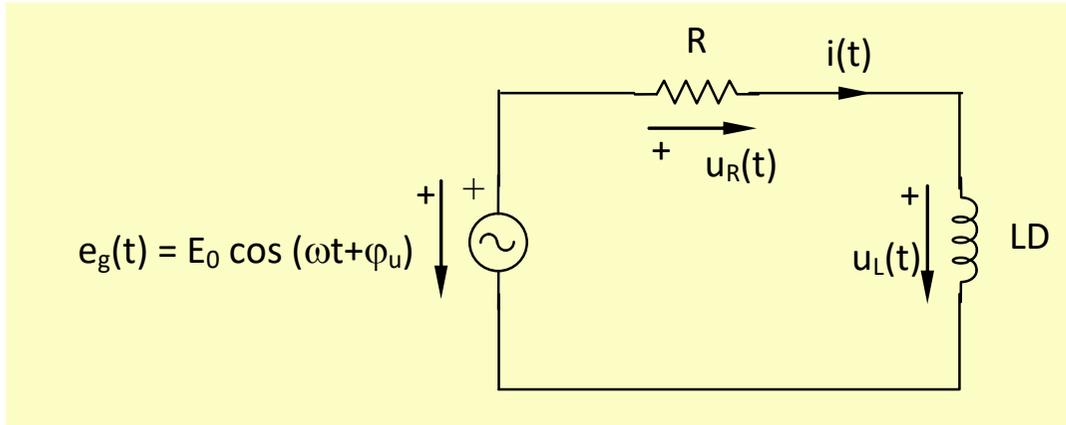
## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- *Procedimiento para realizar la transformación de un circuito al campo complejo:*
  - Comprobar que todas las fuentes de excitación del circuito son de la misma pulsación. Si no lo son, y se desea analizar el circuito por el método simbólico, será imprescindible hacerlo aplicando el teorema de superposición.
  - Comprobar que todas las fuentes de excitación del circuito una única forma seno o coseno, y si no la tienen transformarlas sumando o restando  $\pi/2$  a su fase inicial.
  - Sustituir las expresiones temporales de las fuentes de excitación del circuito por sus fasores asociados. Dichos fasores se escribirán como números complejos cuyo módulo es el valor eficaz y como argumento la fase inicial de cada una de las fuentes.

## 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico

- Sustituir las expresiones temporales de las distintas variables del circuito por sus fasores asociados.
- En las impedancias operacionales del circuito, se sustituye el operador derivada,  $D$ , por el número complejo  $j\omega$ .
- *En la siguiente página se ve un ejemplo de esta transformación.*
  - En amarillo, circuito en el dominio del tiempo.
  - En azul, circuito en el campo complejo.

# 6.5.2 Determinación del RES por el método simbólico



$$e_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad u_L(t) = LD \cdot i(t)$$

$$R \cdot i(t) + LD \cdot i(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = i_{\text{homogénea}}(t) + i_{\text{particular}}(t)$$

$$i_{\text{particular}}(t) = i_{\text{estacionario}}(t)$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

$$\underline{E}_g = \underline{U}_R + \underline{U}_L$$

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}$$

$$(R + j\omega L) \underline{I} = \underline{E}$$

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I = E \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\varphi + \varphi_i = \varphi_u \Rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi \quad \text{siendo } \varphi = \text{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i \quad i(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}(\underline{I}) = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

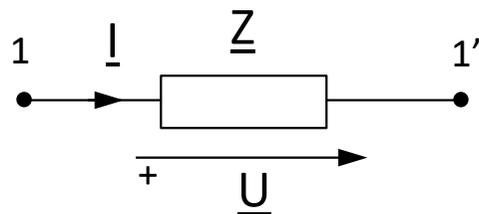
## ***6.6. Impedancias y admitancias complejas. Asociación de impedancias***

## 6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

- Dado un dipolo pasivo, se definen:
  - **Impedancia compleja:** relación entre la tensión compleja en bornes del dipolo y la intensidad compleja que lo atraviesa.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \begin{cases} \underline{Z} = Z \angle \varphi_Z & \text{Forma polar} \\ \underline{Z} = R + jX & \text{Forma binómica} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} R: \text{ Resistencia} \\ X: \text{ Reactancia} \end{array} \right.$$

Representación:



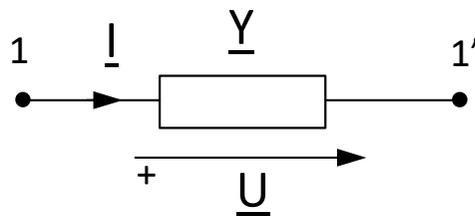
Unidades:  $\left\{ \begin{array}{l} Z: \text{ Ohmios } (\Omega) \\ R: \text{ Ohmios } (\Omega) \\ X: \text{ Ohmios } (\Omega) \end{array} \right.$

## 6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

- **Admitancia compleja:** relación entre la intensidad compleja que atraviesa un dipolo y la tensión compleja entre sus bornes.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \begin{cases} \underline{Y} = Y \angle \varphi_Y & \text{Forma polar} \\ \underline{Y} = G + jB & \text{Forma binómica} \end{cases} \begin{cases} G: \text{ Conductancia} \\ B: \text{ Susceptancia} \end{cases}$$

Representación:



$$\text{Unidades: } \begin{cases} G: \text{ Siemens (S)} \\ B: \text{ Siemens (S)} \\ Y: \text{ Siemens (S)} \end{cases}$$

## 6.6.1. Impedancias y admitancias complejas

– *Siempre* se cumple que:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

– **Atención:**  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  pero  $G \neq \frac{1}{R}$  y  $B \neq \frac{1}{X}$

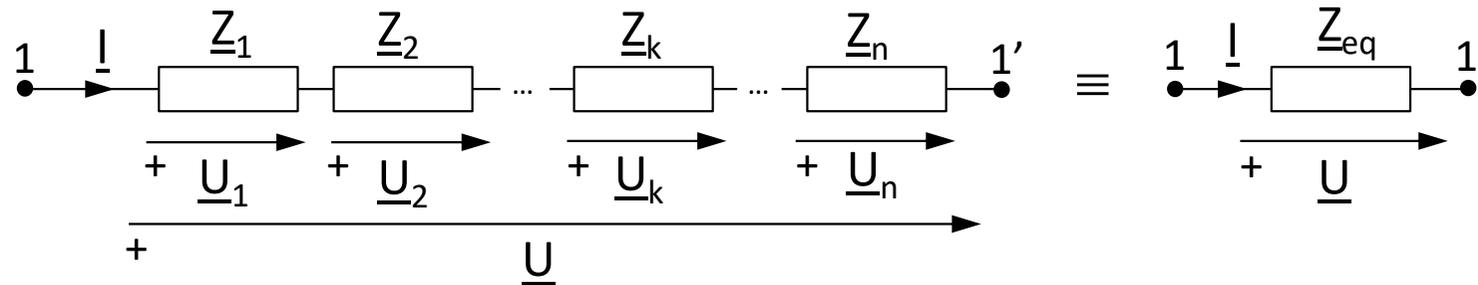
– Comprobación:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

– Entonces:  $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$        $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$

## 6.6.2. Asociación de impedancias complejas complejas

- Asociación de impedancias complejas en serie:



$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}$$

⋮

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I}$$

⋮

$$\underline{U}_n = \underline{Z}_n \cdot \underline{I}$$

Ley de Kirchhoff de las tensiones

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \left( \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \right) \cdot \underline{I}$$

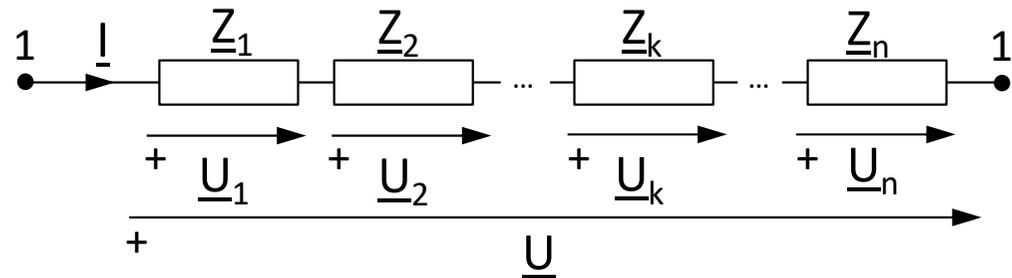
Ley de Ohm

$$\underline{U} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

## 6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- *Divisor de tensión:*



$$\underline{U} = \left( \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \right) \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{I}$$



$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k}$$

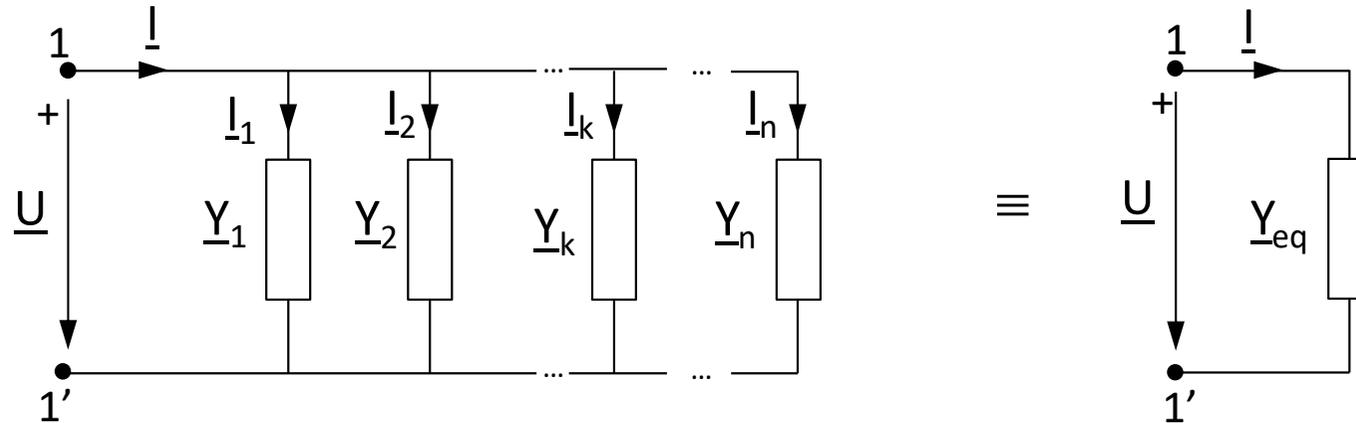


$$\underline{U}_k = \underline{U} \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k}$$

Expresión del divisor de tensión

## 6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- Asociación de admitancias complejas en paralelo:



$$I_1 = Y_1 \cdot U$$

$$I_2 = Y_2 \cdot U$$

⋮

$$I_k = Y_k \cdot U$$

⋮

$$I_n = Y_n \cdot U$$

Ley de Kirchhoff de las intensidades

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \left( \sum_{k=1}^n Y_k \right) \cdot U$$

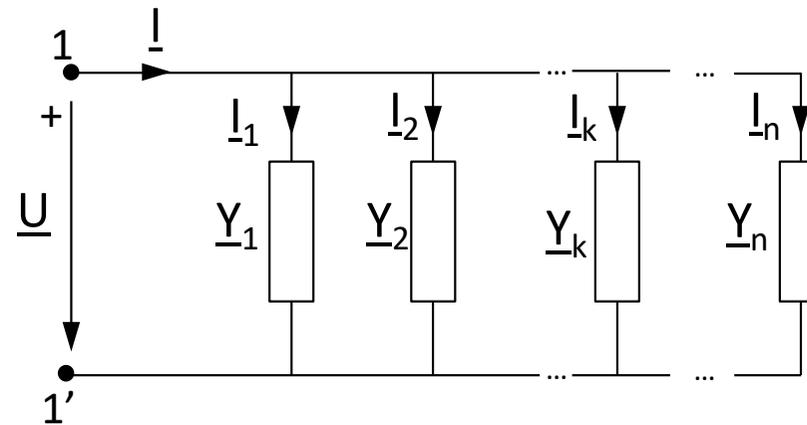
Ley de Ohm

$$I = Y_{eq} \cdot U$$

$$Y_{eq} = \sum_{k=1}^n Y_k$$

## 6.6.2. Asociación de impedancias complejas

- *Divisor de intensidad:*



$$\underline{I} = \left( \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \right) \cdot \underline{U}$$

$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U}$$

$$\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$



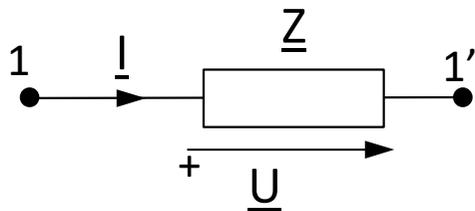
$$\underline{I}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}$$

Expresión del divisor de  
intensidad

## ***6.7. Elementos pasivos en RES***

## 6.7. Elementos pasivos básicos en régimen estacionario sinusoidal

- A continuación se ven las impedancias complejas de los distintos elementos pasivos básicos que forman parte de los circuitos eléctricos.
- Hay que recordar que para transformar las impedancias operacionales al campo complejo, se sustituye el operador derivada,  $D$ , por el número complejo  $j\omega$ .
- Recordar también que cualquier circuito pasivo puede representarse mediante su impedancia equivalente, de manera que:



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX = Z \angle \varphi_Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

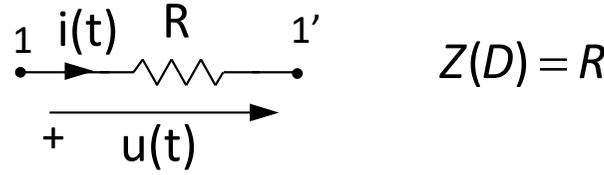
$$\varphi_Z = \arctg \frac{X}{R}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$U = Z \cdot I$$

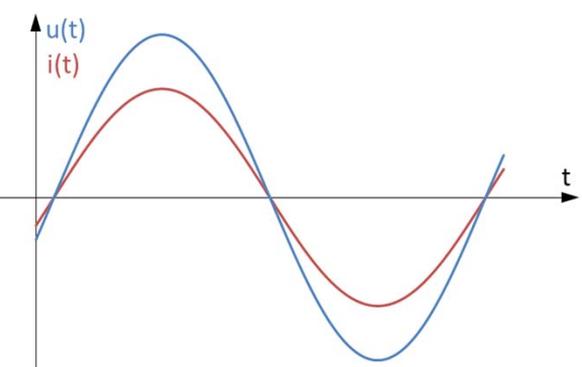
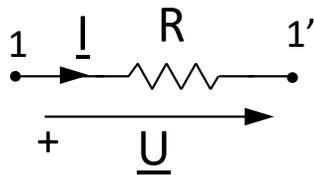
$$\varphi_u = \varphi_Z + \varphi_i$$

# 6.7.1. Resistencia



$Z(D) = R$

$u(t) = R \cdot i(t)$

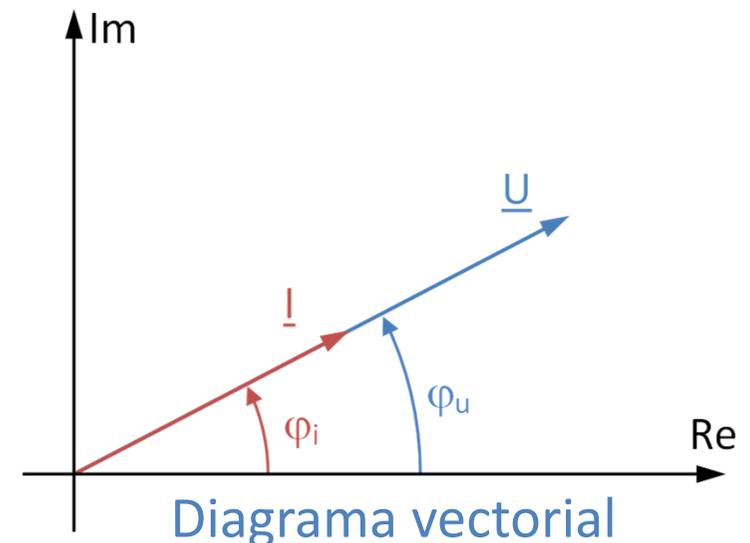



$\underline{Z} = R$

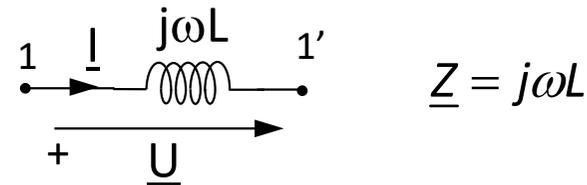
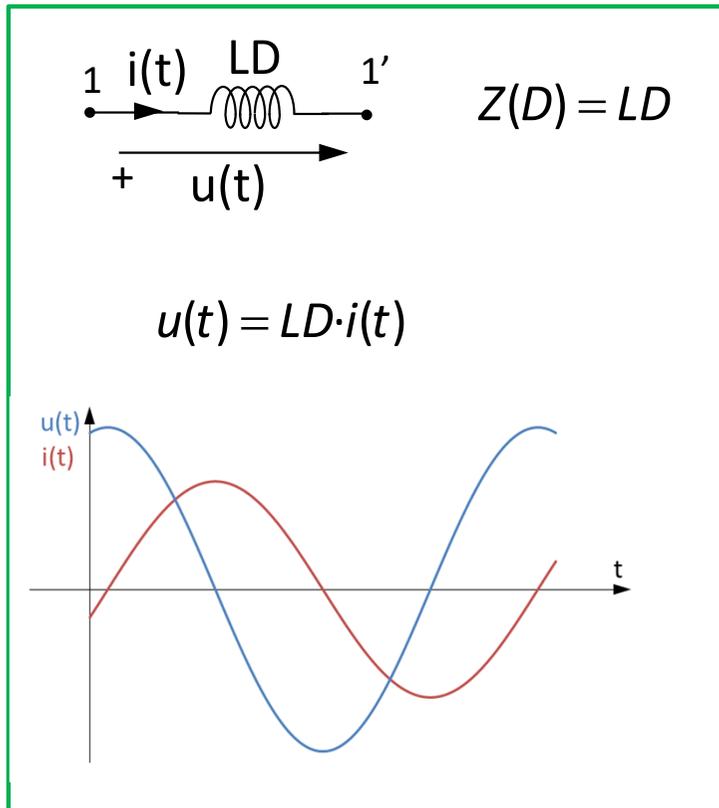
$$\underline{Z} = R = R + j0 \begin{cases} R \geq 0 \\ X = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \underline{Z} = R = R \angle 0^\circ \begin{cases} Z = R \\ \varphi_Z = 0^\circ \end{cases}$$

$$\underline{U} = R \angle 0^\circ \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = R \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases}$$

*Resistencia:  $\varphi_u = \varphi_i$*   
*Tensión e intensidad están en fase*



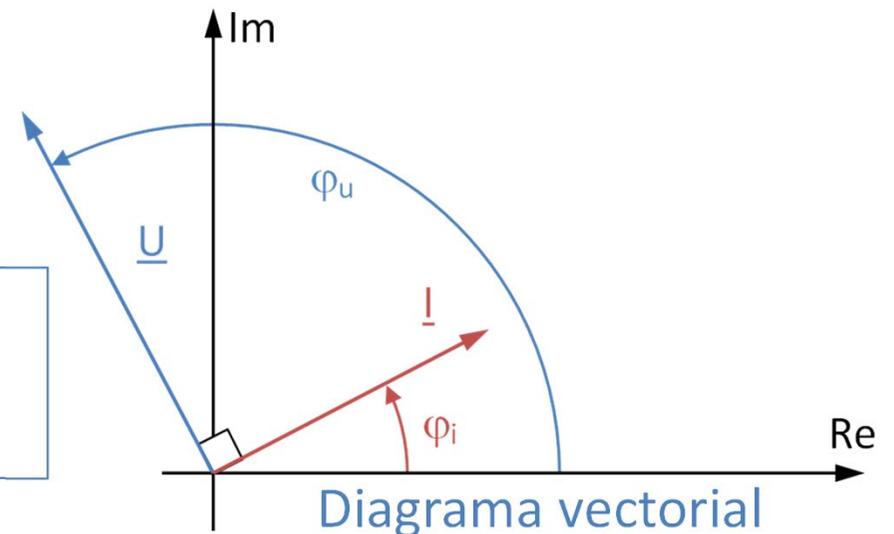
## 6.7.2. Bobina



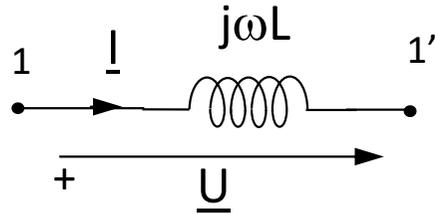
$$\underline{Z} = j\omega L = 0 + j\omega L \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ X = \omega L \geq 0 \end{array} \right. \left| \underline{Z} = j\omega L = \omega L \underline{90^\circ} \right. \left\{ \begin{array}{l} Z = \omega L \\ \varphi_Z = +90^\circ \end{array} \right.$$

$$\underline{U} = \omega L \underline{90^\circ} \cdot \underline{I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U = \omega L \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \end{array} \right.$$

**Bobina:**  $\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i$   
 La tensión adelanta  $90^\circ$  a la intensidad



## 6.7.2. Bobina



$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L \left| +90^\circ \right. \begin{cases} Z = \omega L \rightarrow \text{El valor depende de la frecuencia} \\ \varphi_Z = +90^\circ \end{cases}$$

Si  $\omega = 0$  (corriente continua)  $\Rightarrow Z = \omega L = 0 \rightarrow$  Cortocircuito

Si  $\omega \rightarrow \infty$  (alta frecuencia)  $\Rightarrow Z = \omega L \rightarrow \infty \rightarrow$  Circuito abierto

# 6.7.3. Condensador

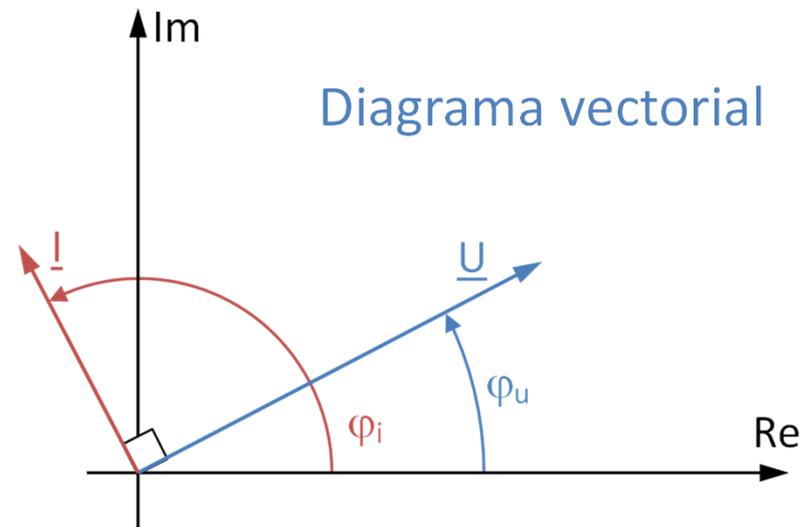
$Z(D) = \frac{1}{CD}$   
 $u(t) = \frac{1}{CD} \cdot i(t)$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j(j\omega C)} = -j \frac{1}{\omega C}$$

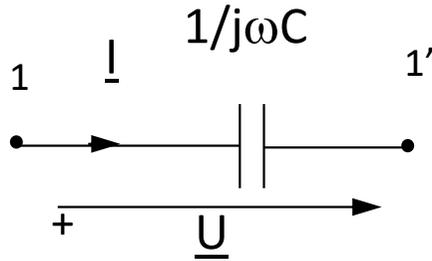
$$\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = 0 - j \frac{1}{\omega C} \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \\ X = -\frac{1}{\omega C} \leq 0 \end{array} \right. \left| \underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \right\} \left. \begin{array}{l} Z = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi_Z = -90^\circ \end{array} \right.$$

$$\underline{U} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \cdot \underline{I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{\omega C} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \end{array} \right.$$

**Condensador:**  $\varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i$   
 La tensión retrasa  $90^\circ$  respecto de la intensidad



## 6.7.3. Condensador



$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j(j\omega C)} = -j \frac{1}{\omega C}$$

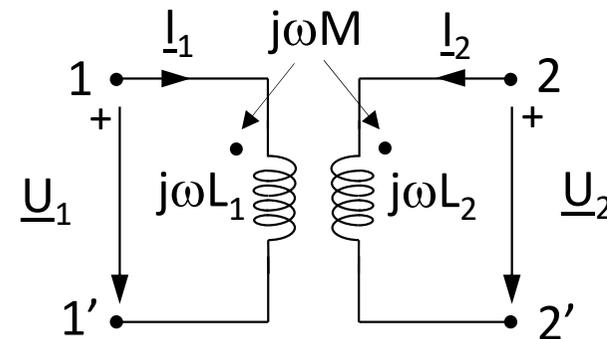
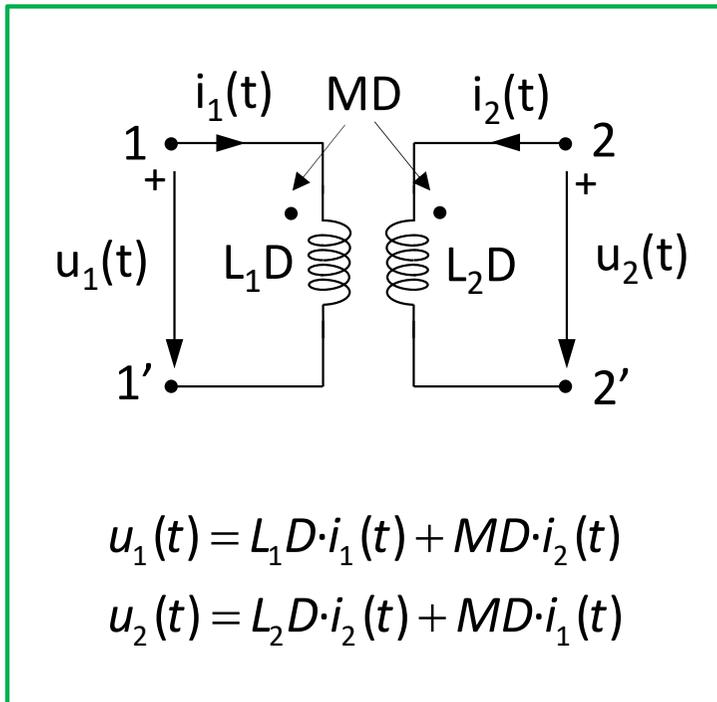
$$\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \left| -90^\circ \right. \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \text{El valor depende de la frecuencia} \\ \varphi_Z = -90^\circ \end{array} \right.$$

Si  $\omega = 0$  (corriente continua)  $\Rightarrow Z = 1/\omega C \rightarrow \infty \rightarrow$  **Circuito abierto**

Si  $\omega \rightarrow \infty$  (alta frecuencia)  $\Rightarrow Z = 1/\omega C = 0 \rightarrow$  **Cortocircuito**

## 6.7.4. Bobinas acopladas magnéticamente

Para las referencias y terminales correspondientes indicados:

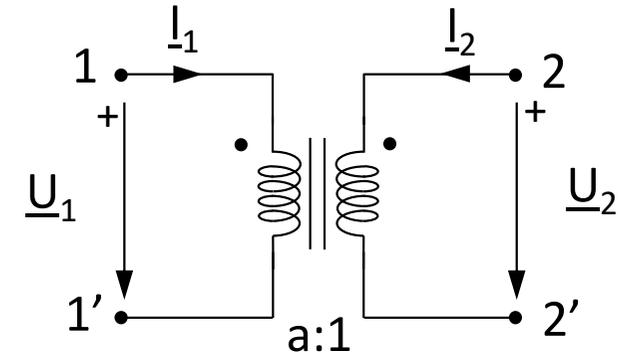
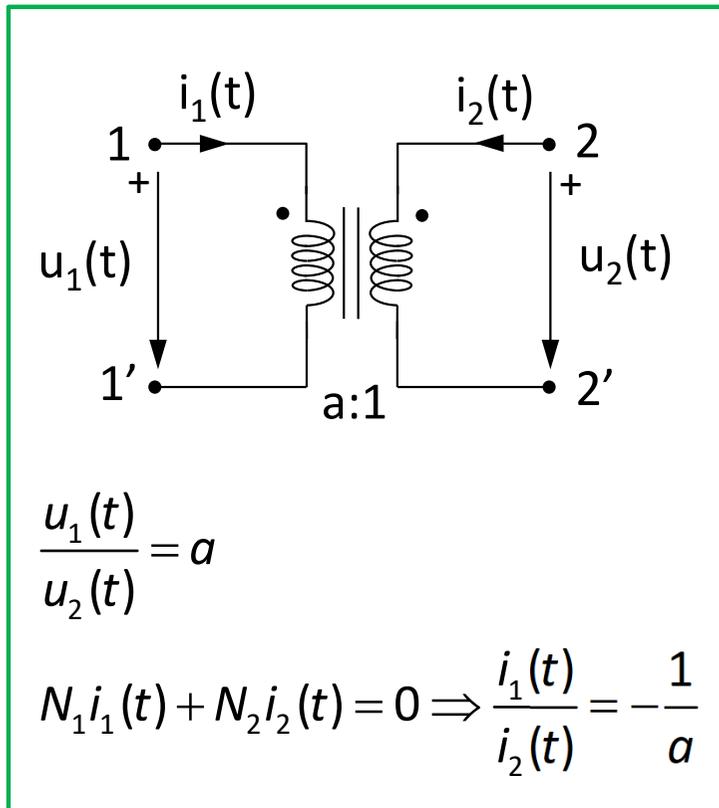


$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot I_1 + j\omega M \cdot I_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \cdot I_2 + j\omega M \cdot I_1$$

# 6.7.5. Transformador ideal

Para las referencias y terminales correspondientes indicados:



$$\frac{U_1}{U_2} = a$$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \angle 180^\circ$$

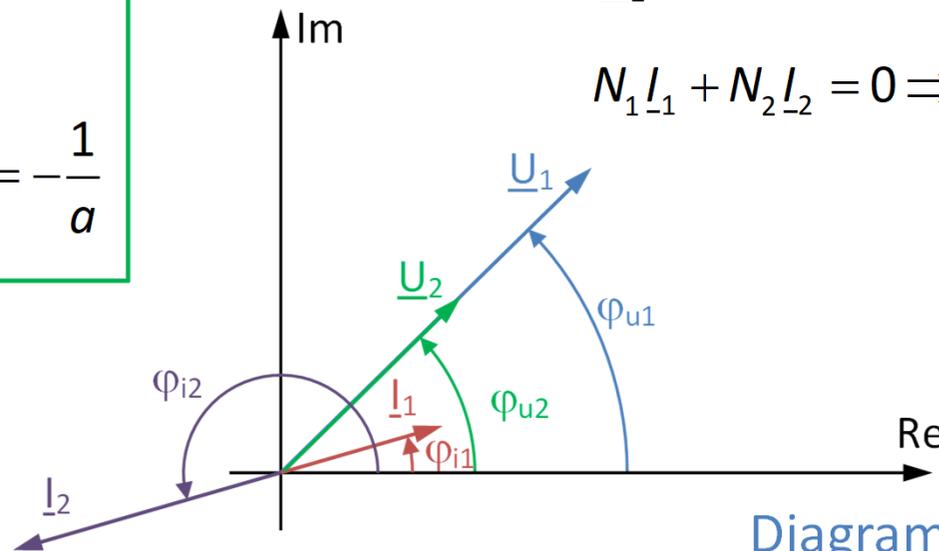
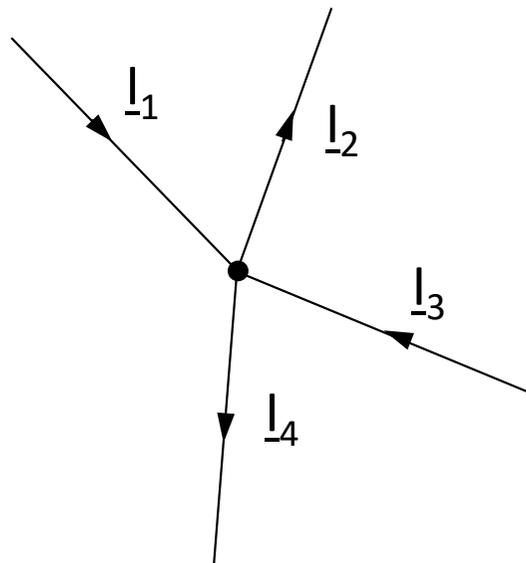


Diagrama vectorial

## ***6.8. Leyes de Kirchhoff en RES***

## 6.8.1. Ley de Kirchhoff de las intensidades en RES

- La suma de todas las intensidades complejas que entran (salen) en (de) un nudo a través del conjunto de conductores que concurren en él, es siempre cero.



$$\sum I_{-entran} = 0 \quad \sum I_{-salen} = 0$$

$$\sum I_{-entran} = \sum I_{-salen}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} I_{-1} - I_{-2} + I_{-3} - I_{-4} &= 0 \\ -I_{-1} + I_{-2} - I_{-3} + I_{-4} &= 0 \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} I_{-1} + I_{-3} &= I_{-2} + I_{-4} \end{aligned}$$

**Atención:** Notar que las sumas son vectoriales, **NO EN MÓDULO**

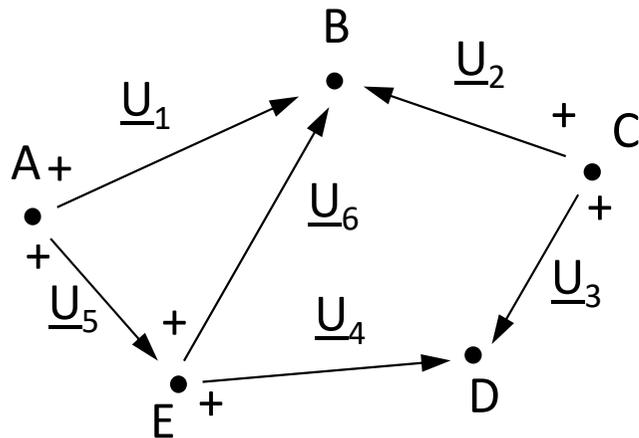
**En general:**

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 \neq 0$$

## 6.8.2. Ley de Kirchhoff de las tensiones en RES

- La suma de las tensiones complejas a lo largo de cualquier trayectoria cerrada de un circuito, es siempre cero.

Ejemplos:



$$\text{Trayectoria } ABCDEA \dots \underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 - \underline{U}_5 = 0$$

$$\text{Trayectoria } ABEA \dots \underline{U}_1 - \underline{U}_6 - \underline{U}_5 = 0$$

$$\text{Trayectoria } EBCDE \dots \underline{U}_6 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0 \Rightarrow \underline{U}_6 = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 + \underline{U}_4$$

$$\text{Trayectoria } EBAE \dots \underline{U}_6 - \underline{U}_1 + \underline{U}_5 = 0 \Rightarrow \underline{U}_6 = \underline{U}_1 - \underline{U}_5$$

$$\underline{U}_{EB} = \underline{U}_6 = \underbrace{-\underline{U}_5 + \underline{U}_1}_{\text{Trayectoria EAB}} = \underbrace{\underline{U}_4 - \underline{U}_3 + \underline{U}_2}_{\text{Trayectoria EDCB}}$$

**Atención:** Notar que las sumas son vectoriales, **NO EN MÓDULO**

**En general:**  $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 - \underline{U}_5 \neq 0$

## ***6.9. Métodos de análisis de circuitos en RES***

## 6.9. Método de análisis de circuitos en RES

- *Métodos de análisis:*
  - Método de nudos.
  - Método de mallas.
- *Las variables empleadas en los métodos de análisis (tensiones de nudo e intensidades de malla) serán fasores y vendrán representadas por números complejos.*
- *Los sistemas de ecuaciones resultantes de aplicar el método de análisis elegido a un circuito, serán sistemas de ecuaciones en números complejos, en vez de sistemas de ecuaciones diferenciales.*

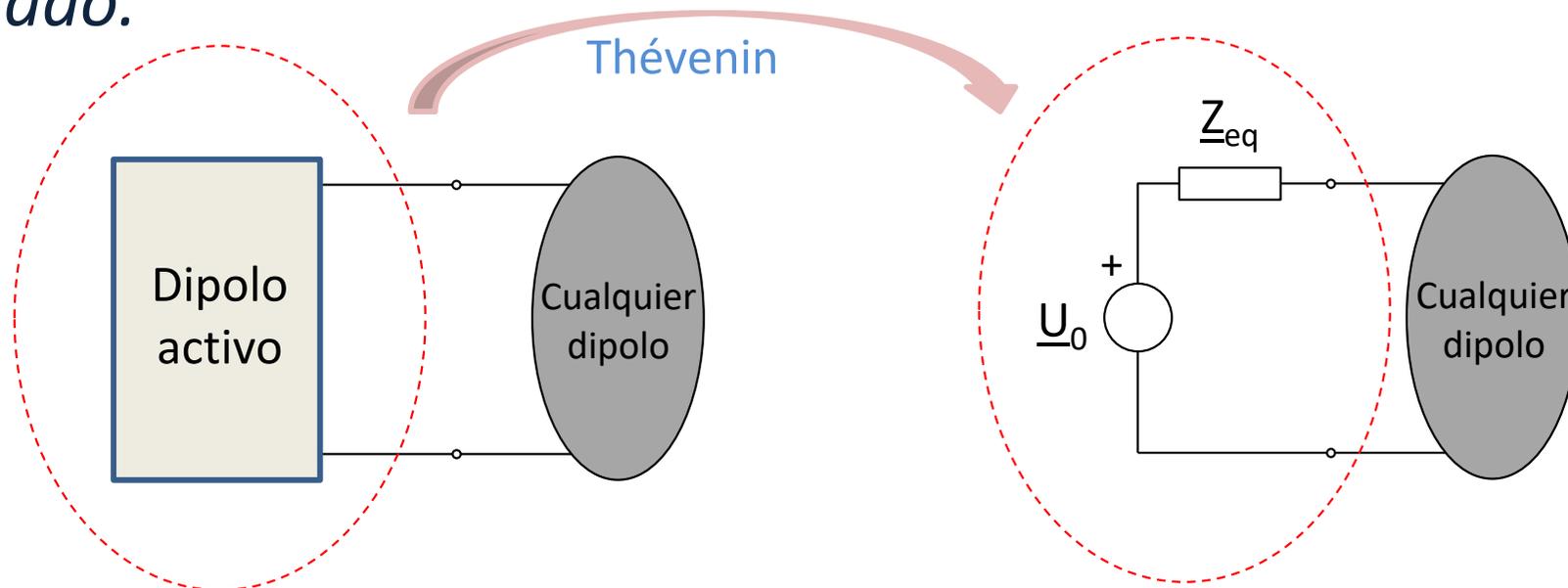
## ***6.10. Teoremas fundamentales en RES***

## 6.10.1. Teorema de superposición

- *Dado un circuito lineal, la respuesta de dicho circuito cuando actúan en él de manera simultánea varias fuentes de excitación, es igual a la suma de las respuestas del circuito si actúa cada fuente de excitación de manera independiente.*
  - Este teorema es de uso imprescindible para analizar, por el método simbólico, circuitos en los que haya fuentes de distintas formas de onda, o bien en el caso de que, aun siendo todas las fuentes sinusoidales, no tengan todas la misma pulsación.

## 6.10.2. Teorema de Thévenin

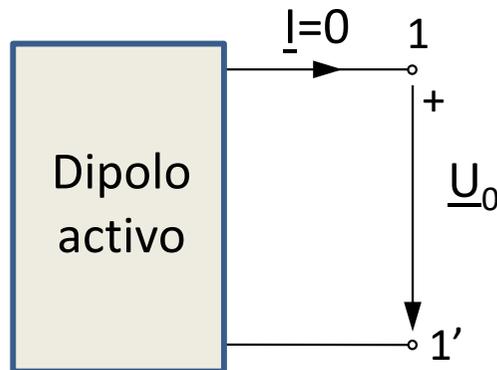
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de tensión**, formada por, una fuente ideal de tensión de valor la tensión que aparece entre los terminales del dipolo activo si éstos se encuentran a circuito abierto, y en serie una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



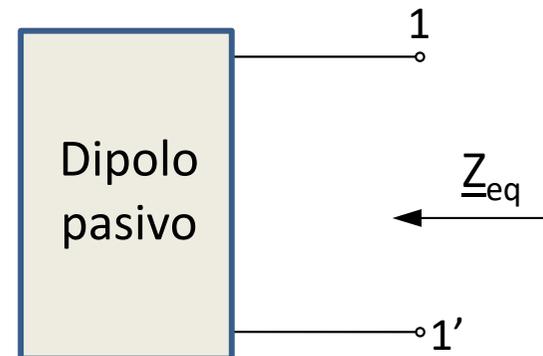
## 6.10.2. Teorema de Thevenin

- *Determinación de los valores de la fuente:*

Dipolo activo a circuito abierto



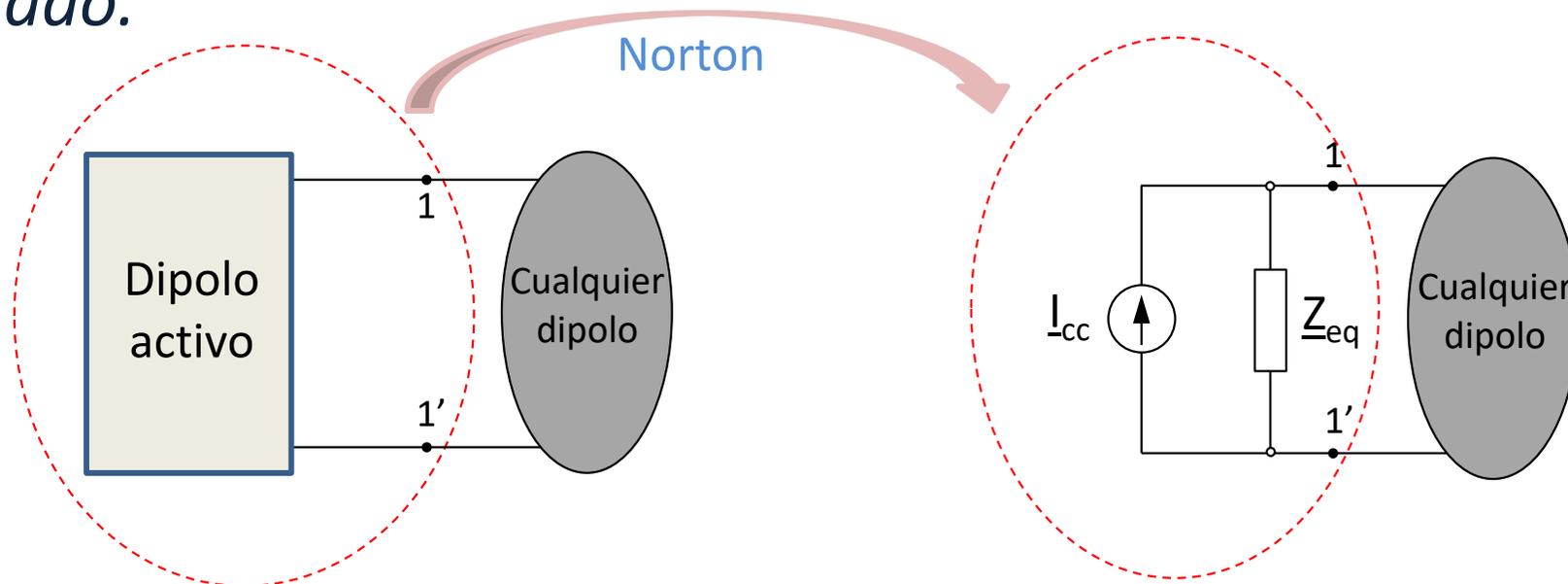
Dipolo pasivo



- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado, se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*

## 6.10.3. Teorema de Norton

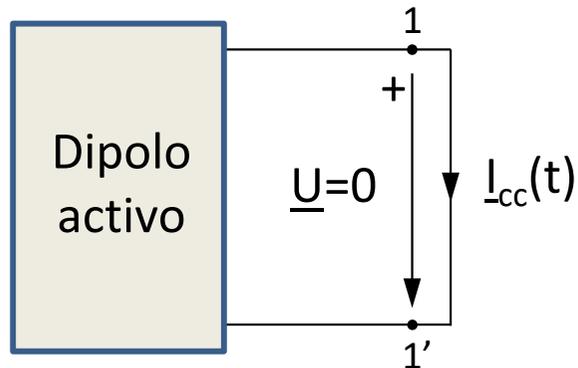
- Ante cualquier otro dipolo conectado a él, un dipolo activo es **equivalente a una fuente real de intensidad**, formada por, una fuente ideal de intensidad de valor la intensidad que circula entre los terminales del dipolo activo si éstos se cortocircuitan, y en paralelo una impedancia de valor la impedancia vista desde los terminales del dipolo pasivo correspondiente al activo dado.



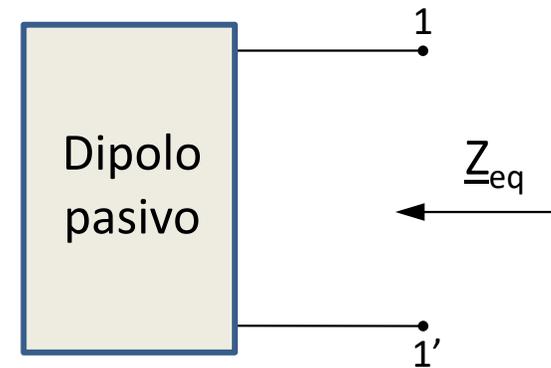
## 6.10.3. Teorema de Norton

- *Determinación de los valores de la fuente real:*

Dipolo activo en cortocircuito



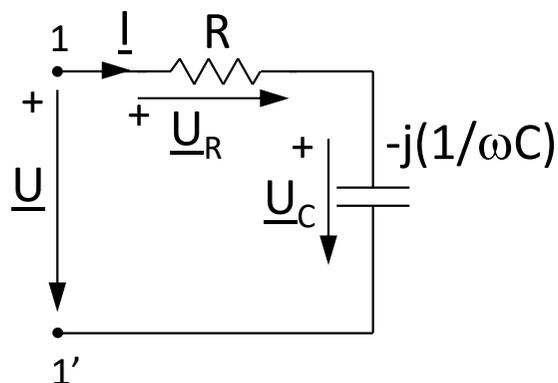
Dipolo pasivo



- *El circuito pasivo correspondiente al activo dado se construye haciendo cero todas las fuentes independientes del circuito. Las fuentes dependientes se dejan tal cual están en el circuito, es decir, no se tocan.*

## ***6.11. Estudio de circuitos básicos en RES***

## 6.11.1. Circuito RC



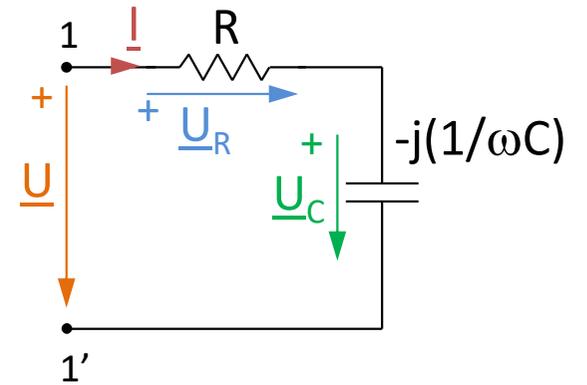
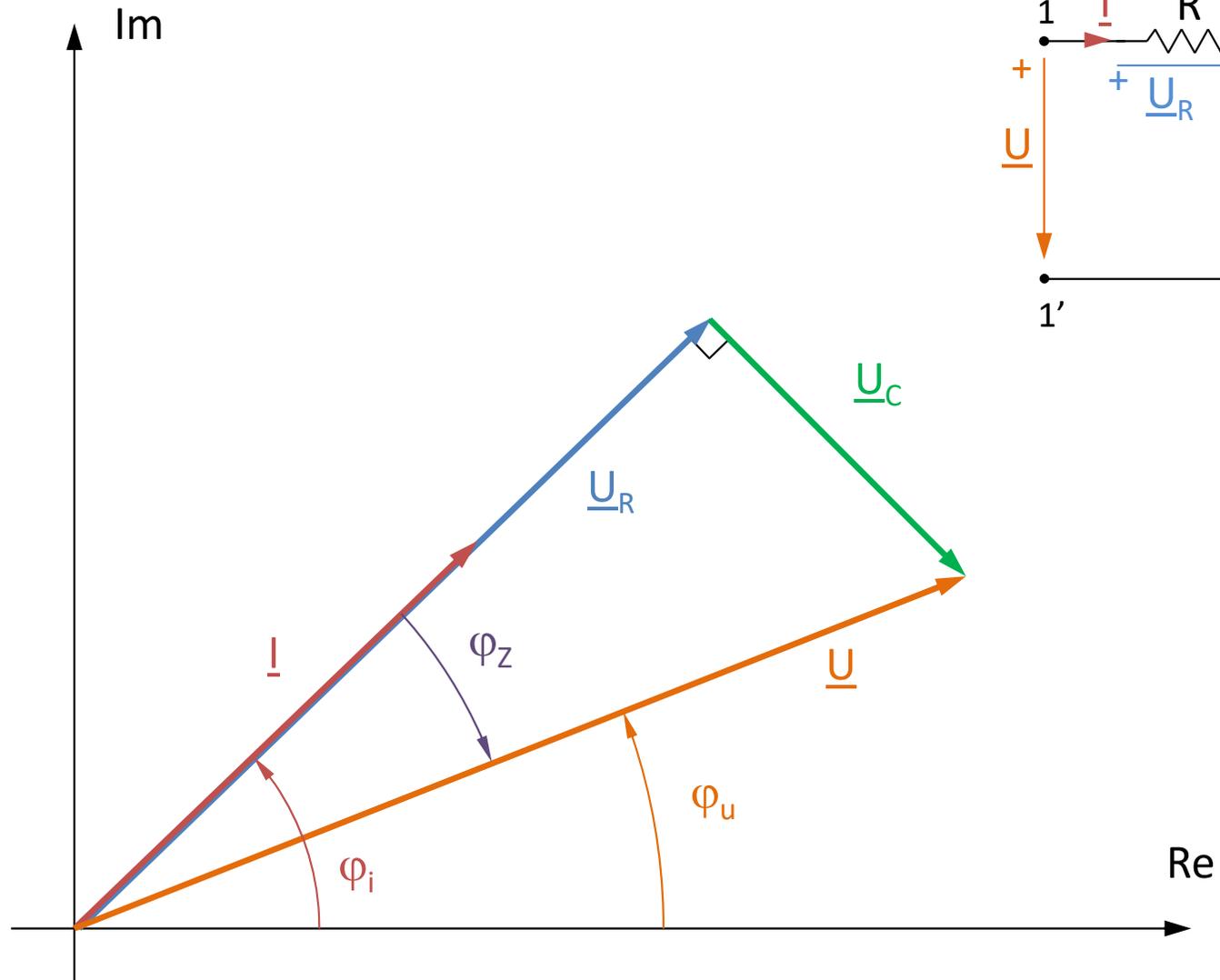
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R\underline{I} + \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}$$

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi_Z = \arctg \frac{1}{\omega C R} < 0 \end{cases}$$

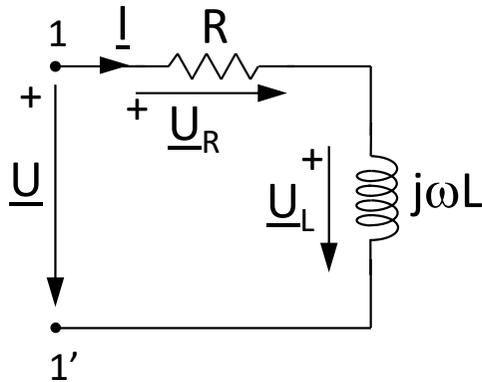
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_Z \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i \end{cases}$$

- La tensión **retrasa** a la intensidad un ángulo igual al argumento de la impedancia  $\varphi_Z$ .

# 6.11.1. Circuito RC



## 6.11.2. Circuito RL



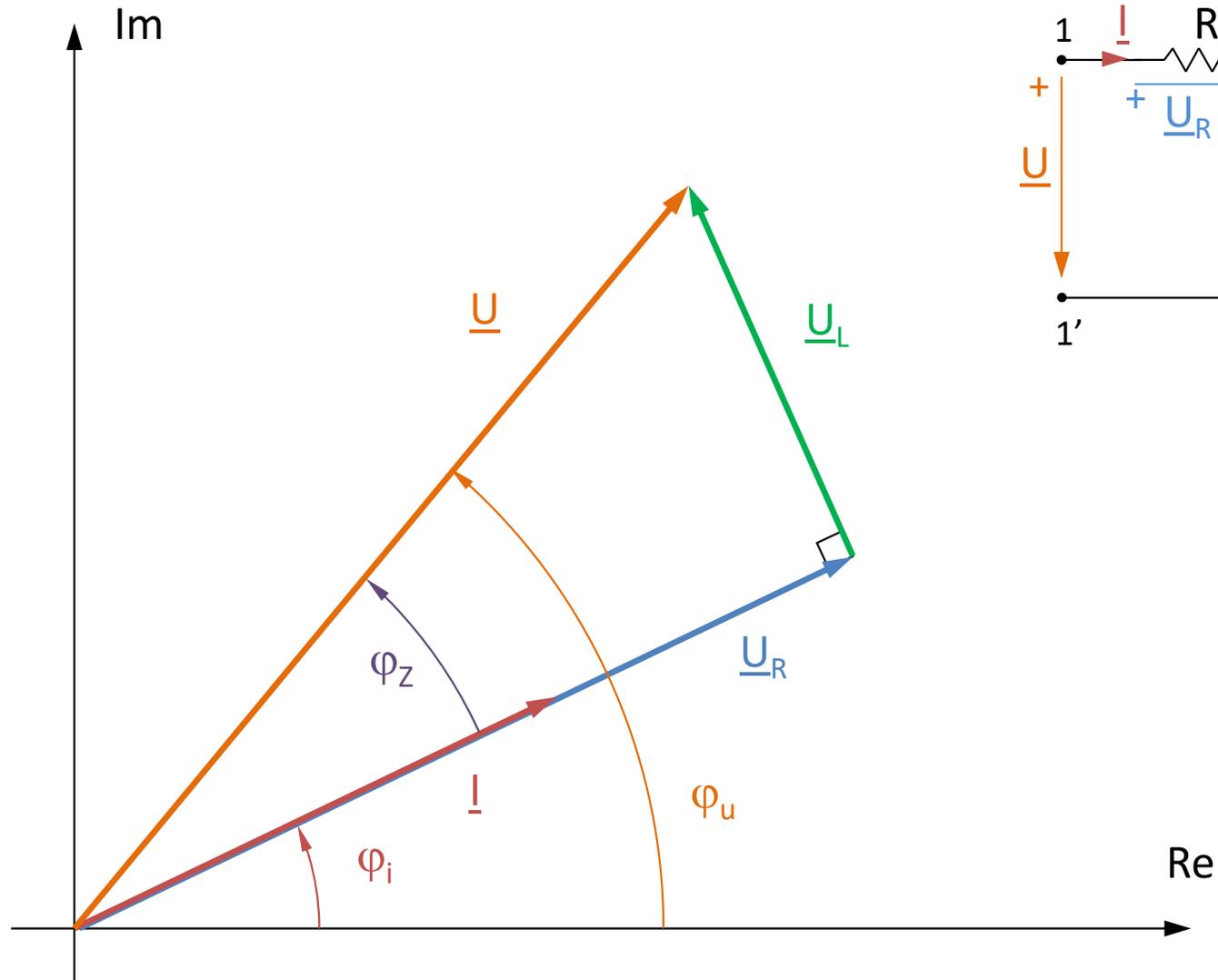
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} = (R + j\omega L)\underline{I}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi_Z = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0 \end{cases}$$

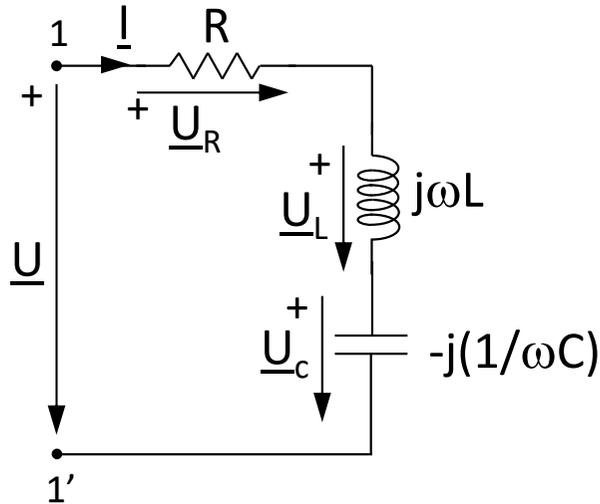
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_Z \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i \end{cases}$$

- La tensión adelanta a la intensidad un ángulo igual al argumento de la impedancia  $\varphi_Z$ .

## 6.11.2. Circuito RL



## 6.11.3. Circuito RLC



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} - j\frac{1}{\omega C}\underline{I} =$$

$$= \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi_Z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \omega L > \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_Z > 0 \\ \text{si } \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_Z = 0 \\ \text{si } \omega L < \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_Z < 0 \end{array} \right.$$

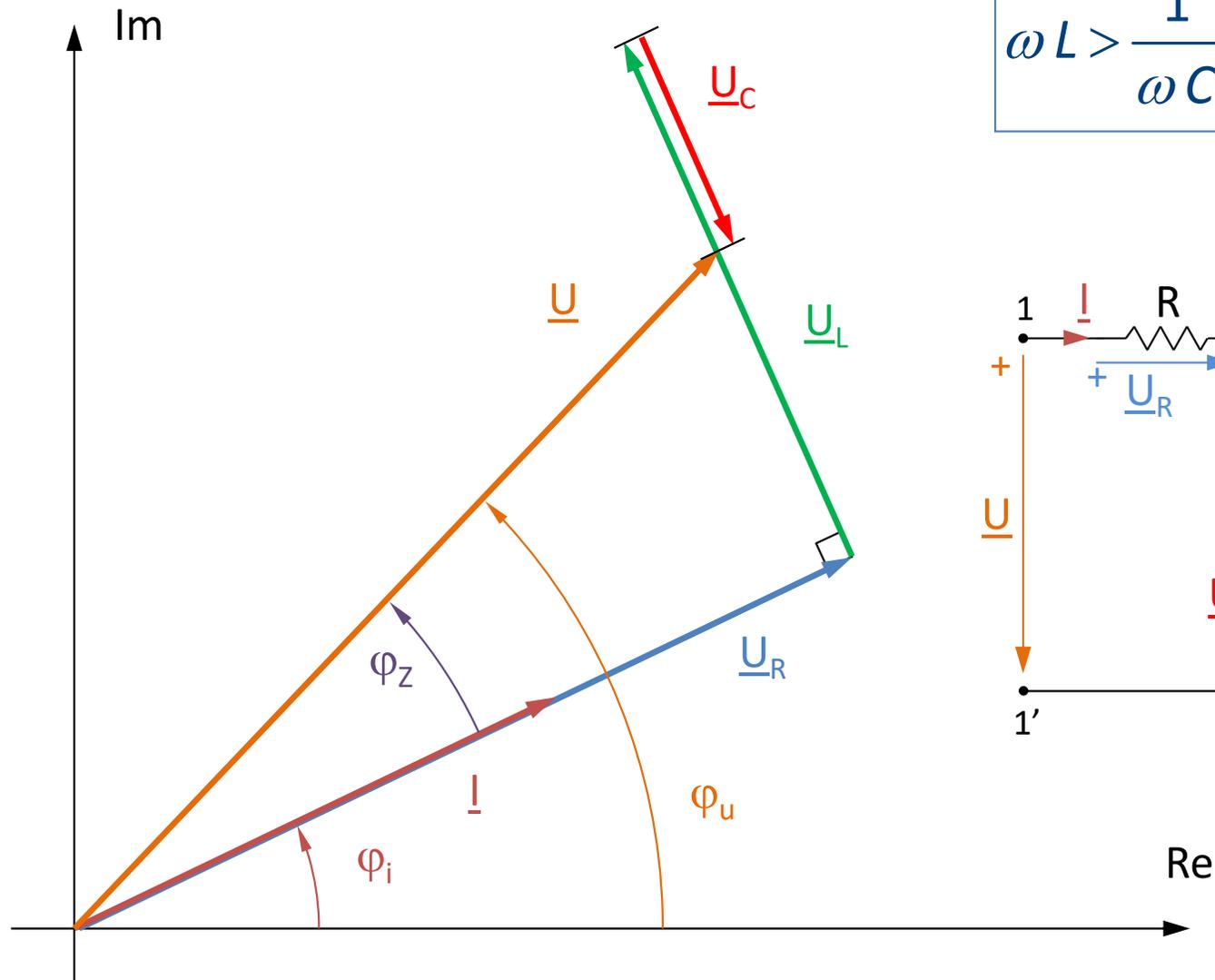
## 6.11.3. Circuito RLC

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_i + \varphi_z \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varphi_z > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i \\ \text{si } \varphi_z = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i \\ \text{si } \varphi_z < 0 \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i \end{cases} \end{cases}$$

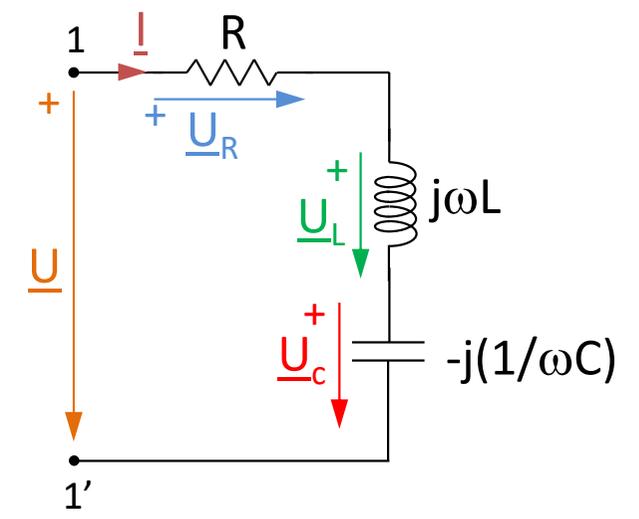
- *En función del valor del condensador, de la bobina y de la pulsación  $\omega$ , el ángulo de la impedancia equivalente puede ser mayor, menor o igual cero, y, por lo tanto, la tensión puede adelantar, retrasar o estar en fase, respectivamente, respecto de la intensidad que recorre el circuito.*

– Caso particular: si  $\omega L = (1/\omega C)$   $\longrightarrow$  **RESONANCIA**

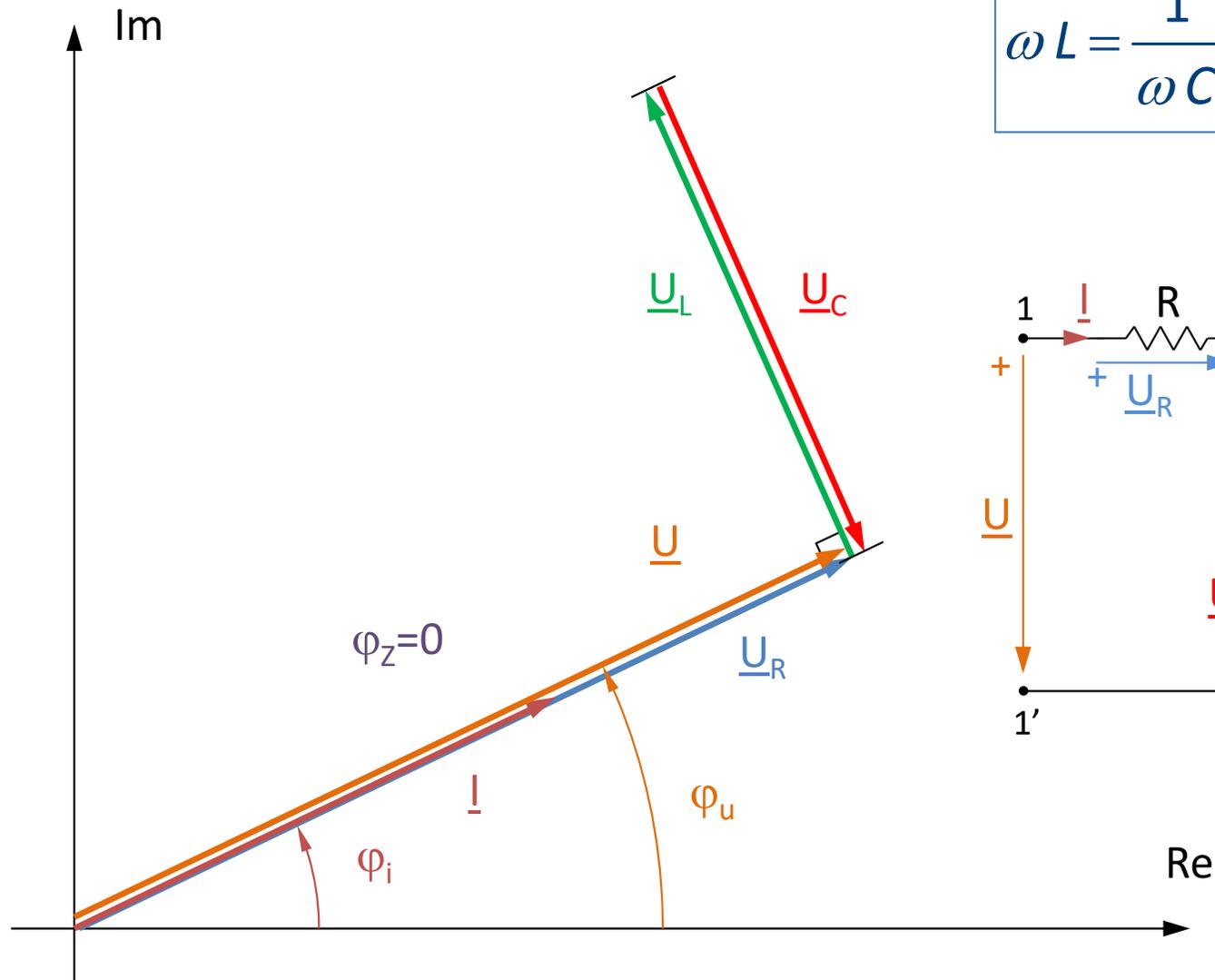
## 6.11.3. Circuito RLC



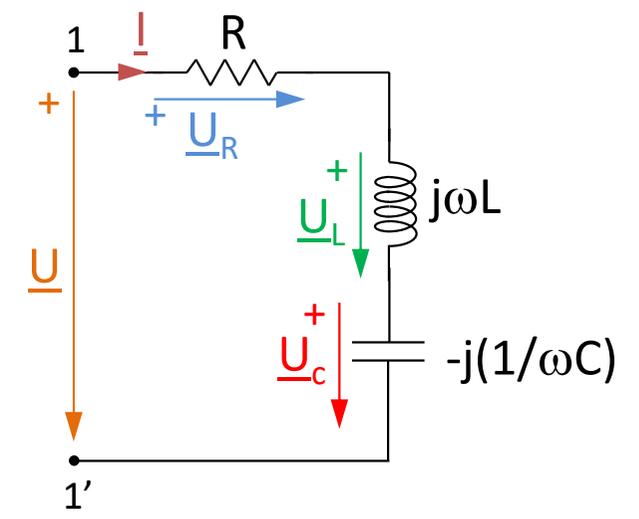
$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_Z > 0$$



## 6.11.3. Circuito RLC

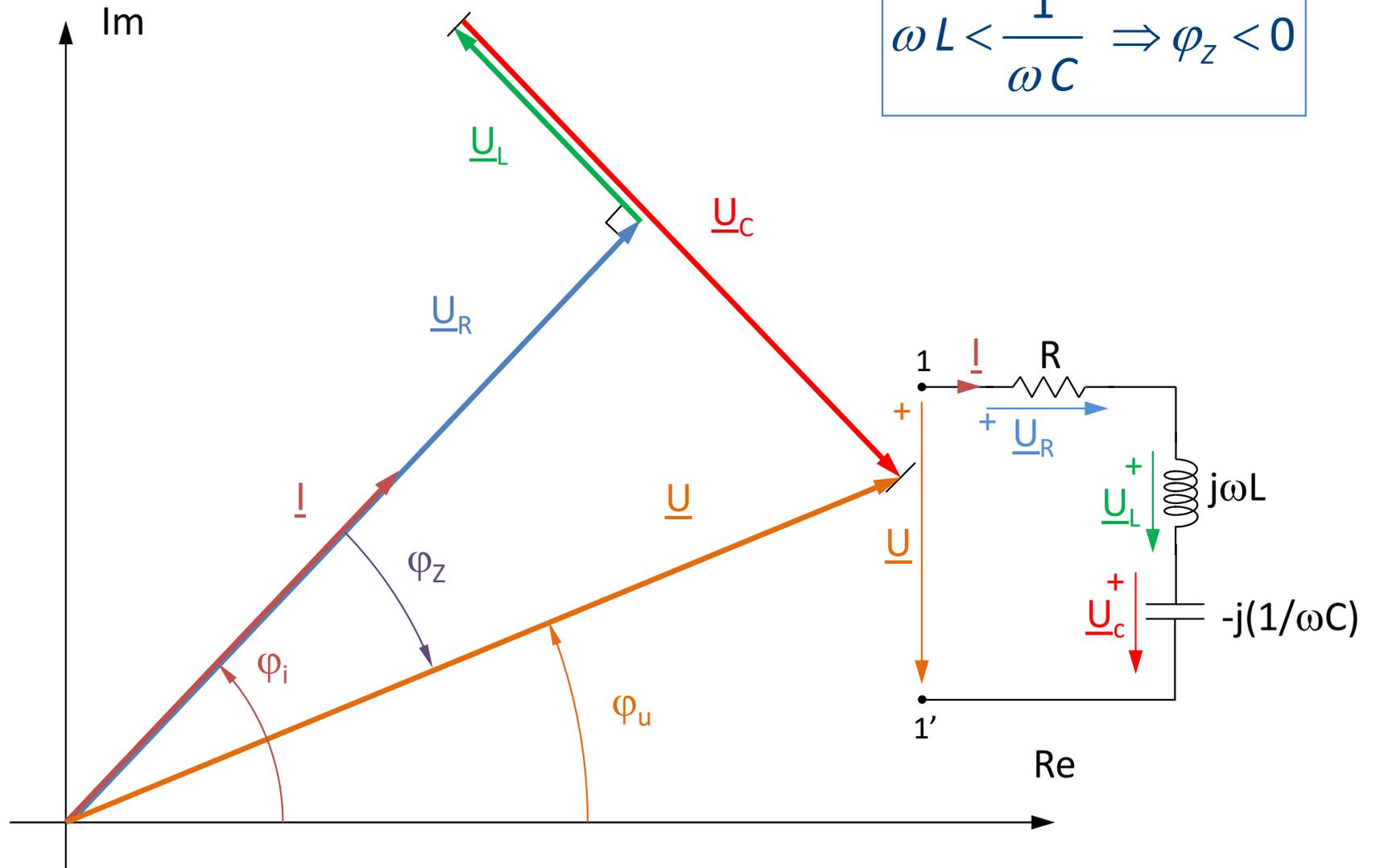


$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z = 0$$



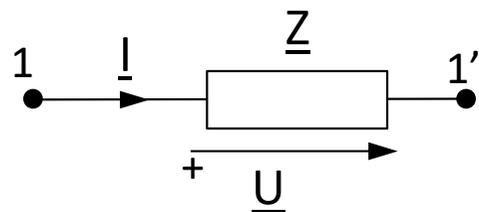
# 6.11.3. Circuito RLC

$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \varphi_z < 0$$



## 6.11.4. Resumen

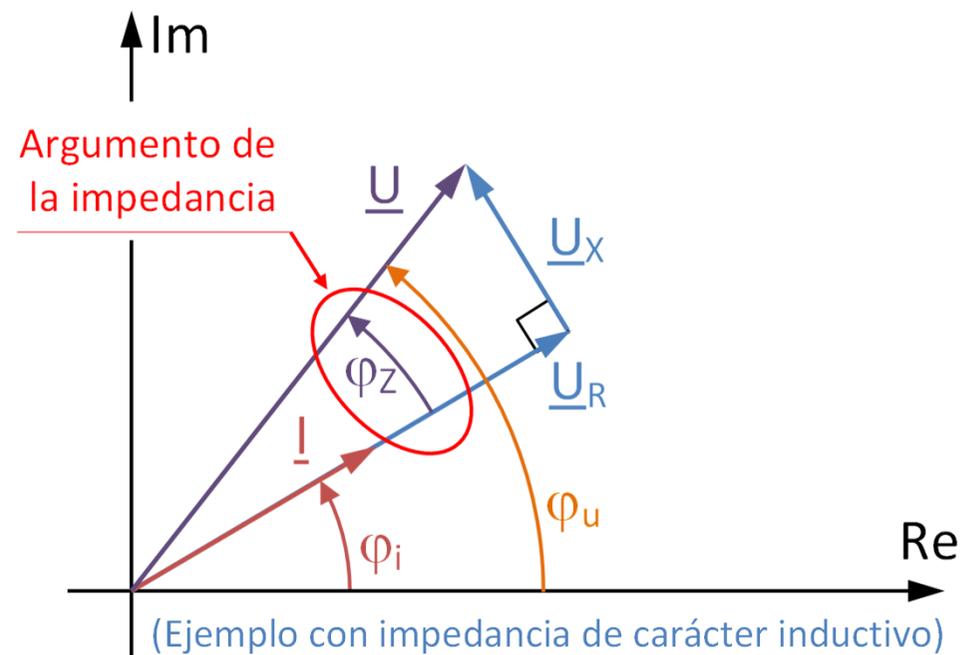
- El desfase entre la tensión en bornes y la intensidad que circula por un dipolo pasivo (que puede representarse mediante su impedancia equivalente) es siempre igual al argumento de dicha impedancia equivalente.



$$\underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z$$

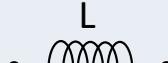
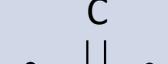
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_u = \varphi_Z + \varphi_i \Rightarrow \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z \end{cases}$$



## 6.11.4. Resumen

- *En RES, se pueden clasificar los elementos pasivos (también llamados impedancias o cargas) en los tipos que se muestran en la tabla siguiente:*

## 6.11.4. Resumen

Tipo de Impedancia (Tipo de carga)	Constitución	Valor de $\underline{Z}$	$\underline{U}$ respecto de $\underline{I}$
Puramente Resistiva	 Resistencia	$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R \angle 0^\circ$	$\underline{U}$ está en fase con $\underline{I}$
Puramente Inductiva	 Bobina	$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L \angle 90^\circ$	$\underline{U}$ adelanta $90^\circ$ a $\underline{I}$
Puramente Capacitiva	 Condensador	$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C) \angle -90^\circ$	$\underline{U}$ retrasa $90^\circ$ respecto de $\underline{I}$
De carácter Inductivo	 Resistencia+Bobina	$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L > 0)$ $\underline{Z} = R + j\omega L$	$\underline{U}$ adelanta a $\underline{I}$ un ángulo $\varphi_Z$
De carácter Capacitivo	 Resistencia+Cond.	$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C < 0)$ $\underline{Z} = R - j(1/\omega C)$	$\underline{U}$ retrasa respecto de $\underline{I}$ un ángulo $\varphi_Z$

## 6.11.4. Resumen

- *En general, el valor de la impedancia de los elementos pasivos, tanto su módulo como su argumento, depende de la frecuencia.*
- *Si nos fijamos en una impedancia de carácter inductivo, tenemos que:*

$$\underline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi_Z = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0 \end{cases}$$

- *Si aumenta la frecuencia de la fuente de excitación, es decir, aumenta su pulsación,  $\omega$ , tanto el módulo de la impedancia  $Z$ , como su argumento  $\varphi_Z$ , aumentan su valor.*

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección Textos Docentes, vol. 58. Pressas Universitarias de Zaragoza.
- BAYOD, A.A.: **“Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal”**. Colección Textos Docentes, vol. 107. Pressas Universitarias de Zaragoza.

# ***Tema 7***

## *Potencia en régimen estacionario sinusoidal*



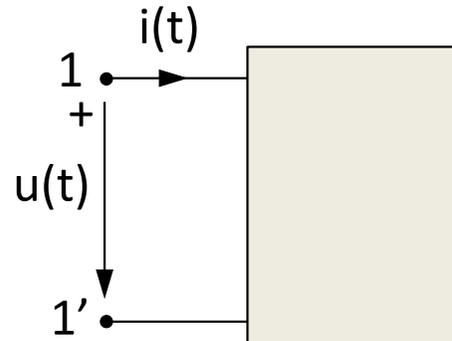
## **Tema 7.- Potencia en régimen estacionario sinusoidal.**

- 7.1.- Potencia instantánea.
- 7.2.- Potencia instantánea en dipolos pasivos básicos.
  - 7.2.1.- Resistencia.
  - 7.2.2.- Bobina.
  - 7.2.3.- Condensador.
- 7.3.- Expresión de la potencia en el campo complejo. Triángulo de potencias.
  - 7.3.1.- Expresión de la potencia en el campo complejo.
  - 7.3.2.- Triángulo de potencias.
- 7.4.- Potencia compleja en dipolos pasivos.
  - 7.4.1.- Dipolo pasivo básico.
  - 7.4.2.- Resistencia.
  - 7.4.3.- Bobina.
  - 7.4.4.- Condensador.
- 7.5.- Factor de potencia.
  - 7.5.1.- Definición del factor de potencia.
  - 7.5.2.- Efectos de un factor de potencia bajo.
  - 7.5.3.- Compensación del factor de potencia.
- 7.6.- Teoremas relacionados con la potencia en RES.
  - 7.6.1.- Teorema de Boucherot.
  - 7.6.2.- Teorema de la máxima transferencia de potencia.
- 7.7.- Medida de la potencia.

## ***7.1. Potencia instantánea***

## 7.1. Potencia instantánea

- Dado un dipolo, con las referencias de la figura:



- Se define la **potencia instantánea** absorbida por el dipolo como:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- Teniendo en cuenta que en un circuito en régimen estacionario sinusoidal:

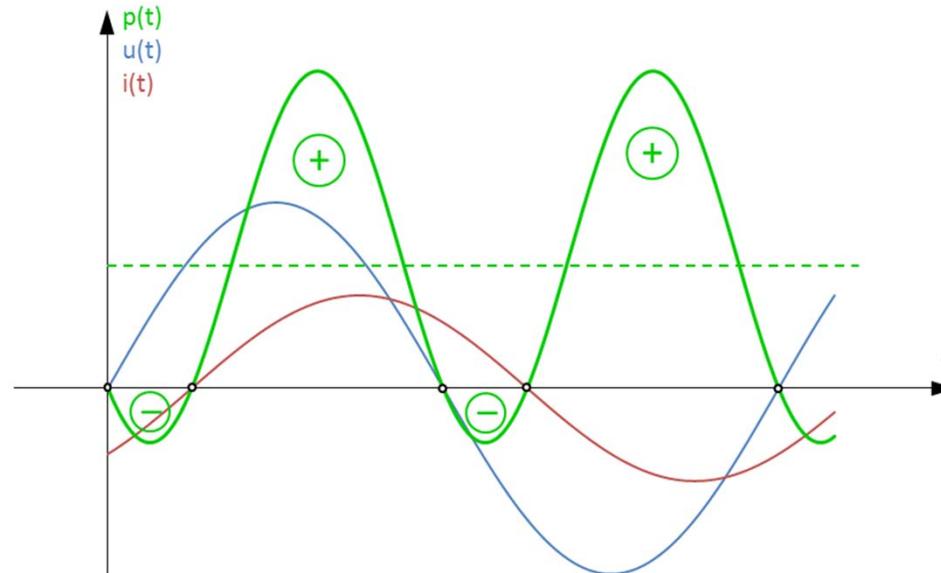
$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$U$  e  $I$  son valores  
eficaces

## 7.1. Potencia instantánea

- Representando gráficamente estas formas de onda se tiene:



- La potencia instantánea es una función sinusoidal de frecuencia doble a la de la onda de tensión o intensidad
- La potencia es cero en los instantes en que  $i(t)=0$  ó  $u(t)=0$
- En los instantes en los que  $p(t) > 0$ , el dipolo absorbe energía de la fuente de excitación; mientras que en los instantes en los que  $p(t) < 0$ , es el dipolo el que devuelve parte de esta energía a la fuente de excitación

## 7.1. Potencia instantánea

- *Analíticamente:*

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- *Expresión que puede escribirse como:*

$$p(t) = u(t)i(t) = UI [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

- *O también:*

$$p(t) = UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi) + UI \cos \varphi \quad \text{siendo } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

- Notar que:

- Los términos  $U$ ,  $I$  y  $\cos \varphi$  son constantes, no dependen del tiempo y, por lo tanto, el término  $UI \cos \varphi$  también es una cantidad constante
- La potencia instantánea se puede expresar como suma de dos términos, uno constante y otro dependiente del tiempo, sinusoidal, y de frecuencia doble de la de la tensión o la intensidad

## 7.1. Potencia instantánea

- Integrando la potencia instantánea a lo largo del tiempo:

$$w(t) - w(0) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t UI \cos \varphi dt + \int_0^t UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi) dt$$

- Integrando a lo largo de un número entero de periodos de la potencia, se ve que:

$$\int_0^{nT} p(t) dt = \int_0^{nT} UI \cos \varphi dt + \int_0^{nT} UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi) dt = nT (UI \cos \varphi + 0)$$

- El valor medio de la potencia instantánea coincide con el término constante.
- Este término se denomina **potencia media** o **potencia activa**, y su producto por el tiempo es el valor de la energía total suministrada por la fuente de excitación al circuito durante el tiempo considerado.

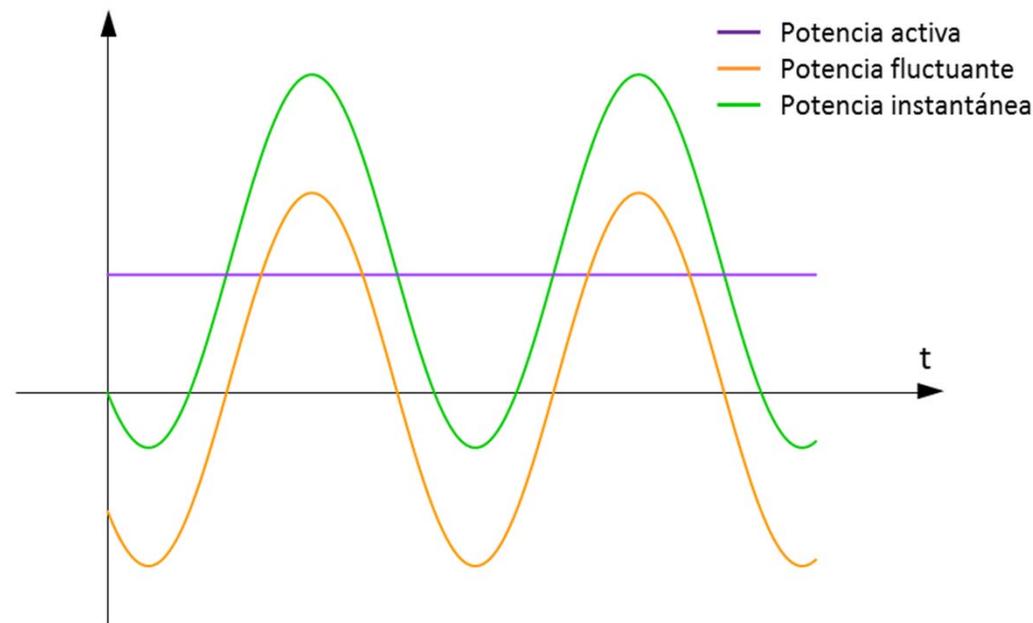
$$P = \frac{\text{Energía transferida}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{nT (UI \cos \varphi)}{nT} = UI \cos \varphi$$

## 7.1. Potencia instantánea

- Al término sinusoidal se le denomina **potencia fluctuante**, y muestra las fluctuaciones de la potencia instantánea en torno al valor medio.

$$F(t) = UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)$$

- Su integral, a lo largo de un número entero de periodos, es cero



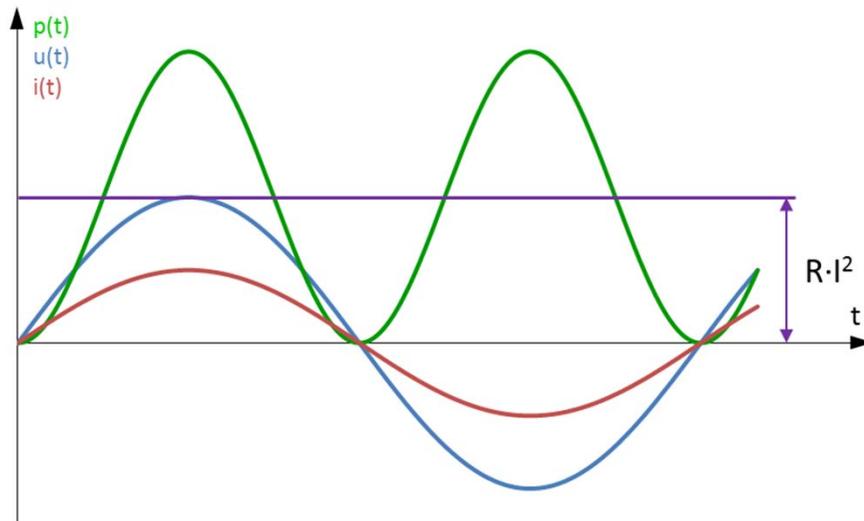
## ***7.2. Potencia instantánea en dipolos pasivos básicos***

## 7.2.1. Resistencia

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \sqrt{2} R I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p_{abs}(t) = R I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i) + R I^2$$



### Potencia media

$$P = R I^2$$

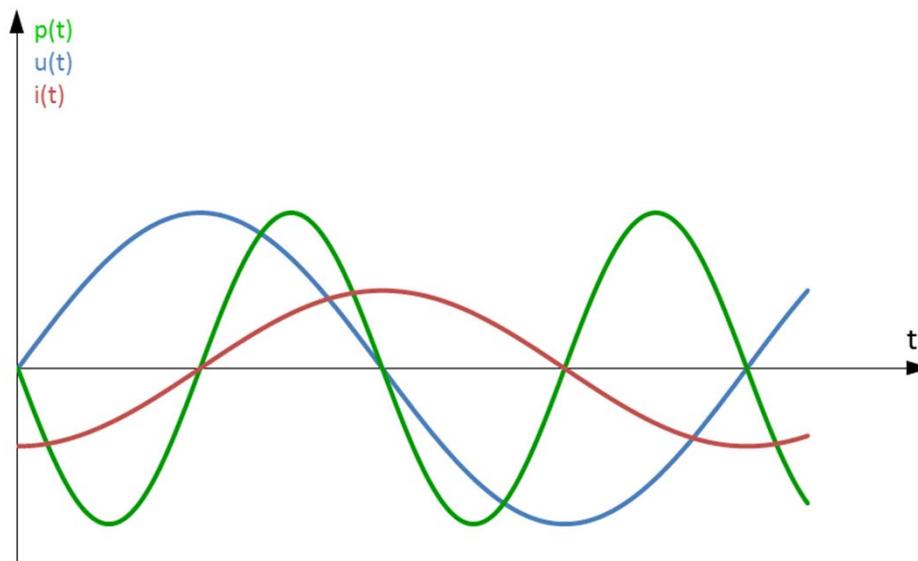
- En cualquier instante  $p_{abs}(t)$  siempre es mayor o igual a cero, esto es, una resistencia siempre absorbe energía del circuito.
- Una resistencia no almacena energía

## 7.2.2. Bobina

$$u(t) = LD \cdot i(t) \quad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \sqrt{2} I L \omega \cos(\omega t + \varphi_i + \pi / 2)$$

$$p_{abs}(t) = \omega L I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \pi / 2) + 0$$



Potencia media

$$P = 0$$

- Se efectúa constantemente una transferencia energética entre la fuente de excitación y el campo magnético asociado a la bobina.

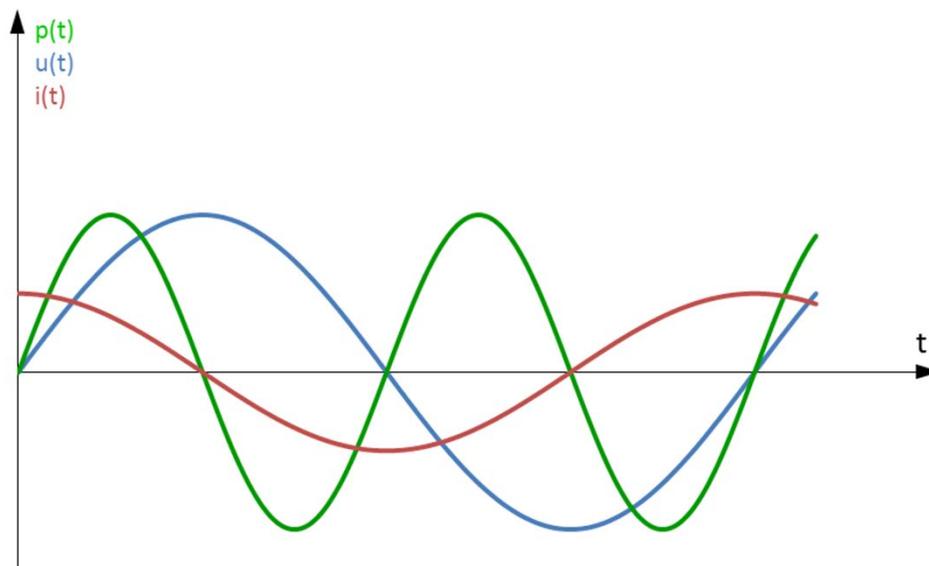
## 7.2.3. Condensador

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \sqrt{2} I (1 / \omega C) \cos(\omega t + \varphi_i - \pi / 2)$$

$$p_{abs}(t) = (1 / \omega C) I^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i - \pi / 2) + 0$$



Potencia media

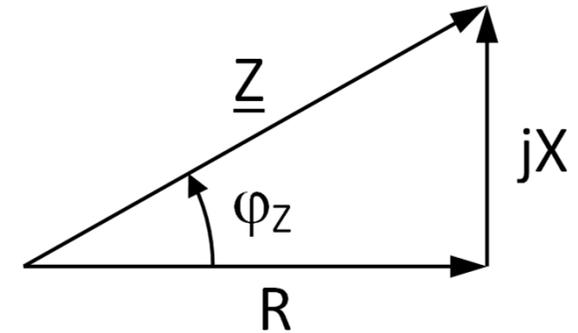
$$P = 0$$

- Se efectúa constantemente una transferencia energética entre la fuente de excitación y el campo eléctrico asociado al condensador

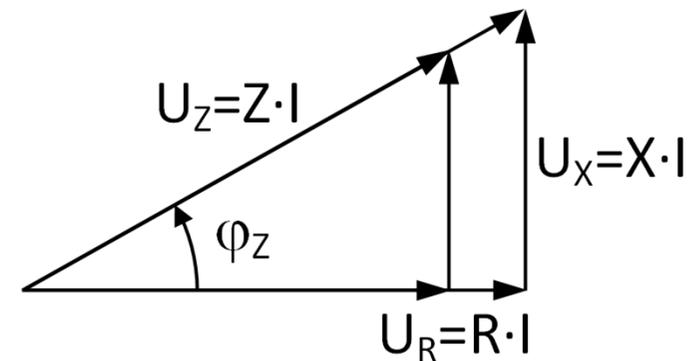
## ***7.3. Expresión de la potencia en el campo complejo. Triángulo de potencias.***

## 7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Un dipolo pasivo se puede representar mediante su impedancia compleja equivalente, de parte real  $R$  y parte imaginaria  $X$ .*
- *Multiplicando todos los lados del triángulo por la intensidad que entra en el dipolo*



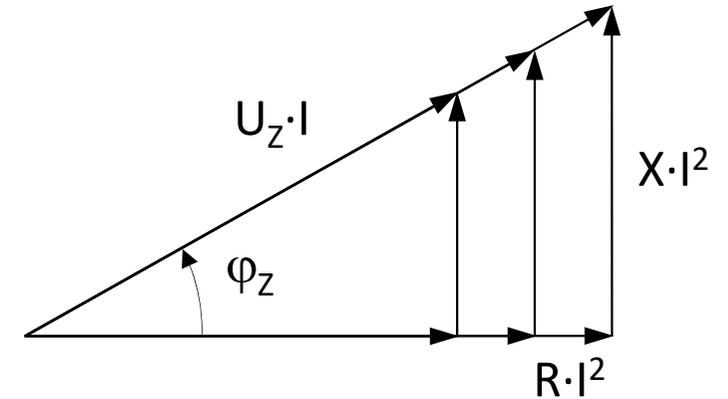
Triángulo de impedancias



Triángulo de tensiones

## 7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- *Multiplicando nuevamente los lados del triángulo de tensiones por la intensidad que entra en el dipolo*
  - *Cateto horizontal: Potencia media absorbida por la parte resistiva. **Potencia Activa.***
  - *Cateto vertical: Es el valor de la amplitud de las oscilaciones de la potencia absorbida en la componente reactiva del dipolo. **Potencia Reactiva.***



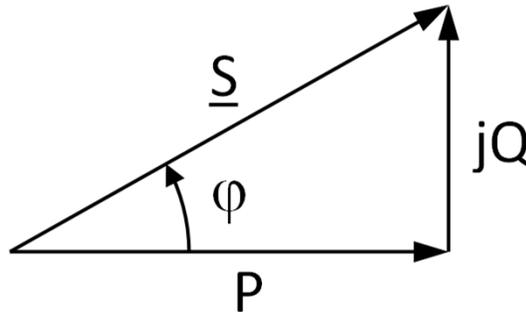
Triángulo de  
potencias

*Potencia activa:*  $P = RI^2 = UI \cos \varphi$

*Potencia reactiva:*  $Q = XI^2 = UI \sin \varphi$

## 7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- Dado el triángulo de potencias



- La hipotenusa de dicho triángulo, de longitud  $U \cdot I$ , tiene dimensiones de potencia y se denomina **Potencia Compleja ( $\underline{S}$ )**.

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

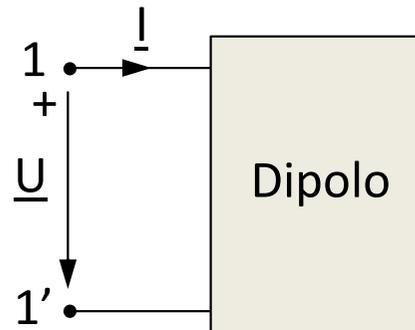
- El módulo de dicho vector,  $S$ , recibe el nombre de **Potencia Aparente**.

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

## 7.3.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- **Expresión general de la potencia compleja**

- Sean un dipolo y las referencias mostradas en la figura:



- La potencia compleja absorbida por el dipolo se calcula:

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

donde  $\underline{I}^*$  denota al conjugado de la intensidad compleja  $\underline{I}$

- Unidades:  $\left\{ \begin{array}{l} P: \text{potencia activa} : W \text{ (Vatios)} \\ Q: \text{potencia reactiva} : var \text{ (Voltamperios reactivos)} \\ S: \text{potencia aparente} : VA \text{ (Voltamperios)} \end{array} \right.$

## 7.3.1. *Expresión de la potencia en el campo complejo*

- *La potencia activa es la potencia consumida por un elemento y que se invierte en realizar un trabajo.*
- *Tanto la potencia aparente como la potencia reactiva **no tienen** significado físico. Se definen porque son útiles para los cálculos electrotécnicos y porque se pueden medir.*
  - *La potencia reactiva es un indicador de la energía intercambiada en cada semiciclo entre los elementos que almacenan energía y la fuente de excitación.*
  - *La potencia aparente es un indicador de la disponibilidad o limitación de una instalación.*

## 7.3.2. Triángulo de potencias

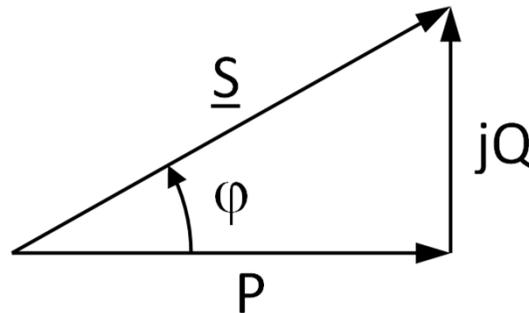
- A partir del triángulo de potencias, se puede escribir:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

$$Q = P \cdot \operatorname{tg} \varphi$$



$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \operatorname{sen} \varphi$$

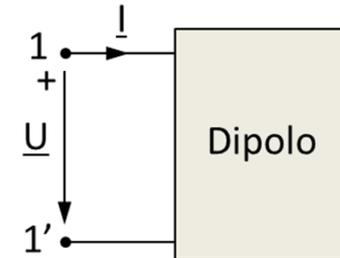
Dado que:  $S = U \cdot I$

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \operatorname{sen} \varphi$$

## 7.3.2. Triángulo de potencias

- El signo de las potencias activa y reactiva absorbidas por un dipolo, depende del ángulo entre la tensión en bornes del dipolo y la intensidad que lo atraviesa. De esta manera y para las referencias indicadas, se tiene:

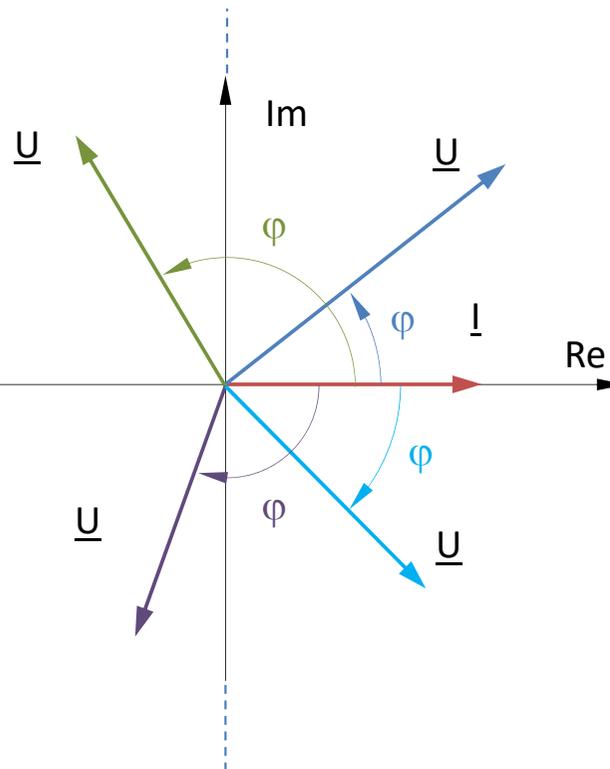


$\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$   
 Pabs < 0 Generador  
 Qabs > 0 Absorbe Q

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$   
 Pabs > 0 Receptor  
 Qabs > 0 Inductivo

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$   
 Pabs < 0 Generador  
 Qabs < 0 Cede Q

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$   
 Pabs > 0 Receptor  
 Qabs < 0 Capacitivo



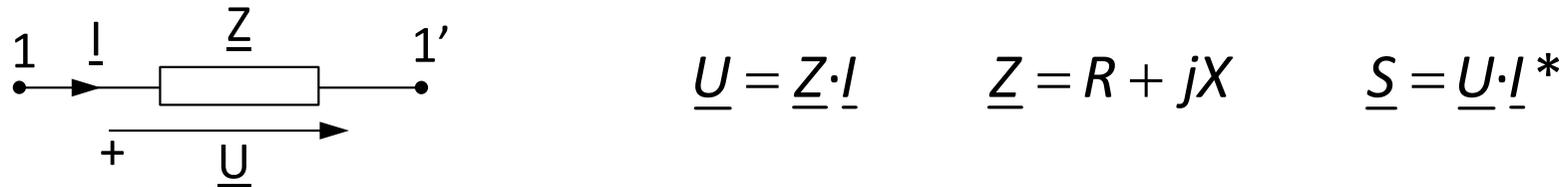
## 7.3.2. Triángulo de potencias

- *La especificación de la potencia en máquinas y equipos de corriente alterna es diversa y tiene origen práctico:*
  - En máquinas generadoras de corriente alterna y transformadores, se expresa su potencia en forma de potencia aparente (en VA, kVA, MVA). El conocimiento de esta potencia y de la tensión nominal, permite calcular la corriente máxima de diseño de la máquina
  - En motores de corriente alterna se especifica la tensión de alimentación y la potencia mecánica en el eje (en kW o en CV,  $1\text{CV} = 736\text{ W}$ ), de forma que, conociendo el rendimiento, permite saber la potencia activa que absorbe
  - En el caso de las reactancias, la potencia se expresa en forma de potencia reactiva (en var o kvar)

## ***7.4. Potencia compleja en dipolos pasivos***

## 7.4.1. Dipolo pasivo genérico

En términos de su impedancia equivalente:



$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + jX)I^2 = RI^2 + jXI^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

entonces:

$$\left[ \begin{array}{l} P_{abs} = RI^2 \\ Q_{abs} = XI^2 \end{array} \right.$$

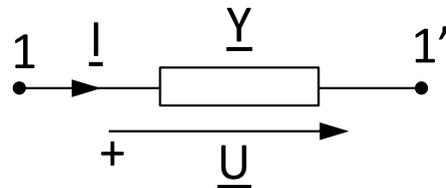
- En un dipolo pasivo, **siempre**  $R \geq 0$ , por lo que:  $P_{abs} \geq 0$
- Sin embargo, puede ocurrir que:

$$X > 0 \rightarrow \text{Carácter inductivo} \Rightarrow Q_{abs} > 0$$

$$X < 0 \rightarrow \text{Carácter capacitivo} \Rightarrow Q_{abs} < 0$$

## 7.4.1. Dipolo pasivo genérico

En términos de su admitancia equivalente:



$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{Y} = G + jB$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{Y} \cdot \underline{U})^* = \underline{Y}^* \underline{U} \cdot \underline{U}^* = (G - jB) U^2 = G U^2 - j B U^2 = P_{abs} + j Q_{abs}$$

entonces:

$$\begin{cases} P_{abs} = G U^2 \\ Q_{abs} = -B U^2 \end{cases}$$

- En un dipolo pasivo, **siempre**  $G \geq 0$ , por lo que:  $P_{abs} \geq 0$
- Sin embargo, puede ocurrir que:

$$B < 0 \rightarrow \text{Carácter inductivo} \Rightarrow Q_{abs} > 0$$

$$B > 0 \rightarrow \text{Carácter capacitivo} \Rightarrow Q_{abs} < 0$$

## 7.4.2. Resistencia

$$\underline{Z} = R + jX = R$$

$$\underline{Y} = G + jB = G$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = RI^2 + 0 = \frac{U^2}{R} + 0$$

$$P_{abs} = RI^2$$

$$Q_{abs} = 0$$

## 7.4.3. Bobina

$$\underline{Z} = R + jX = j\omega L$$

$$\underline{Y} = G + jB = -j\frac{1}{\omega L}$$

$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 0 + j\omega LI^2 = 0 + j\frac{U^2}{\omega L}$$

$$P_{abs} = 0$$

$$Q_{abs} = \omega LI^2 = \frac{U^2}{\omega L} \geq 0$$

## 7.4.4 . Condensador

$$\underline{Z} = R + jX = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Y} = G + jB = j\omega C$$

$$P_{abs} = 0$$

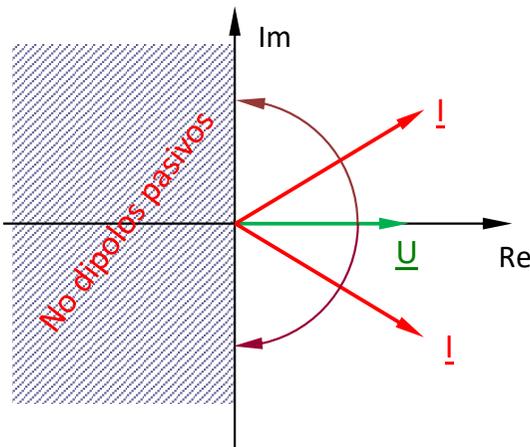
$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 0 - j \frac{I^2}{\omega C} = 0 - jU^2 \omega C$$

$$Q_{abs} = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega C U^2 \leq 0$$

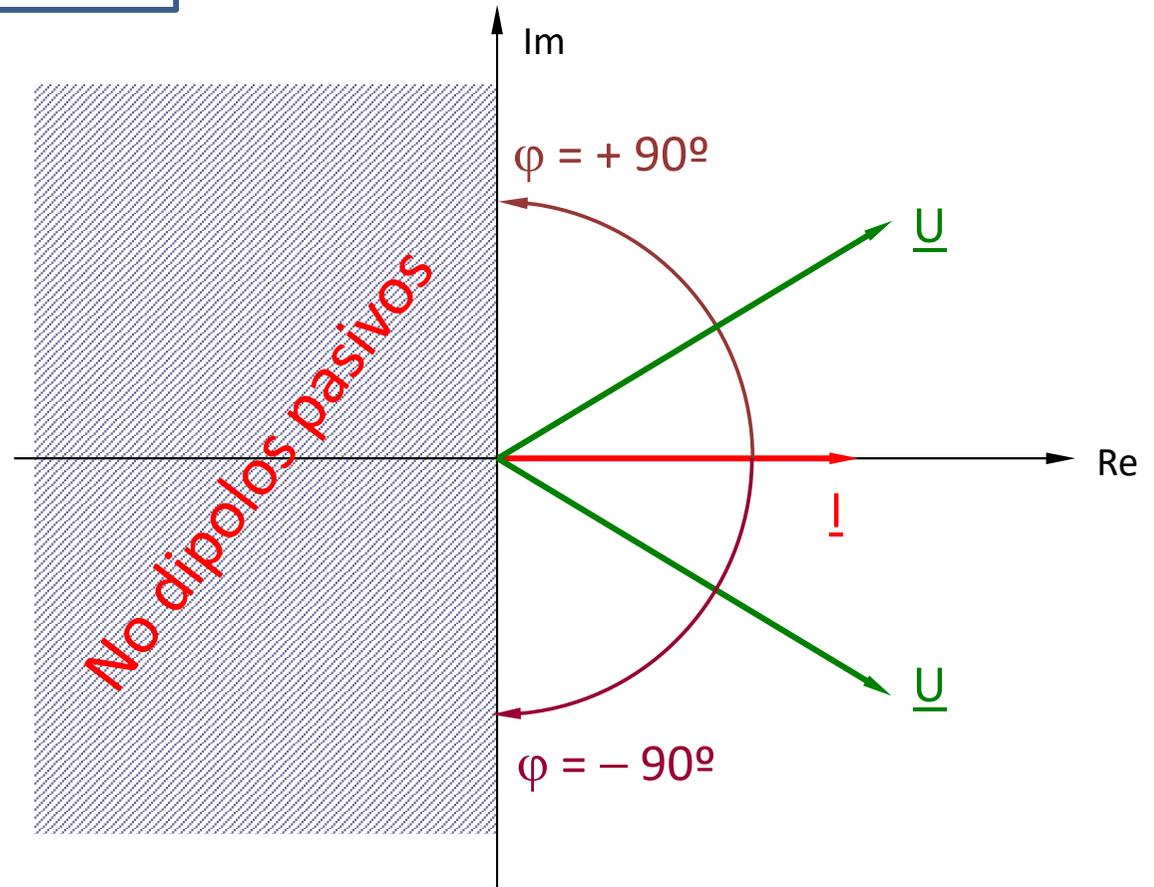
# Dipolo pasivo genérico:

Dipolos pasivos (cargas)  $\longrightarrow \underline{Z} = Z \angle \varphi_z$

Como: 
**SIEMPRE**  $-90^\circ \leq \varphi_z \leq +90^\circ$ 
  
 $\forall \varphi_u = \varphi_z + \varphi_i$

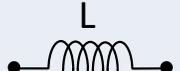
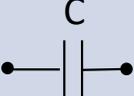
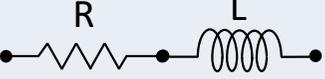
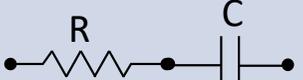


Tensión como origen de fases



Intensidad como origen de fases

# Resumen potencias en dipolos pasivos

Tipo de Impedancia (Tipo de carga)	Constitución	Valor de $\underline{Z}$	Potencia activa y reactiva
Puramente Resistiva	 Resistencia	$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R \angle 0^\circ$	$P_{abs} = R \cdot I^2 = U^2/R > 0$ $Q_{abs} = 0$
Puramente Inductiva	 Bobina	$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L \angle 90^\circ$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I^2 = U^2/\omega L > 0$
Puramente Capacitiva	 Condensador	$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C) \angle -90^\circ$	$P_{abs} = 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I^2 = U^2 / - (1/\omega C) < 0$
De carácter Inductivo	 Resistencia+Bobina	$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L > 0)$ $\underline{Z} = R + j\omega L$	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = \omega L \cdot I_L^2 = U_L^2/\omega L > 0$
De carácter Capacitivo	 Resistencia+Cond.	$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C < 0)$ $\underline{Z} = R - j(1/\omega C)$	$P_{abs} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{abs} = -(1/\omega C) \cdot I_C^2 = U_C^2 / - (1/\omega C) < 0$

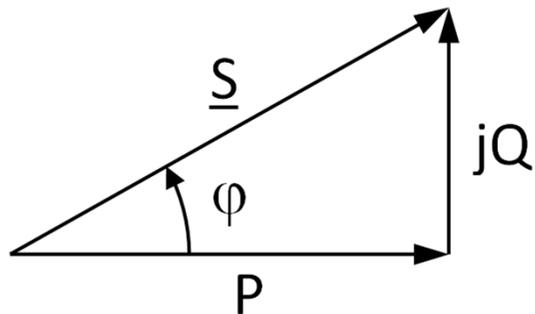
## ***7.5. Factor de potencia***

## 7.5.1 Definición del factor de potencia

- En general, en un dipolo, la potencia activa es menor que la potencia aparente
- Se define el **Factor de potencia** como la relación:

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

- En régimen estacionario sinusoidal:



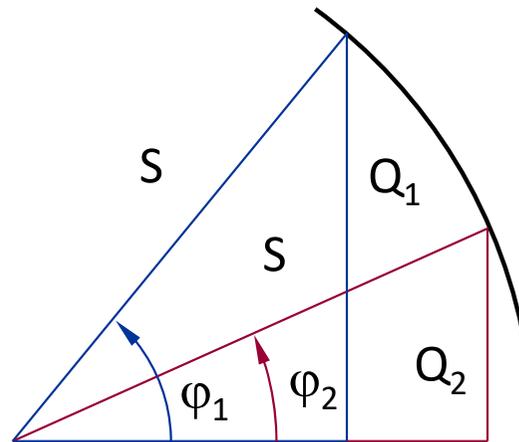
$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

## 7.5.1 Definición del factor de potencia

- El ángulo  $\varphi$  es el ángulo entre la tensión compleja en bornes de un dipolo y la intensidad compleja que lo atraviesa. Si el dipolo es pasivo, este ángulo es el argumento de su impedancia equivalente.
- La tensión de trabajo de un generador es una magnitud esencialmente constante, y viene dada por el diseño de su aislamiento y por el campo magnético admisible en su interior, mientras que su corriente máxima viene dada por la sección de sus conductores.

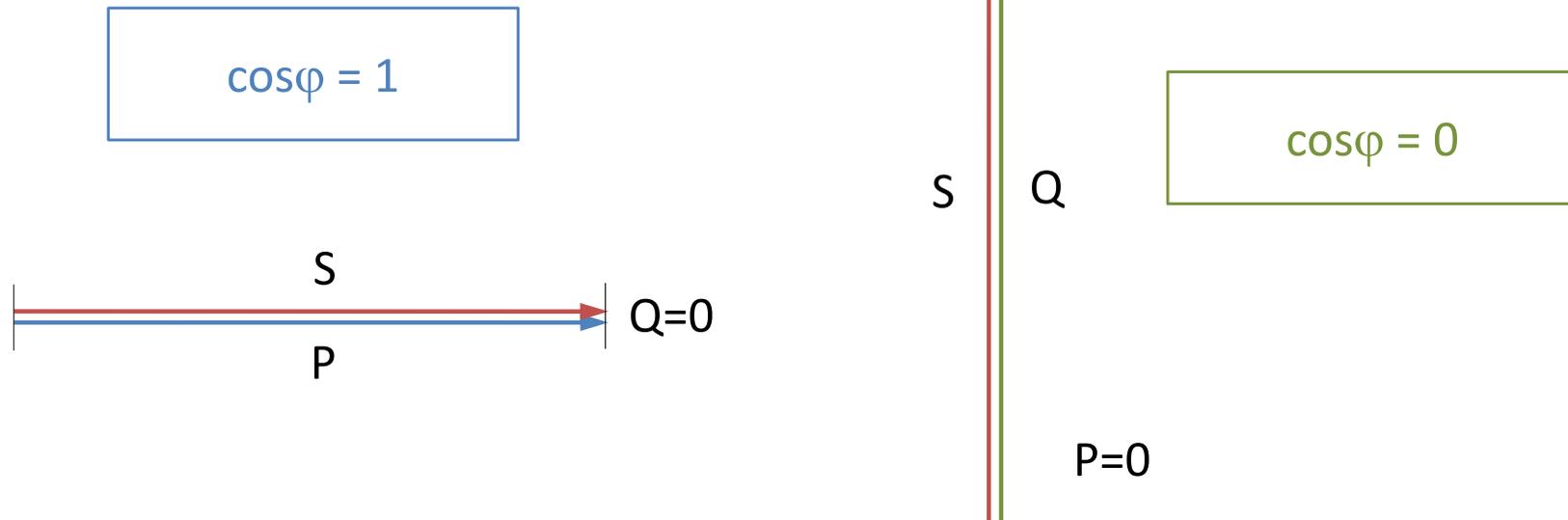
## 7.5.1 Definición del factor de potencia

- Así pues, la medida de la capacidad de un generador, que viene dada por su potencia aparente, es esencialmente constante.



- Dependiendo del factor  $P_c$  de potencia con el que trabaje una instalación, ésta estará mejor o peor aprovechada.

## 7.5.1 Definición del factor de potencia



- *Observando los dos casos límite: (aprovechamiento)*
  - En el caso de factor de potencia unidad, la potencia activa y la potencia aparente coinciden, con lo cual, la potencia reactiva consumida es cero.
  - En el caso de factor de potencia igual a cero, la potencia reactiva y la potencia aparente coinciden, con lo que la potencia activa es nula

## 7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

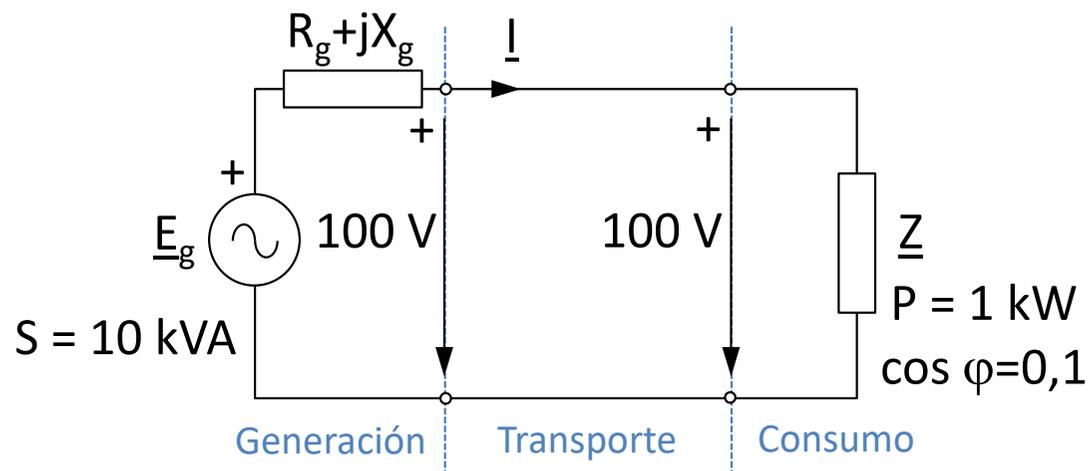
- *Para una misma potencia activa, a menor factor de potencia, mayor es la intensidad que circula por las líneas.*

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} \quad \text{si } P, U = \text{ctes y } \cos \varphi \downarrow \Rightarrow I \uparrow$$

- *Este incremento de la intensidad, como consecuencia de un factor de potencia bajo, lleva, entre otros efectos, a un aumento de pérdidas por efecto Joule en los conductores del generador y en las líneas de transporte de energía. Además, aumentan las caídas de tensión en dichas líneas de transporte.*

## 7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

- Otro efecto que se produce, a causa de un factor de potencia bajo, es la saturación de la capacidad de un sistema.
- Supongamos el sistema:



Generador:

$$S = UI_{\max} = 10000\text{ VA}$$

$$I_{\max} = \frac{S}{U} = \frac{10000}{100} = \underline{100\text{ A}}$$

Carga:

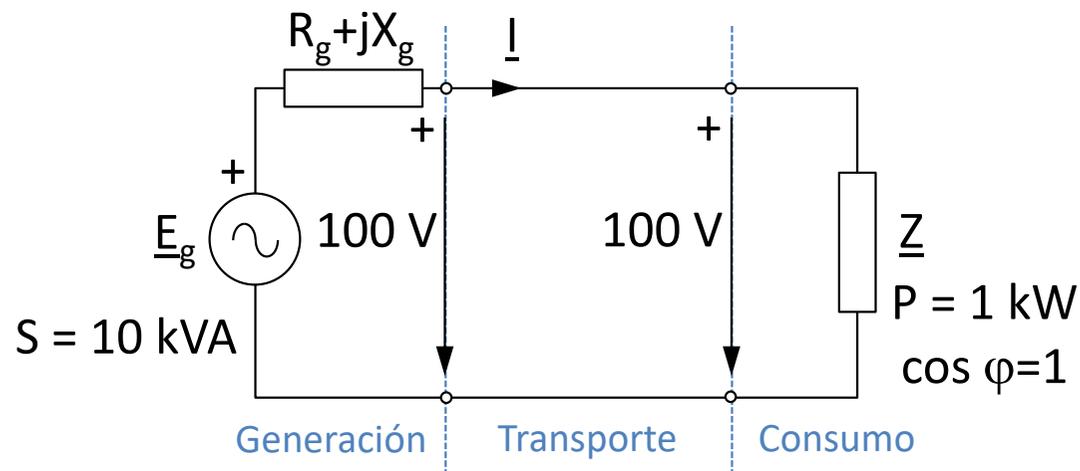
$$P = UI \cos \varphi = 1000\text{ W}$$

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1000}{100 \cdot 0,1} = \underline{100\text{ A}}$$

**Sistema saturado**

## 7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

- El mismo sistema operando con mejor factor de potencia:



**«Sobran» 90 A**

Generador:

$$S = UI_{\max} = 10000\text{ VA}$$

$$I_{\max} = \frac{S}{U} = \frac{10000}{100} = \underline{100\text{ A}}$$

Carga:

$$P = UI \cos \varphi = 1000\text{ W}$$

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1000}{100 \cdot 1} = \underline{10\text{ A}}$$

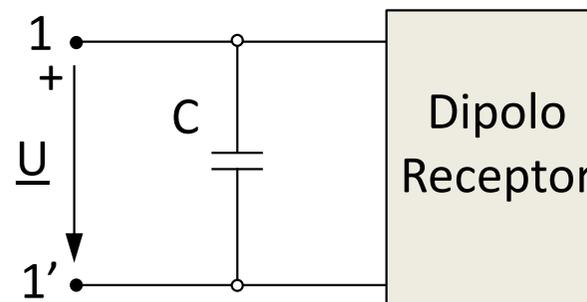
- En la primera situación, con un consumidor se alcanza la capacidad máxima del sistema. En el segundo caso es posible alimentar a más usuarios con el mismo sistema.

## 7.5.2. Efectos de un factor de potencia bajo

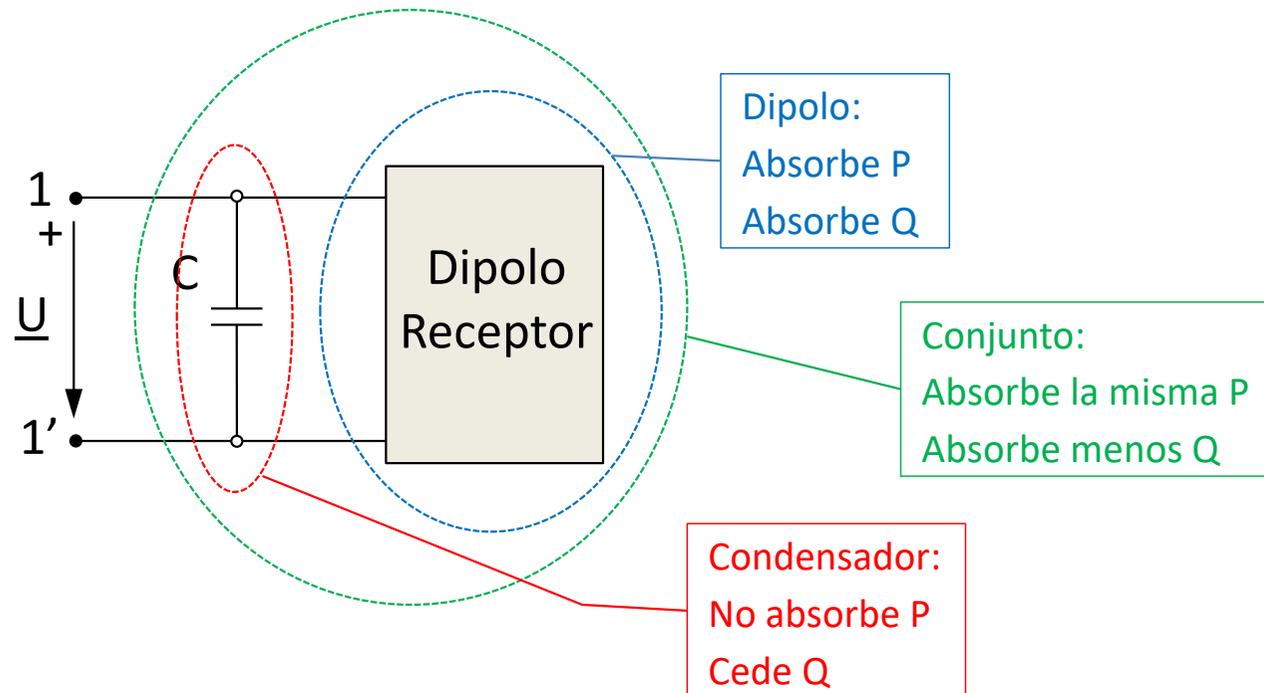
- *Como se ha visto:*
  - Las pérdidas en los sistemas eléctricos (tanto en la generación como en el transporte) aumentan cuando se dan factores de potencia bajos.
  - El aprovechamiento de las instalaciones generadoras y de transporte de energía eléctrica es mucho peor si se dan factores de potencia bajos.
- *El RETB (Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión) obliga a que los receptores trabajen con un factor de potencia mayor de 0,9.*
- *Si el f.d.p. es menor, será necesario “compensar el factor de potencia” de una instalación.*

## 7.5.3. Compensación del factor de potencia

- *Dado que las líneas de transporte y la mayoría de receptores presentan carácter inductivo, es decir, absorben potencia reactiva, la compensación del factor de potencia se hace mediante la conexión, en paralelo con el receptor, de baterías de condensadores (elementos que ceden potencia reactiva sin consumir potencia activa).*
- *Esta conexión hace que la potencia reactiva total consumida por el sistema compensado sea menor que la potencia reactiva absorbida por el receptor trabajando aislado y, por lo tanto, que aumente el factor de potencia del conjunto.*



## 7.5.3. Compensación del factor de potencia



- La potencia reactiva que cede un condensador sometido a una tensión  $U$  vale:

$$Q_{ced} = XI^2 = \frac{U^2}{X} = \omega CU^2$$

## 7.5.3. Compensación del factor de potencia

- Al conectar una batería de condensadores en paralelo con un receptor que consume potencia reactiva, la nueva potencia reactiva que absorbe el conjunto será:

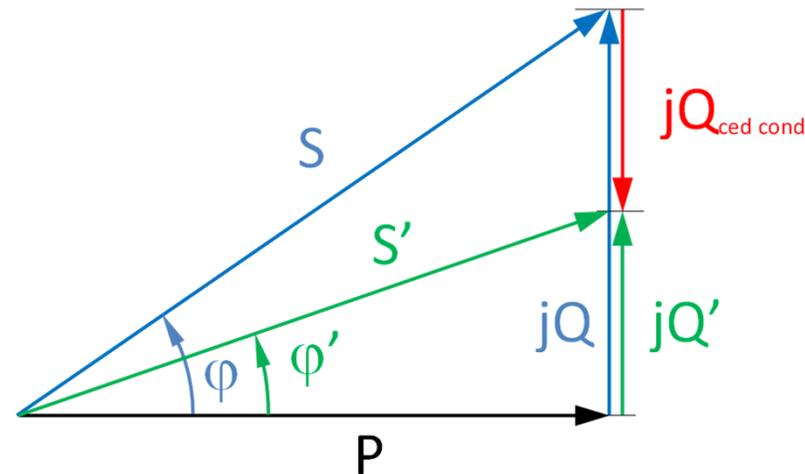
$$Q_{abs\ total} = Q_{abs\ receptor} - Q_{ced\ condensador}$$

- Mientras que la potencia activa del conjunto permanecerá constante, ya que el condensador no absorbe potencia activa.
- Entonces:

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{abs\ receptor} - Q_{abs\ total}$$

## 7.5.3. Compensación del factor de potencia

- Representando esto en el triángulo de potencias:



- El valor de la capacidad de la batería de condensadores requerida para pasar de factor de potencia  $\cos\varphi$  a un factor de potencia  $\cos\varphi'$  se calcula:

$$Q_{ced\ condensador} = Q - Q' = P \operatorname{tg}\varphi - P \operatorname{tg}\varphi' = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

## 7.5.3. Compensación del factor de potencia

- Dado que la potencia reactiva que cede un condensador vale:

$$Q_{ced \text{ condensador}} = \omega CU^2$$

- Entonces:

$$\omega CU^2 = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

- Con lo que:

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{\omega U^2}$$

## ***7.6. Teoremas relacionados con la potencia en RES***

## 7.6.1. Teorema de Boucherot

- *En todo circuito alimentado por fuentes sinusoidales de la misma pulsación, se conservan, de manera independiente, la potencia activa y la potencia reactiva.*

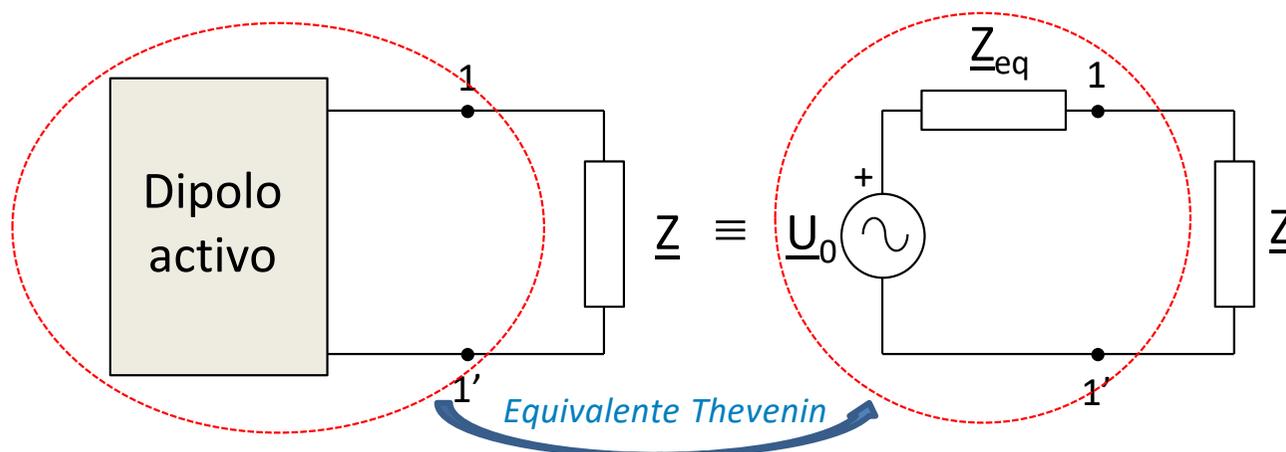
$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\text{algebraica}} P_{abs} = 0 \\ \sum_{\text{algebraica}} Q_{abs} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \sum S_{-abs} = \underbrace{\sum P_{abs}}_{=0} + j \underbrace{\sum Q_{abs}}_{=0} = 0$$

**Atención:**

$$\sum S_{-abs} = 0 \not\Rightarrow \sum S_{abs} = 0$$

## 7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- **Enunciado 1:** De entre las infinitas impedancias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la impedancia para la que se cumpla que su valor sea igual al conjugado de la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta.



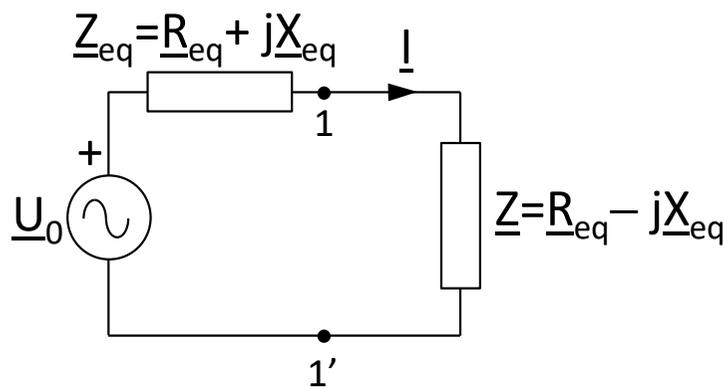
$\underline{Z}$  absorbe la máx P si:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{eq}^*$$

donde:  $\underline{Z}_{eq}^* = R_{eq} - jX_{eq}$

## 7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- En muchas aplicaciones es importante lograr la máxima transferencia de potencia entre el circuito y la carga que alimenta.
- En otras no se busca esta transferencia máxima, ya que, cuando se da, el rendimiento del circuito es del 50%. (Ejemplo: Transporte de energía eléctrica)



$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{eq} + \underline{Z} = R_{eq} + jX_{eq} + R_{eq} - jX_{eq} = 2R_{eq}$$

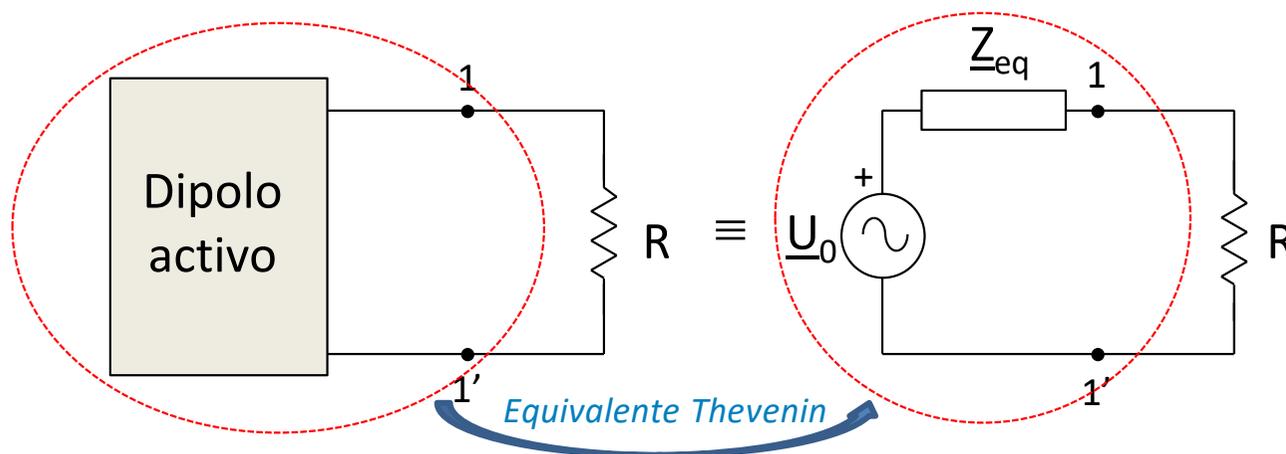
$$I = \frac{U_0}{Z_T} = \frac{U_0}{2R_{eq}} \Rightarrow P_{absZ} = I^2 \cdot R_{eq} = \frac{U_0^2}{4R_{eq}^2} R_{eq} = \frac{U_0^2}{4R_{eq}}$$

$$P_{ced\ fuente} = I^2 \cdot (R_{eq} + R_{eq}) = \frac{U_0^2}{4R_{eq}^2} 2R_{eq} = \frac{U_0^2}{2R_{eq}}$$

$$\eta = \frac{P_{absZ}}{P_{ced\ fuente}} = \frac{\frac{U_0^2}{4R_{eq}}}{\frac{U_0^2}{2R_{eq}}} = 0,5$$

## 7.6.2. Teorema de la máxima transferencia de potencia

- **Enunciado 2:** De entre las infinitas resistencias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la resistencia para la que se cumpla que su valor sea igual al módulo de la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta.



R absorbe la máx P si:

$$R = Z_{eq}$$

donde:  $Z_{eq} = \sqrt{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$

## ***7.7. Medida de la potencia***

## 7.7. Medida de la potencia

- **Potencia aparente:**

- Si se conoce el valor eficaz de la tensión en bornes de un elemento, y el valor eficaz de la intensidad que circula por él, se puede conocer la potencia aparente, ya que:

$$S = U \cdot I$$

- **Potencia activa:**

- El instrumento utilizado para la medida de la potencia activa se denomina **Vatímetro**.
- Dado que:

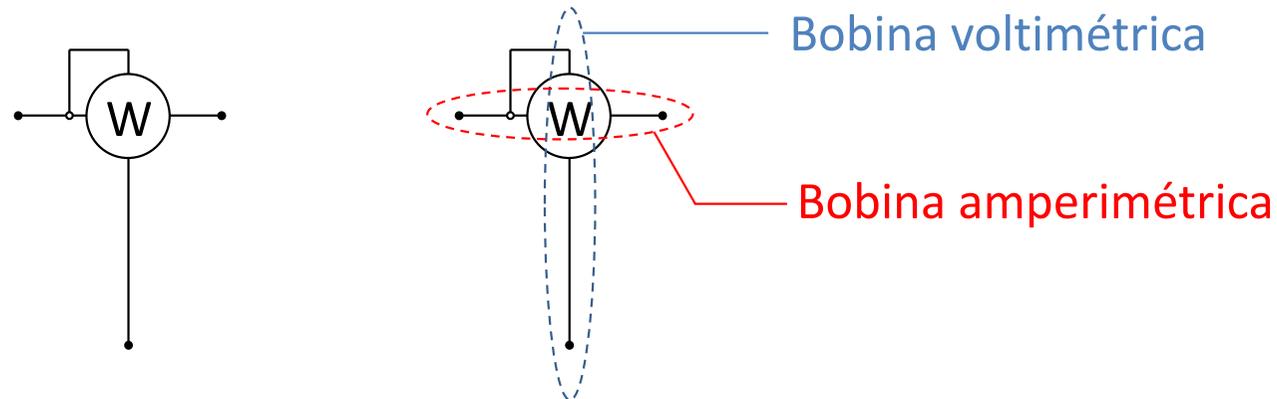
$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

## 7.7. Medida de la potencia

- Un vatímetro ha de medir la tensión eficaz, la intensidad eficaz y el coseno del ángulo de desfase entre estas dos magnitudes.
- Para ello, este equipo consta de un elemento que mide la tensión, llamado **bobina voltimétrica** y que se conecta en paralelo con la tensión que se desea medir; y un elemento encargado de medir la intensidad, denominado **bobina amperimétrica** y que se coloca en serie con la intensidad a medir.
- El producto de estas tres magnitudes da como resultado la medida de la potencia activa que absorbe la parte del circuito que se encuentra «aguas abajo» del punto de conexión del vatímetro.

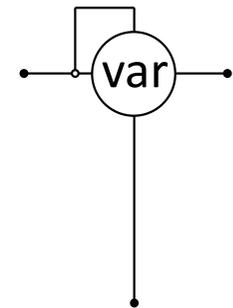
## 7.7. Medida de la potencia

- El símbolo empleado para el vatímetro es:



- **Potencia reactiva:**

- El instrumento utilizado para la medida de la potencia reactiva se denomina **Varímetro**.
- Su principio de funcionamiento es el mismo que el del vatímetro, pero utilizando el seno del ángulo de desfase entre tensión e intensidad



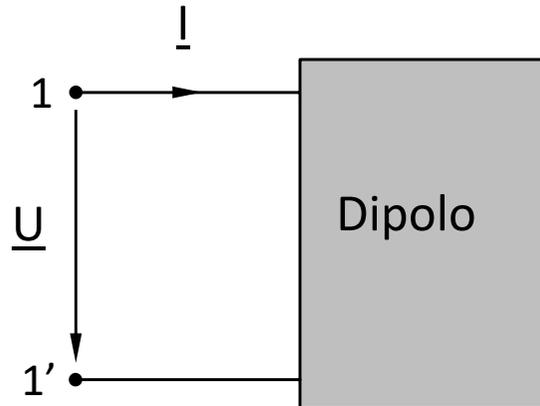
# ***Resumen Tema 7***

*Potencia en régimen estacionario  
sinusoidal*



# R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- Dado un dipolo en RES, y para las referencias de la figura:



- Se define la **Potencia Compleja absorbida** ( $\underline{S}_{abs}$ ) como:

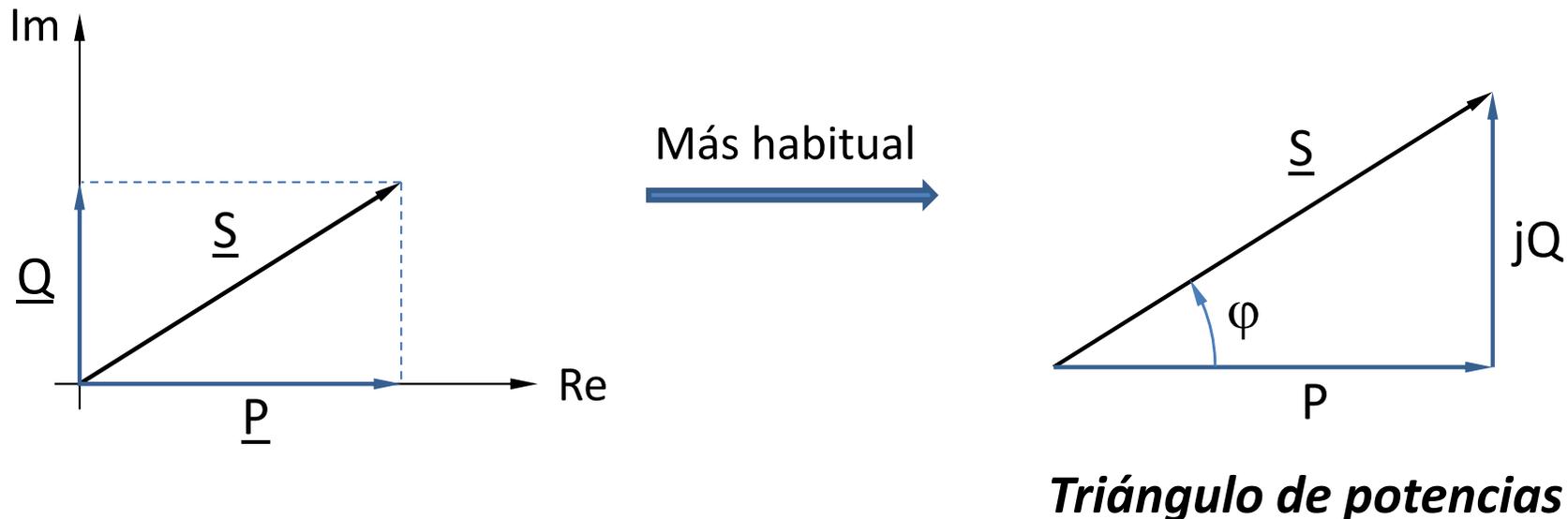
$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (\underline{I}^* \text{ es el conjugado de } \underline{I})$$

- La **Potencia Compleja** es un número complejo, es decir, tiene parte real y parte imaginaria.

$$\underline{S}_{abs} = P_{abs} + jQ_{abs}$$

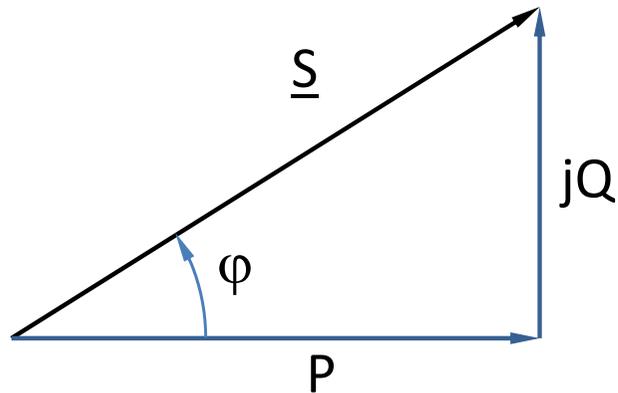
# R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

- Representación de  $\underline{S}$  en el plano complejo:



- Al modulo de la potencia compleja,  $S$ , se le denomina **Potencia Aparente**.
- A la parte real de la potencia compleja,  $P$ , se le denomina **Potencia Activa**.
- A la parte imaginaria de la potencia compleja,  $Q$ , se le denomina **Potencia Reactiva**.

# R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo



## Unidades:

- **S**: Potencia aparente: Voltamperios (**VA**)
- **P**: Potencia activa: Vatios (**W**)
- **Q**: Potencia reactiva: Voltamperios reactivos (**var**)

$$\text{Si: } \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \xrightarrow{\substack{\underline{U} = U \angle \varphi_u \\ \underline{I}^* = I \angle -\varphi_i}} \begin{cases} S = U \cdot I \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi = \widehat{(\underline{U}, \underline{I})} \end{cases}$$

A partir del **triángulo de potencias** se deduce:

- $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- $P = S \cos \varphi = U \cdot I \cos \varphi$
- $Q = S \sin \varphi = U \cdot I \sin \varphi$
- $\text{tg } \varphi = \frac{Q}{P}$
- $Q = P \text{ tg } \varphi$
- $\cos \varphi = \frac{P}{S}$

# R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo

Si el dipolo es *pasivo*:



Dado que :  $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = (R + jX) \cdot \underline{I}$

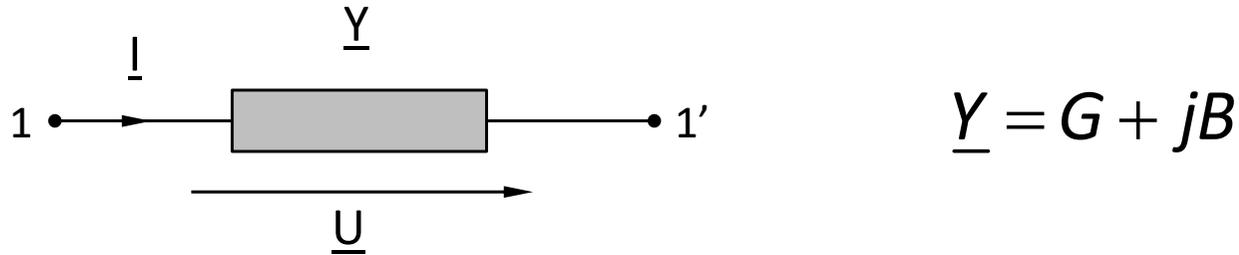
$$\underline{S}_{abs} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + jX \cdot I^2 = P_{abs} + jQ_{abs}$$

Identificando partes reales y partes imaginarias:

$P_{abs} = R \cdot I^2 \longrightarrow$  Potencia activa: es *absorbida por la parte real* de la impedancia

$Q_{abs} = X \cdot I^2 \longrightarrow$  Potencia reactiva: es *absorbida por la parte imaginaria* de la impedancia

# R-7.1. Expresión de la potencia en el campo complejo



Dado que :  $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = (G + jB) \cdot \underline{U}$

$$\begin{aligned}\underline{S}_{abs} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot [(G + jB) \cdot \underline{U}]^* = (G - jB) \cdot \underline{U} \cdot \underline{U}^* = (G - jB) \cdot U^2 = \\ &= G \cdot U^2 - jB \cdot U^2 = P_{abs} + jQ_{abs}\end{aligned}$$

Identificando partes reales y partes imaginarias:

$P_{abs} = G \cdot U^2 \longrightarrow$  **Potencia activa:** es *absorbida por la parte real* de la admitancia

$Q_{abs} = -B \cdot U^2 \longrightarrow$  **Potencia reactiva:** es *absorbida por la parte imaginaria* de la admitancia

## R-7.2. Potencia compleja en dipolos pasivos básicos

- **Resistencia:**  $\underline{Z} = R$  ( $R+j0$ );  $\underline{Y}=G$  ( $G+j0$ )

- Potencia activa:  $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \longrightarrow \geq 0$

- Potencia reactiva:  $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = 0$

- **Bobina:**  $\underline{Z} = j\omega L$  ( $0+j\omega L$ );  $\underline{Y} = -j(1/\omega L)$  ( $0+j(-1/\omega L)$ )

- Potencia activa:  $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 = 0$

- Potencia reactiva:  $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = \omega L I^2 = \frac{1}{\omega L} U^2 \longrightarrow \geq 0$

- **Condensador:**  $\underline{Z} = -j(1/\omega C)$  ( $0+j(-1/\omega C)$ );  $\underline{Y} = j\omega C$

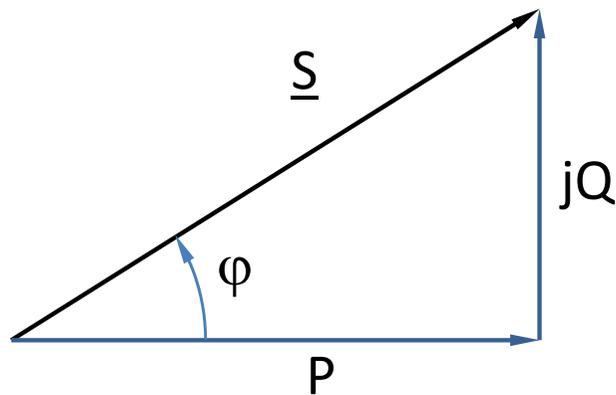
- Potencia activa:

- Potencia reactiva:  $P_{abs} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 = 0$

- Potencia reactiva:  $Q_{abs} = X \cdot I^2 = -G \cdot U^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega C U^2 \longrightarrow \leq 0$

## R-7.3. Definición del factor de potencia

- En general, en un dipolo, la potencia activa es menor que la potencia aparente.
- Se define el **Factor de potencia** como la relación:



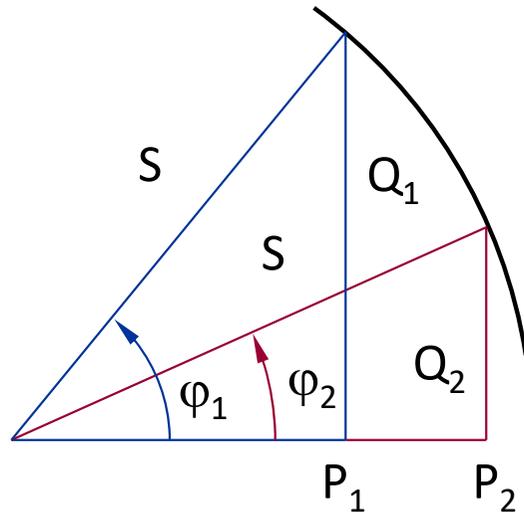
$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

$$\varphi = \left( \widehat{\underline{U}, \underline{I}} \right) \xrightarrow{\text{Dipolo Pasivo}} \varphi = \left( \widehat{\underline{U}, \underline{I}} \right) = \varphi_Z \text{ (argumento de su impedancia)}$$

# R-7.3. Definición del factor de potencia

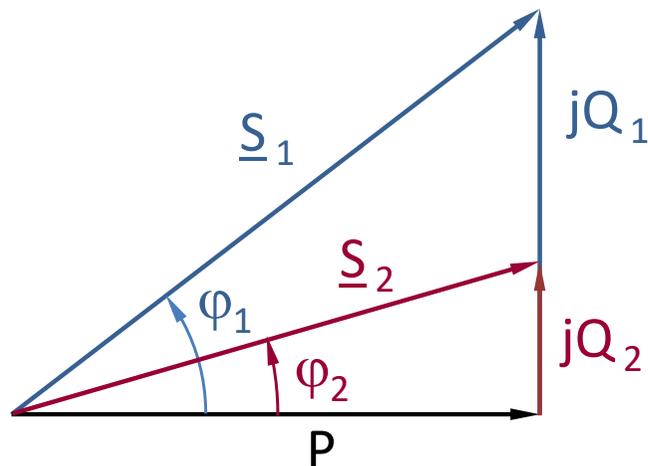
- Para una misma potencia aparente: ( $S = U \cdot I$ )



Si  $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \cos \varphi_1 < \cos \varphi_2$

- $P_1 < P_2$  y  $Q_1 > Q_2$
- La instalación estará peor aprovechada cuanto mayor sea el ángulo de desfase entre  $\underline{U}$  e  $\underline{I}$ , es decir, cuanto menor sea el f.d.p.

- Para la misma tensión y la misma potencia activa: ( $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ )



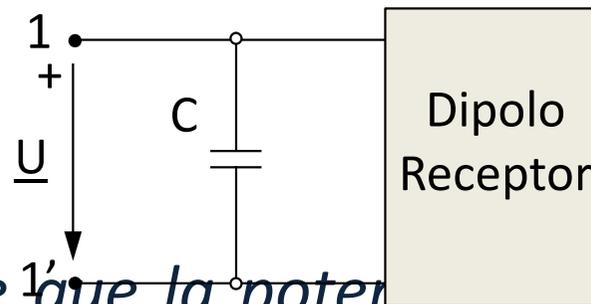
$$I_1 = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi_1}$$

$$I_2 = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi_2}$$

Si  $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \cos \varphi_1 < \cos \varphi_2 \Rightarrow I_1 > I_2$   
 (A peor factor de potencia, más intensidad circula por la instalación)

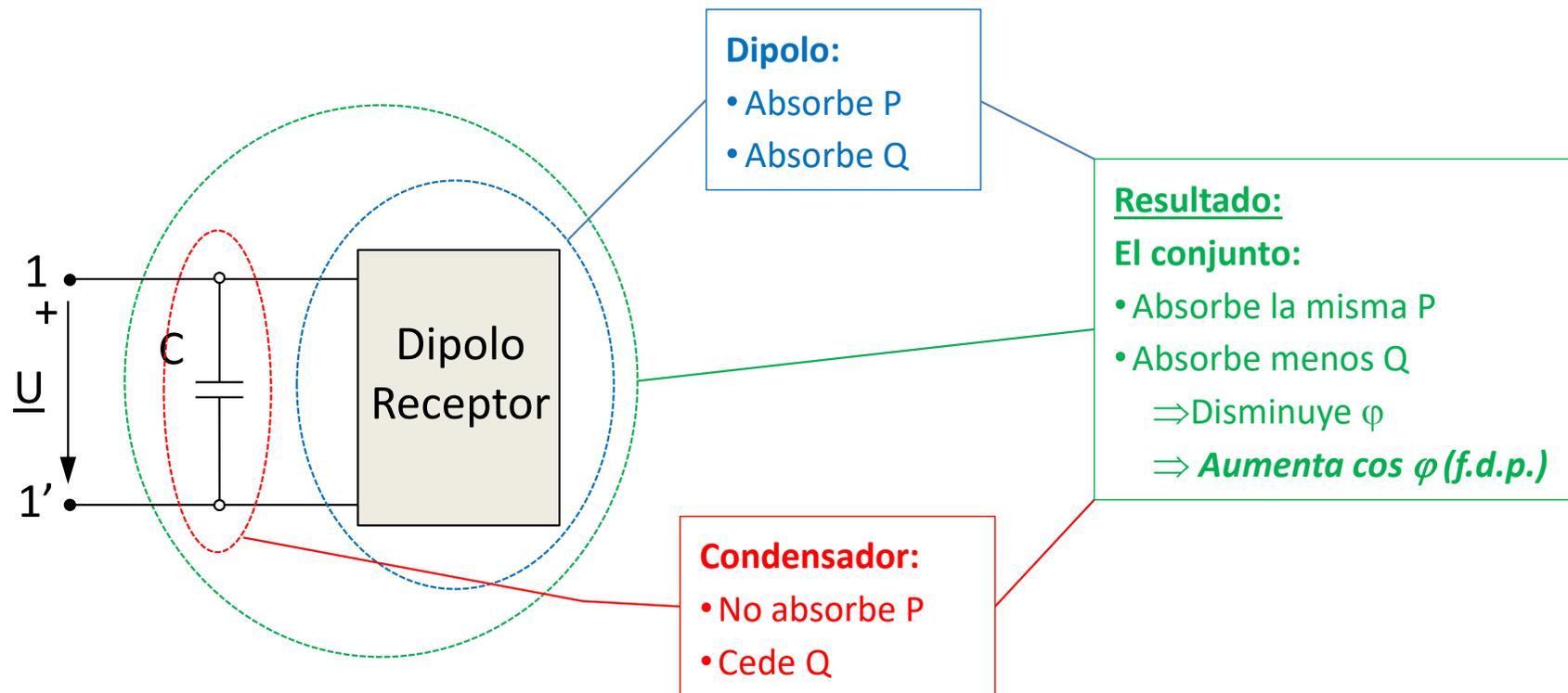
## R-7.4. Compensación del factor de potencia

- *Dado que las líneas de transporte y la mayoría de receptores presentan carácter inductivo, es decir, absorben potencia reactiva, la compensación del factor de potencia se hace, habitualmente, mediante la conexión, en paralelo con el receptor, de baterías de condensadores (elementos que ceden potencia reactiva sin consumir potencia activa).*



- *Esta conexión hace que la potencia reactiva total consumida por el sistema compensado sea menor que la potencia reactiva absorbida por el receptor trabajando aislado y, por lo tanto, que aumente el factor de potencia del conjunto.*

# R-7.4. Compensación del factor de potencia



## R-7.4. Compensación del factor de potencia

- *Al conectar una batería de condensadores en paralelo con un receptor que consume potencia reactiva, la potencia reactiva que absorbe el conjunto disminuye:*

$$Q_{abs\ CC} = Q_{abs\ SC} - Q_{ced\ condensador}$$

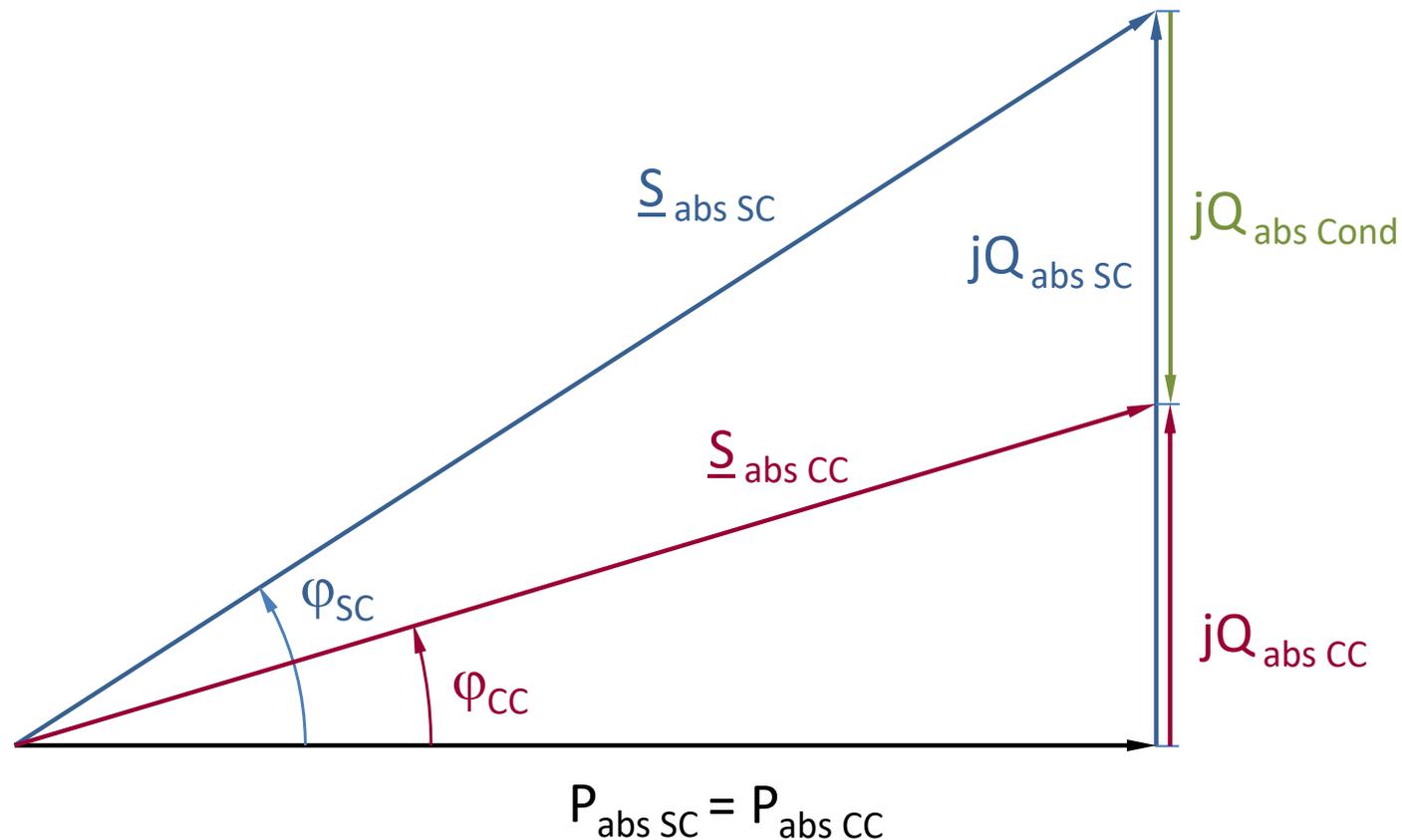
SC: Sin condensador

CC: Con condensador

- *Por el contrario, la potencia activa absorbida por el conjunto permanecerá constante, ya que el condensador no absorbe ni cede potencia activa.*

# R-7.4. Compensación del factor de potencia

- Representando esto en el triángulo de potencias:



SC: Sin condensador

CC: Con condensador

## R-7.4. Compensación del factor de potencia

- El valor de la capacidad de la batería de condensadores requerida para pasar del factor de potencia  $\cos\varphi_{inicial}$  a un factor de potencia  $\cos\varphi_{final}$  se calcula:

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{abs\ SC} - Q_{abs\ CC}$$

$$Q_{ced\ condensador} = Q_{abs\ SC} - Q_{abs\ CC} = P_{abs} \operatorname{tg}\varphi_{SC} - P_{abs} \operatorname{tg}\varphi_{CC} = P_{abs} (\operatorname{tg}\varphi_{SC} - \operatorname{tg}\varphi_{CC})$$

- Dado que la potencia reactiva que cede un condensador vale:

$$Q_{ced\ condensador} = \omega CU^2$$

## R-7.4. Compensación del factor de potencia

- Entonces:

$$\omega CU^2 = Q_{abs\ SC} - Q_{abs\ CC} = P(\operatorname{tg}\varphi_{SC} - \operatorname{tg}\varphi_{CC})$$

- Con lo que:

$$C = \frac{P_{abs} (\operatorname{tg}\varphi_{inicial} - \operatorname{tg}\varphi_{final})}{\omega U^2}$$

- **Condensador óptimo:** El que consigue que  $\cos\varphi_{final} = 1$

$$C_{\text{óptimo}} = \frac{P_{abs} \operatorname{tg}\varphi_{inicial}}{\omega U^2}$$

## R-7.5. Teorema de Boucherot

- *En todo circuito alimentado por fuentes sinusoidales de la misma pulsación, se conservan, de manera independiente, la potencia activa y la potencia reactiva.*

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\text{algebraica}} P_{abs} = 0 \\ \sum_{\text{algebraica}} Q_{abs} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \sum S_{-abs} = \underbrace{\sum P_{abs}}_{=0} + j \underbrace{\sum Q_{abs}}_{=0} = 0$$

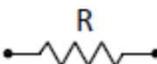
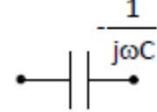
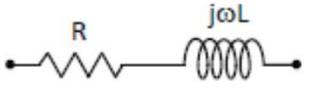
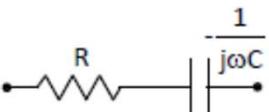
**Atención:**

$$\sum S_{-abs} = 0 \not\Rightarrow \sum S_{abs} = 0$$

## ***R-7.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia***

- **Enunciado 1:** *De entre las infinitas impedancias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la impedancia cuyo valor sea:  $\underline{Z}=(\underline{Z}_{eq})^*$ .*
- **Enunciado 2:** *De entre las infinitas resistencias que pueden conectarse en bornes de un dipolo activo alimentado por fuentes sinusoidales, absorberá la máxima potencia activa la resistencia cuyo valor sea:  $R=Z_{eq}$ .*
- *En ambos enunciados,  $\underline{Z}_{eq}$  es la impedancia compleja del equivalente Thévenin del dipolo al cual se conecta bien la impedancia o bien la resistencia.*

## Impedancias en régimen estacionario sinusoidal

Tipo de impedancia (tipo de carga)	Símbolo	$\underline{Z}$	$\underline{U}$ respecto de $\underline{I}$	Potencia activa y reactiva
Resistiva pura		$\underline{Z} = R$ $\underline{Z} = R + j0$ $\underline{Z} = R \angle 0^\circ$	$\underline{U}$ está en fase con $\underline{I}$	$P_{\text{abs}} = R \cdot I^2 = U^2/R > 0$ $Q_{\text{abs}} = 0$
Inductiva pura		$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Z} = 0 + j\omega L$ $\underline{Z} = \omega L \angle 90^\circ$	$\underline{U}$ adelanta $90^\circ$ a $\underline{I}$	$P_{\text{abs}} = 0$ $Q_{\text{abs}} = \omega L \cdot I^2 = U^2/\omega L > 0$
Capacitiva pura		$\underline{Z} = -j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = 0 - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = (1/\omega C) \angle -90^\circ$	$\underline{U}$ retrasa $90^\circ$ respecto de $\underline{I}$	$P_{\text{abs}} = 0$ $Q_{\text{abs}} = -(1/\omega C) \cdot I^2 =$ $= U^2 / -(1/\omega C) < 0$
De carácter inductivo		$\underline{Z} = R + jX_L \quad (X_L > 0)$ $\underline{Z} = R + j\omega L$ $\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \arctg \frac{\omega L}{R}$	$\underline{U}$ adelanta a $\underline{I}$ un ángulo $\varphi_Z$	$P_{\text{abs}} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{\text{abs}} = \omega L \cdot I_L^2 = U_L^2/\omega L > 0$
De carácter capacitivo		$\underline{Z} = R + jX_C \quad (X_C < 0)$ $\underline{Z} = R - j(1/\omega C)$ $\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \angle \arctg \frac{-1/\omega C}{R}$	$\underline{U}$ retrasa respecto de $\underline{I}$ un ángulo $\varphi_Z$	$P_{\text{abs}} = R \cdot I_R^2 = U_R^2/R > 0$ $Q_{\text{abs}} = -(1/\omega C) \cdot I_C^2 =$ $= U_C^2 / -(1/\omega C) < 0$

## Recordar que:

- En una impedancia, el DESFASE entre tensión e intensidad es igual al argumento de la impedancia.
- En una impedancia, absorbe POTENCIA ACTIVA la parte real de la impedancia.
- En una impedancia, absorbe POTENCIA REACTIVA la parte imaginaria de la impedancia.

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección Textos Docentes, vol. 58. Pressas Universitarias de Zaragoza.
- BAYOD, A.A.: **“Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal”**. Colección Textos Docentes, vol. 107. Pressas Universitarias de Zaragoza.

# ***Tema 8***

## *Sistemas trifásicos equilibrados*



## **Tema 8.- *Sistemas trifásicos equilibrados.***

- 8.1.- Introducción.
- 8.2.- Generación de un sistema trifásico.
- 8.3.- Conexiones en estrella y en triángulo.
  - 8.3.1.- Conexión en estrella (Y).
  - 8.3.2.- Conexión en triángulo (D).
- 8.4.- Conexión de sistemas trifásicos.
  - 8.4.1.- Sistema estrella-estrella.
  - 8.4.2.- Sistema triángulo-triángulo.
  - 8.4.3.- Sistema estrella-triángulo.
  - 8.4.4.- Sistema triángulo-estrella.
- 8.5.- Tensiones e intensidades en sistemas trifásicos.
  - 8.5.1.- Tensión de línea o compuesta.
  - 8.5.2.- Intensidad de línea.
  - 8.5.3.- Tensión de fase o simple.
  - 8.5.4.- Intensidad de fase.
- 8.6.- Sistemas trifásicos equilibrados.
  - 8.6.1.- Relación entre magnitudes de línea y fase.
  - 8.6.2.- Equivalentes monofásicos.
  - 8.6.3.- Equivalencia de cargas.
  - 8.6.4.- Potencia en sistemas trifásicos equilibrados.

## ***8.1. Introducción***

## 8.1. Introducción

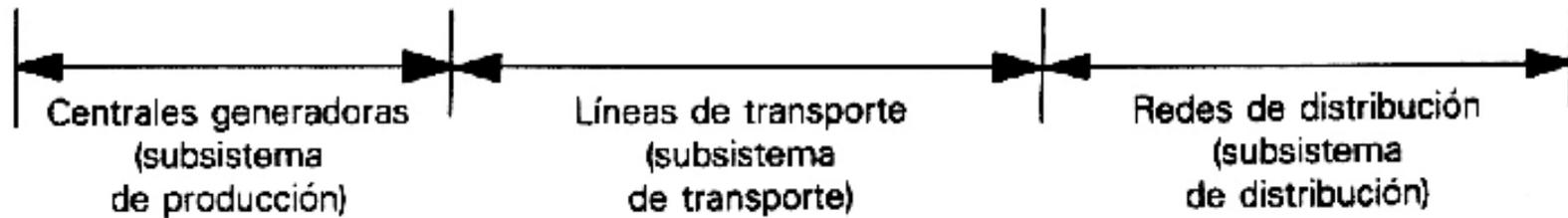
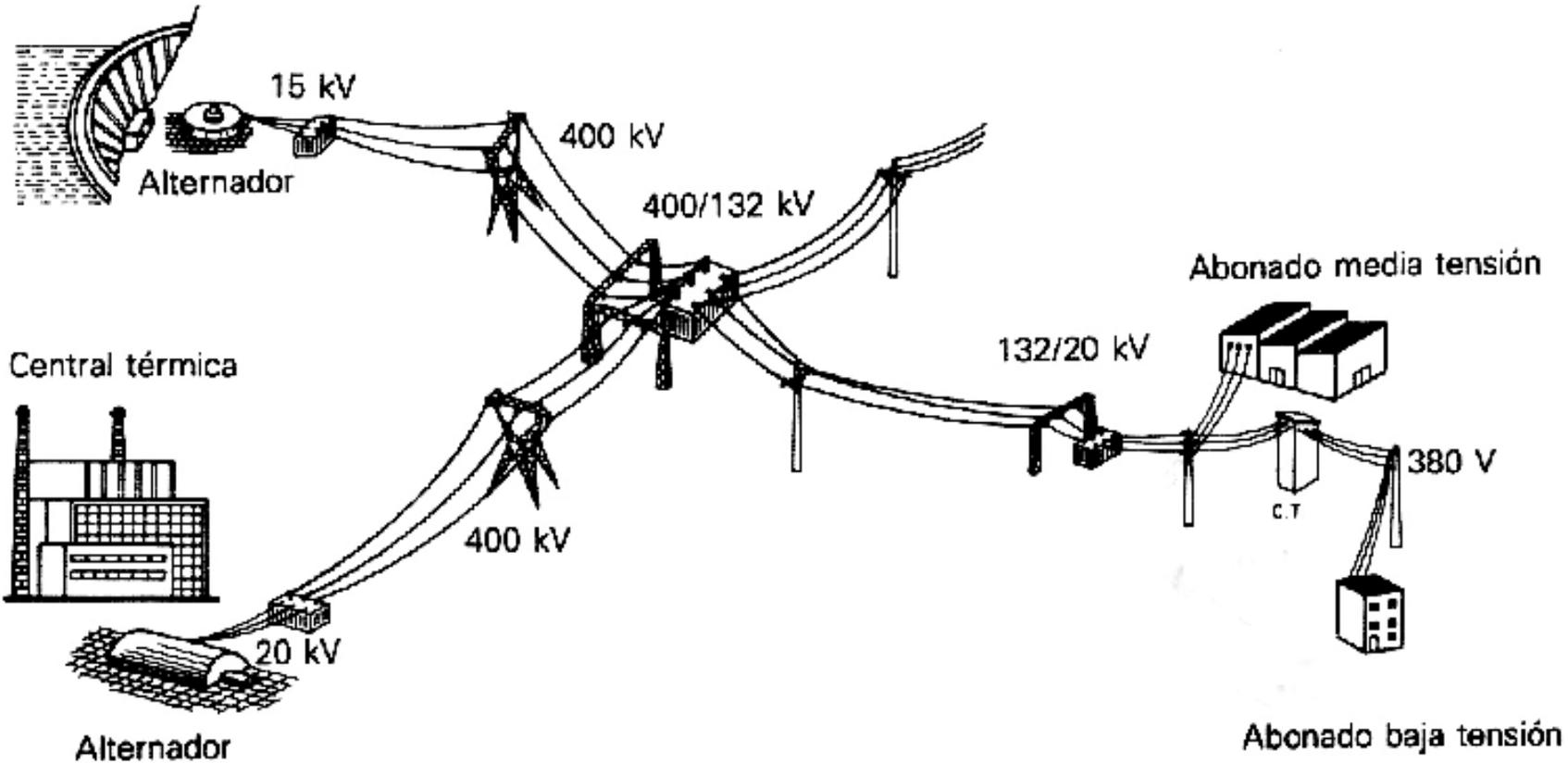
- *Los sistemas trifásicos son los más habitualmente empleados en la generación, el transporte y la distribución de la energía eléctrica.*
- *Esto es debido a que los sistemas trifásicos presentan notables ventajas sobre los monofásicos. Entre estas ventajas se pueden citar:*
  - Para transportar una determinada energía a una determinada tensión, con unas determinadas pérdidas, es más económico el sistema trifásico ya que supone un ahorro de “cobre” del 25%
  - La potencia instantánea es constante. Esto se refleja en un par totalmente uniforme en los motores trifásicos, y las consiguientes menores vibraciones
  - Los motores trifásicos pueden arrancar por sí mismos, mientras que los monofásicos precisan sistemas de arranque especiales
  - Los sistemas trifásicos son capaces de generar campos magnéticos giratorios

## 8.1. *Introducción*

- *Las instalaciones de pequeña potencia (por ejemplo las instalaciones domésticas) son monofásicas, pero no se tratan más que de una derivación de un sistema trifásico.*
- *Para conocer y estudiar el funcionamiento de los sistemas eléctricos de potencia se hace necesario entonces conocer el análisis de los circuitos trifásicos. No obstante, hay que tener en cuenta que:*
  - Las técnicas de análisis vistas en el caso de circuitos monofásicos son aplicables directamente a sistemas trifásicos.
  - En muchas ocasiones, el análisis de los sistemas trifásicos se efectúa mediante su reducción a sistemas monofásicos equivalentes, cuyo estudio ya se ha visto.

# 8.1. Introducción

Central hidráulica



# 8.1. *Introducción*



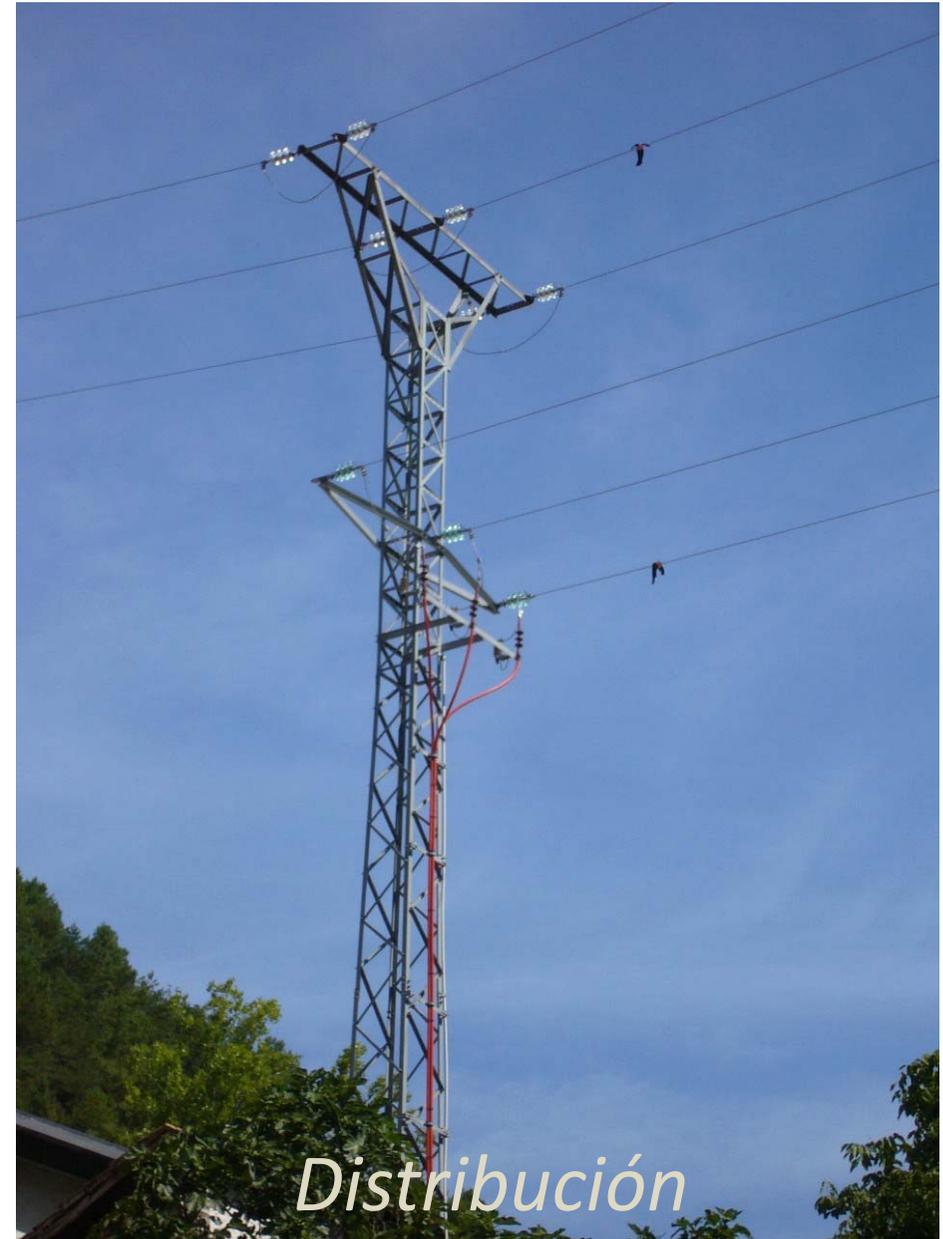
# 8.1. *Introducción*



# 8.1. *Introducción*



# 8.1. *Introducción*



## 8.1. *Introducción*

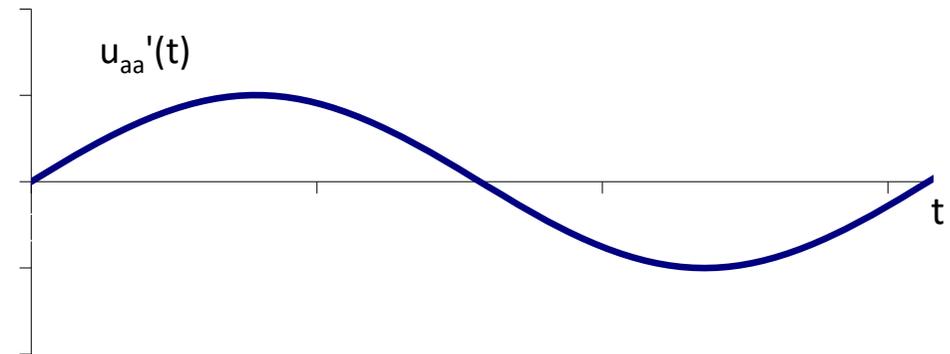
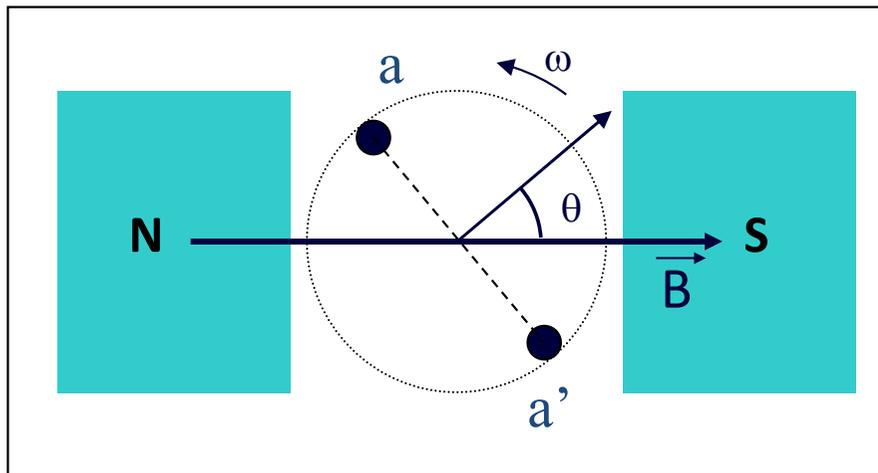
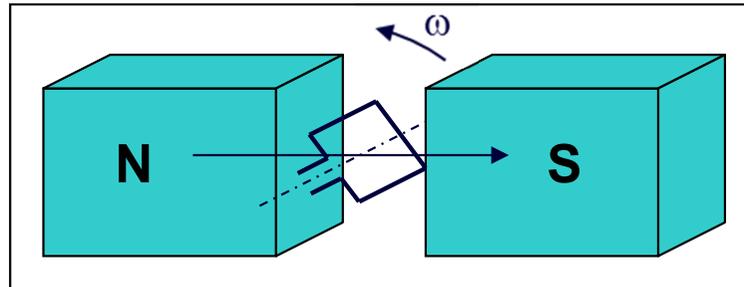


### *Distribución en baja tensión*

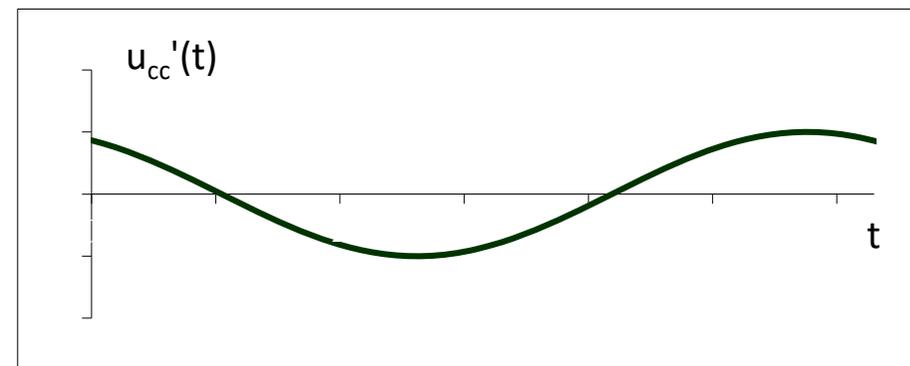
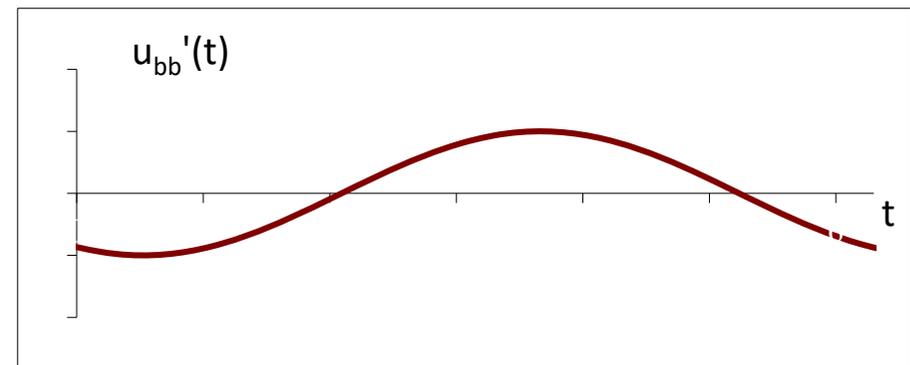
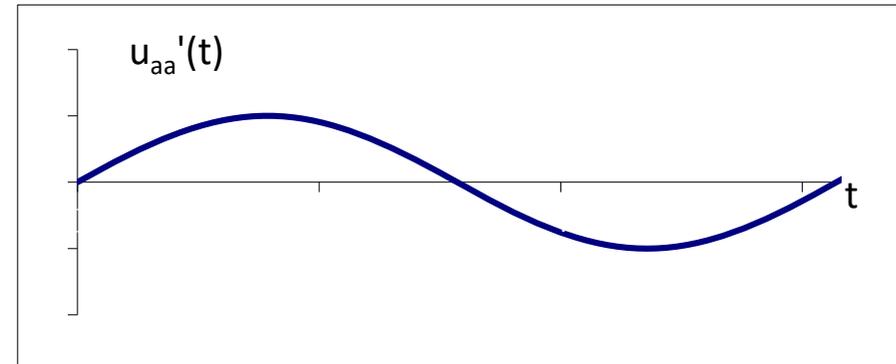
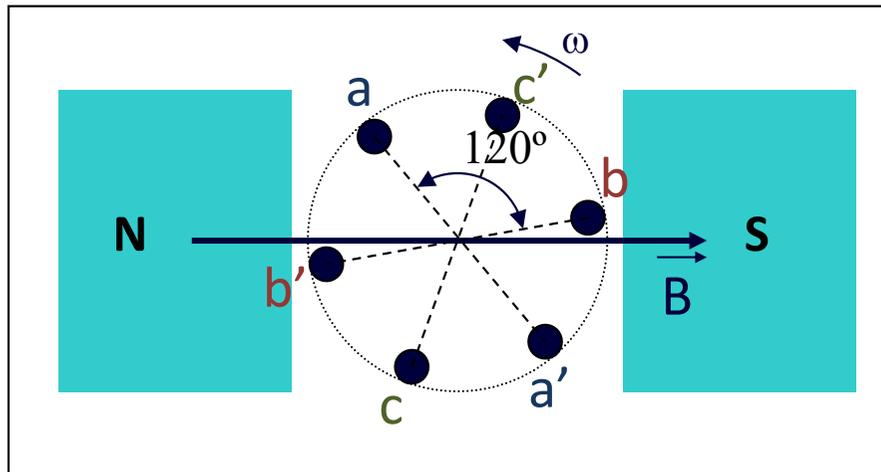
## ***8.2. Generación de un sistema trifásico***

## 8.2. Generación de un sistema trifásico

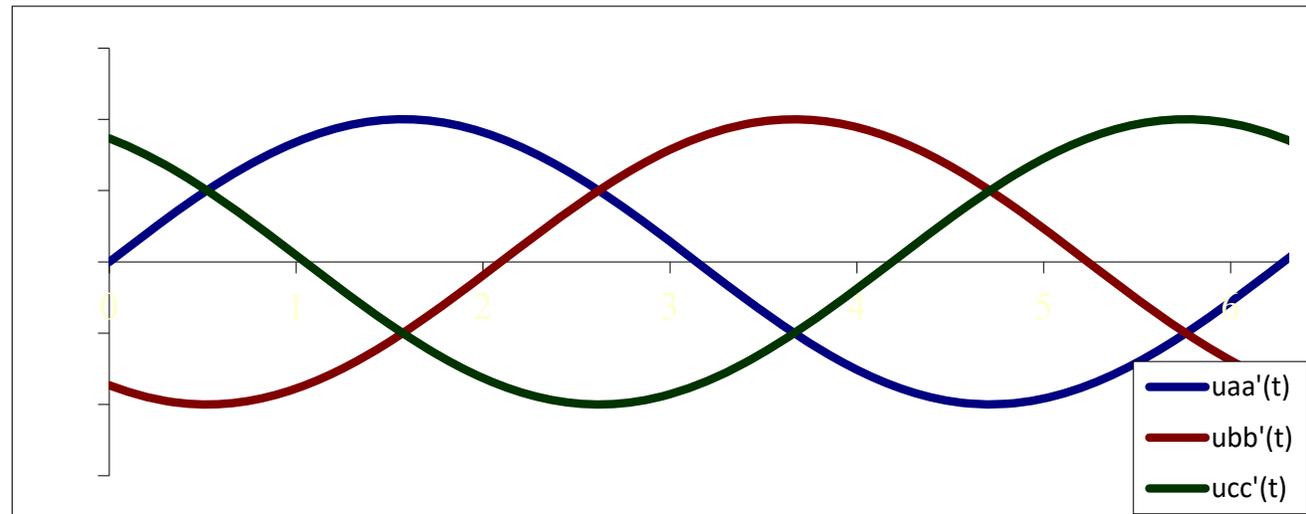
- Como se ha visto:



## 8.2. Generación de un sistema trifásico



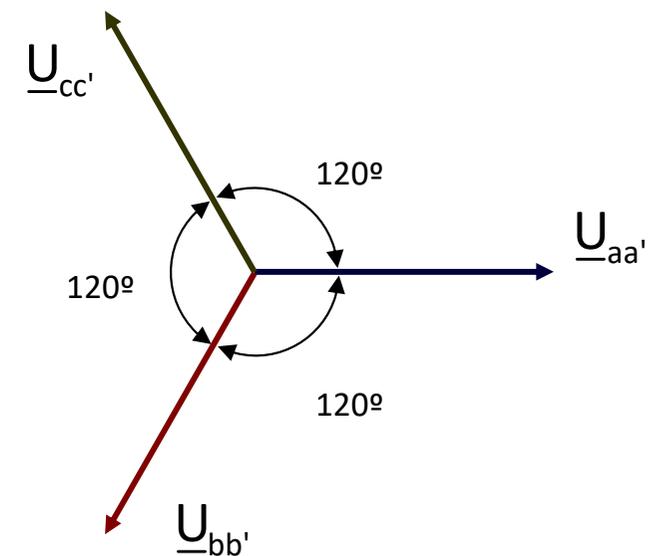
## 8.2. Generación de un sistema trifásico



$$u_{aa'}(t) = U_0 \text{sen}(\omega t)$$

$$u_{bb'}(t) = U_0 \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$u_{cc'}(t) = U_0 \text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = U_0 \text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

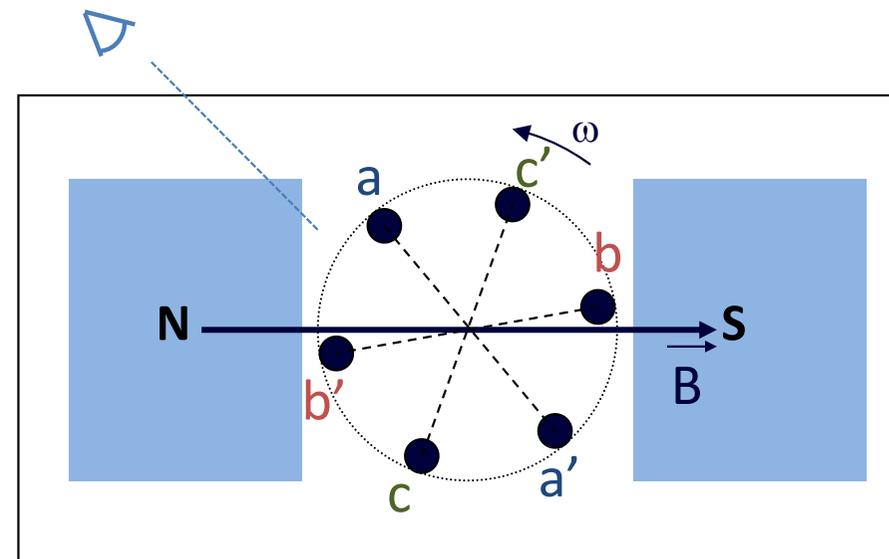
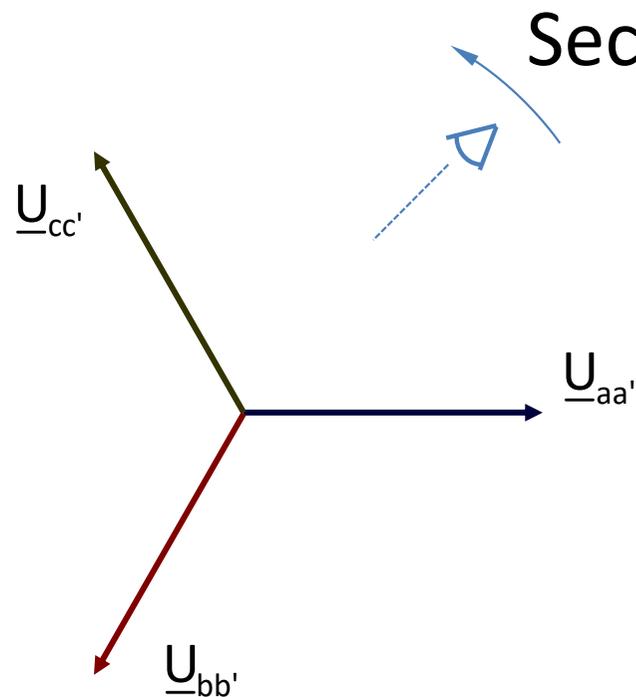


## 8.2. *Generación de un sistema trifásico*

*Se dispone de tres fuentes reales de tensión con la misma amplitud y desfasadas  $120^\circ$  entre sí*

- Fase: cada una de las partes de un circuito trifásico donde se genera, se transporta o se utiliza cada una de las tensiones del sistema
- Secuencia de fases: orden en el que se suceden los valores máximos de las tensiones en las fases
  - abc: secuencia directa
  - acb: secuencia inversa

## 8.2. Generación de un sistema trifásico

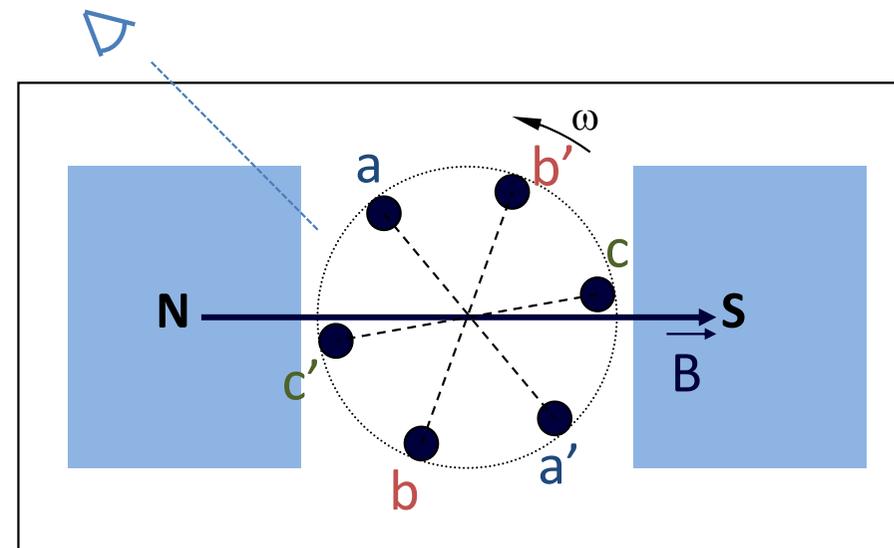
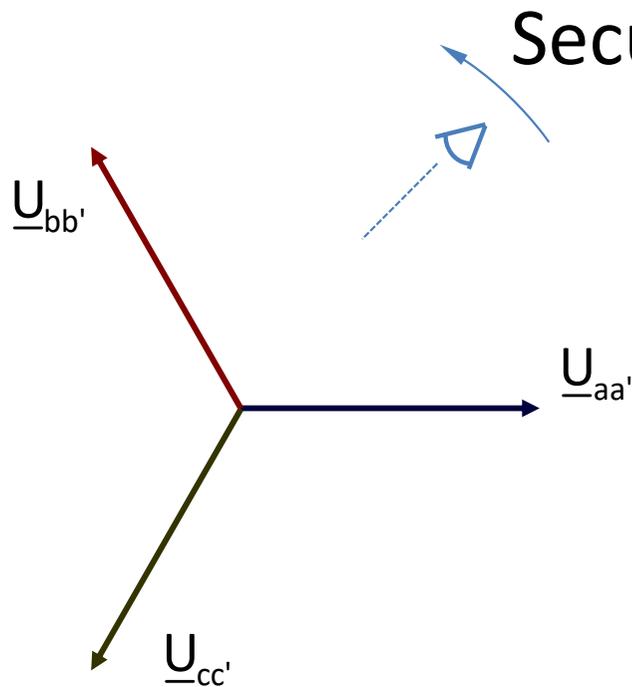


$$\underline{U}_{aa'} = U \underline{|0^\circ}$$

$$\underline{U}_{bb'} = U \underline{|-120^\circ}$$

$$\underline{U}_{cc'} = U \underline{|-240^\circ} = U \underline{|120^\circ}$$

## 8.2. Generación de un sistema trifásico



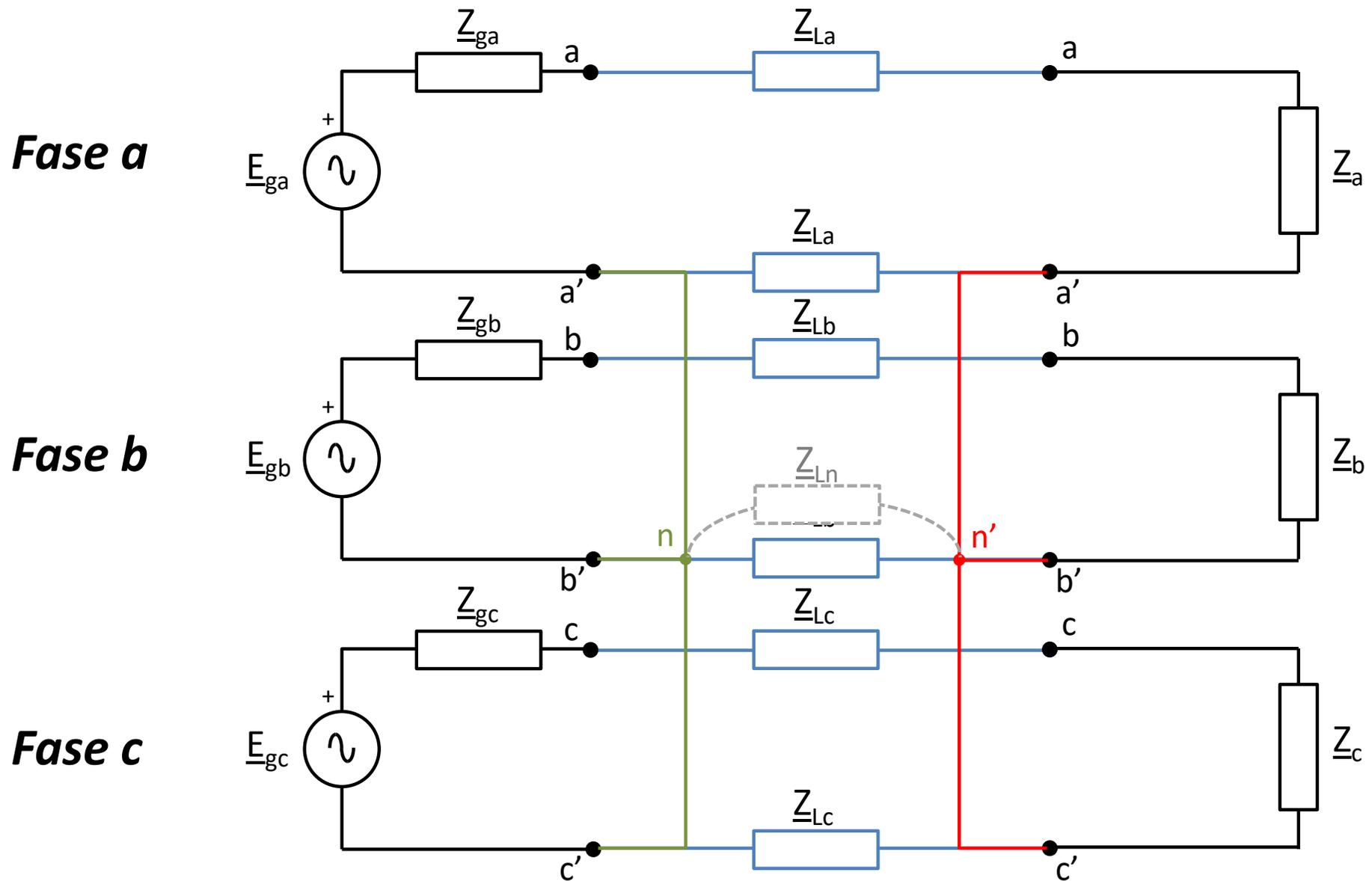
$$\underline{U}_{aa'} = U \angle 0^\circ$$

$$\underline{U}_{bb'} = U \angle -240^\circ = U \angle 120^\circ$$

$$\underline{U}_{cc'} = U \angle -120^\circ$$

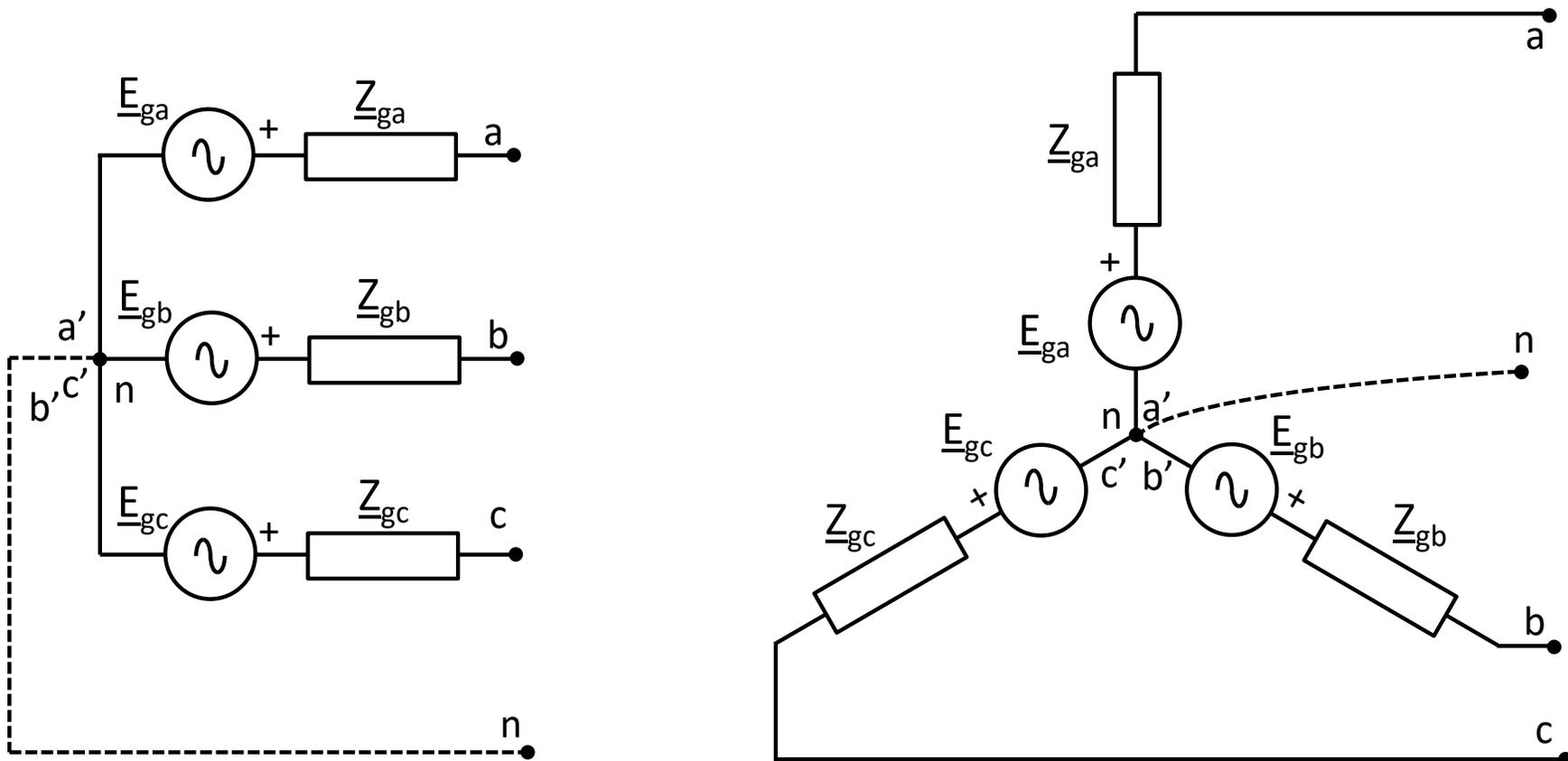
## ***8.3. Conexiones en estrella (Y) y en triángulo( $\Delta$ )***

## 8.3.1. Conexión en estrella



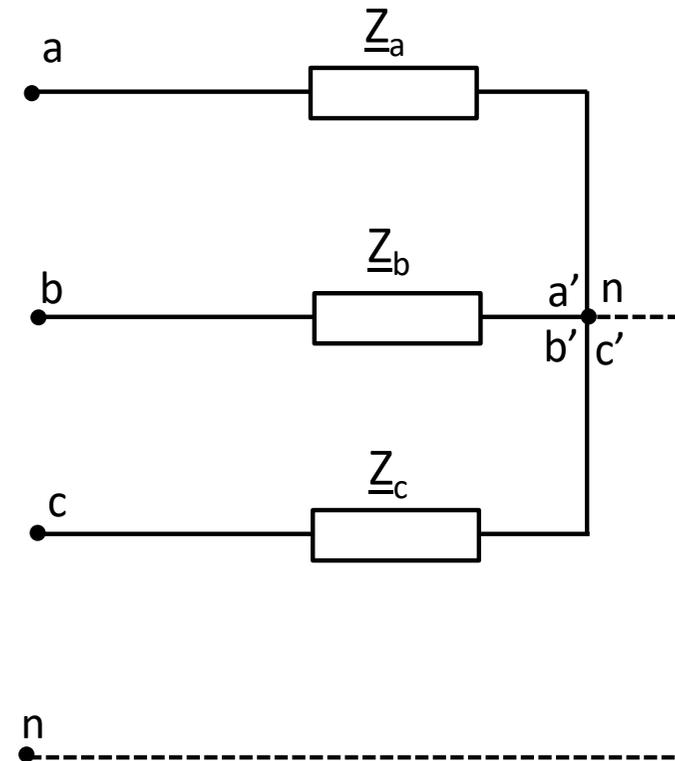
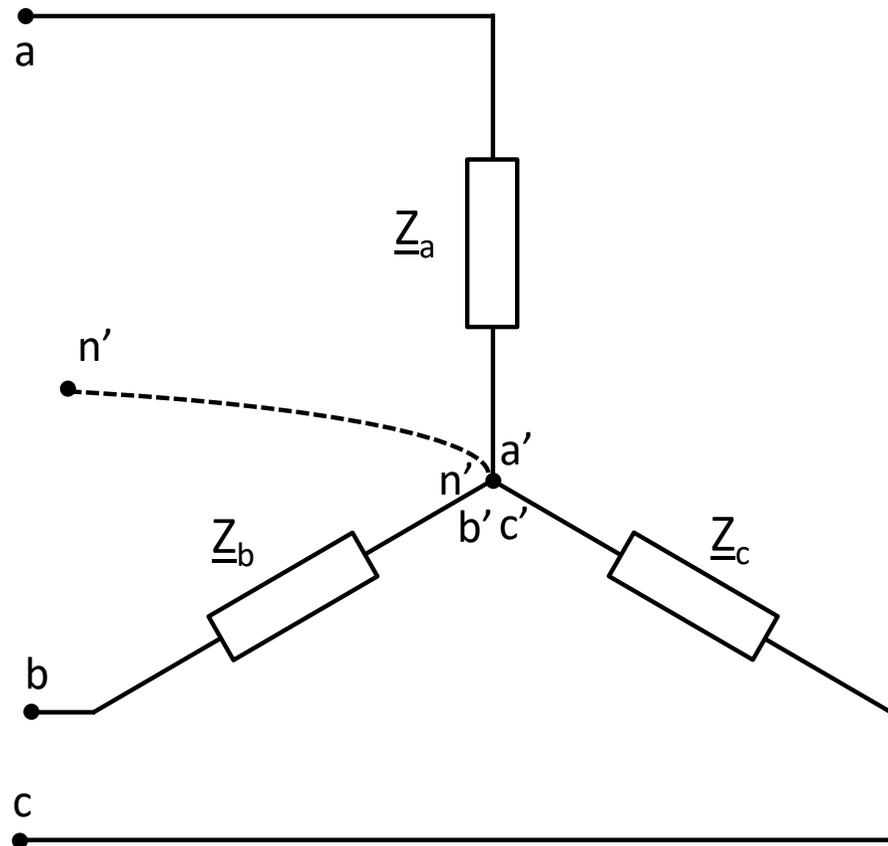
## 8.3.1. Conexión en estrella

- Se unen entre sí uno de los terminales de cada una de las fases (punto neutro de la estrella)



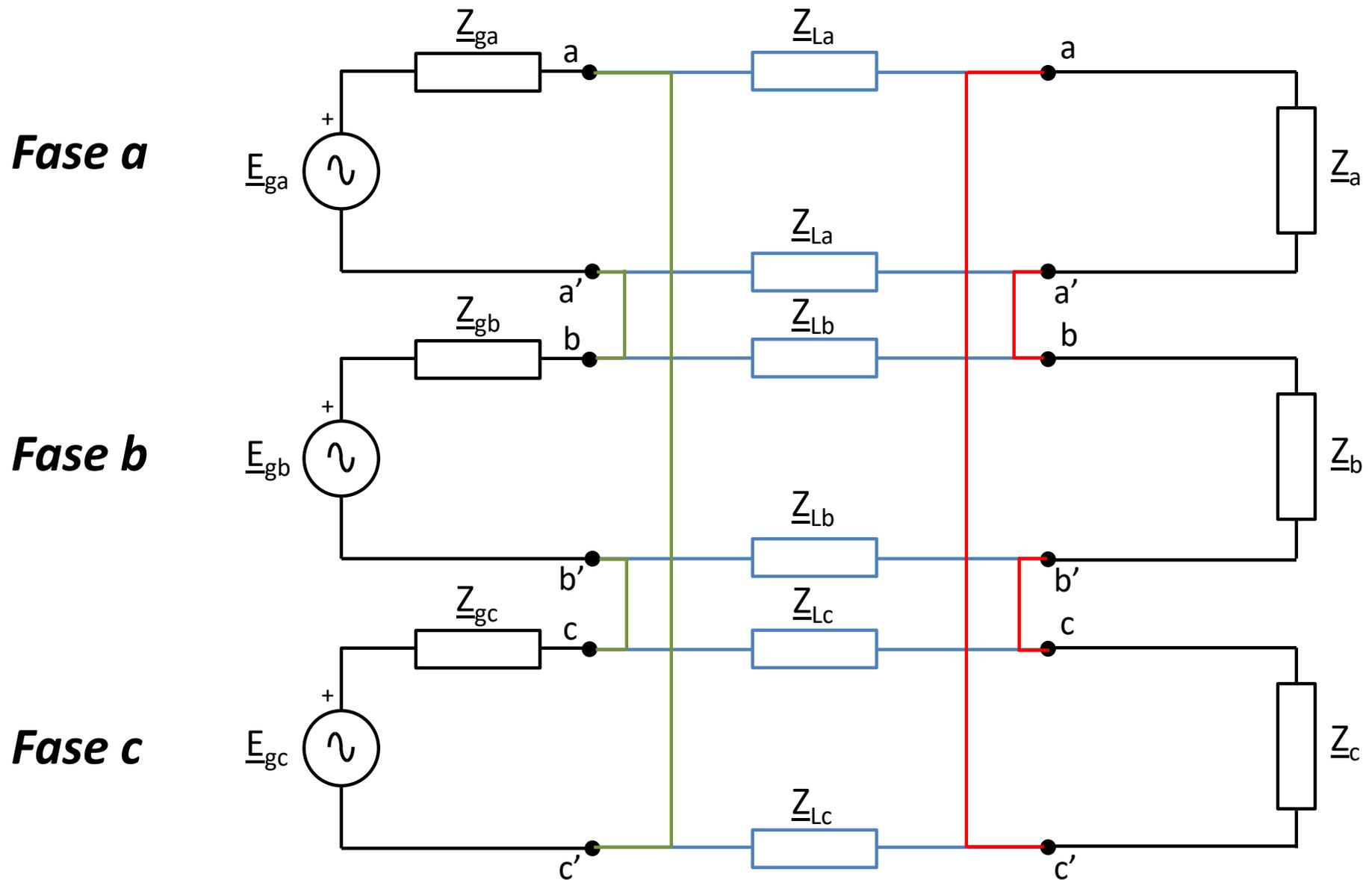
**Generador en estrella**

## 8.3.1. Conexión en estrella



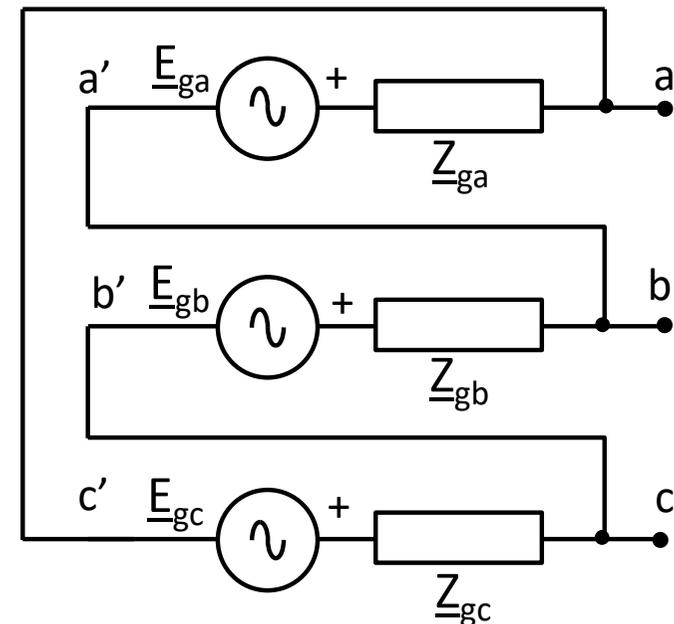
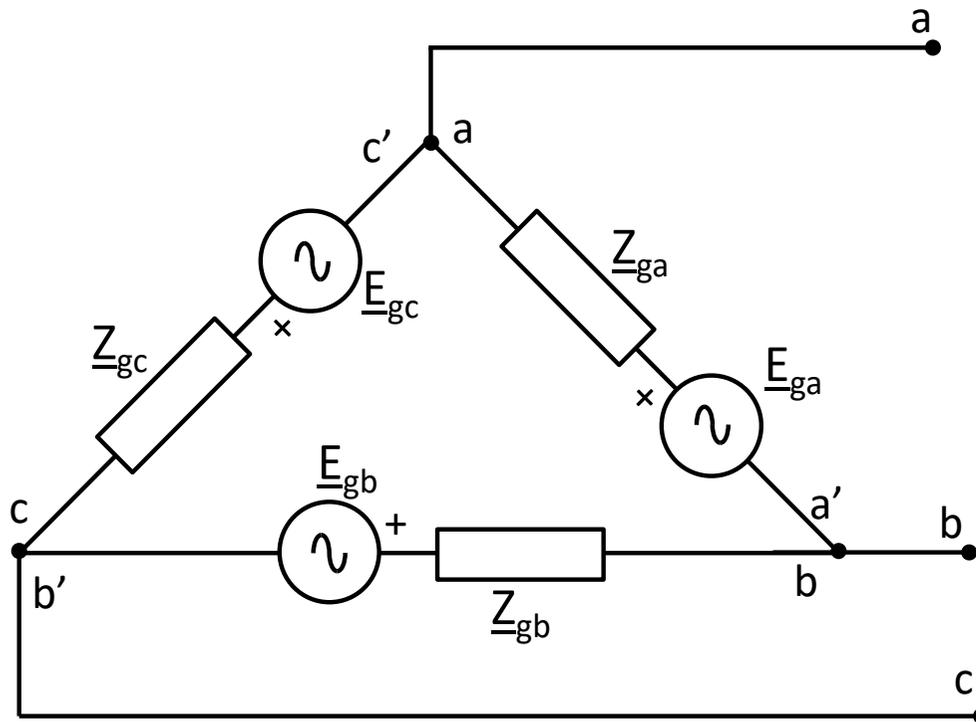
### Carga en estrella

## 8.3.2. Conexión en triángulo



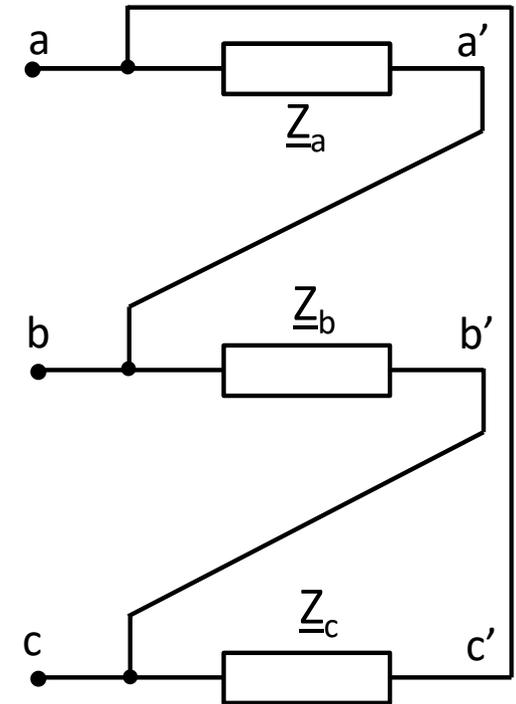
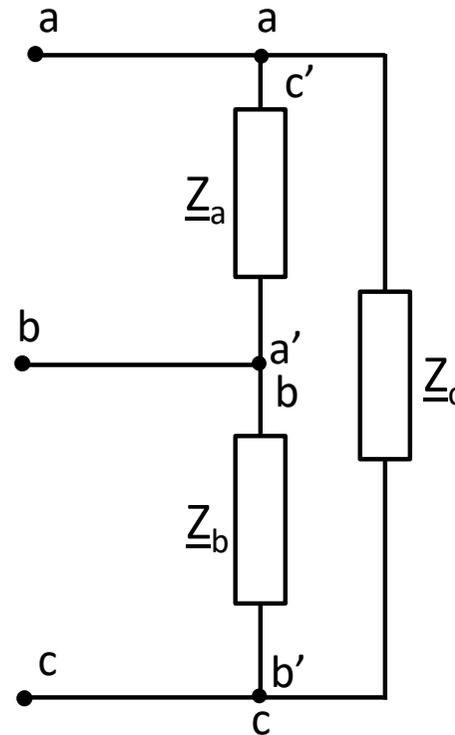
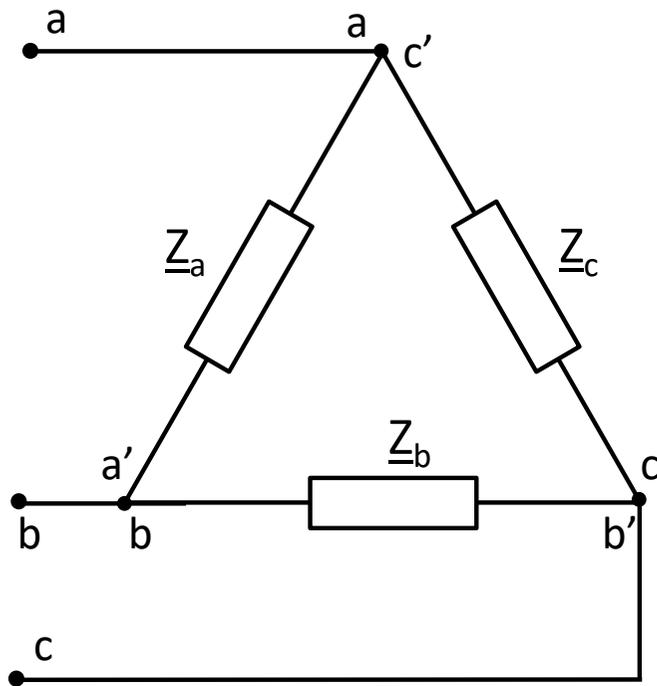
## 8.3.2. Conexión en triángulo

- Se unen el terminal “final” de una fase con el terminal “comienzo” de la siguiente:



**Generador en triángulo**

## 8.3.2. Conexión en triángulo



**Carga en triángulo**

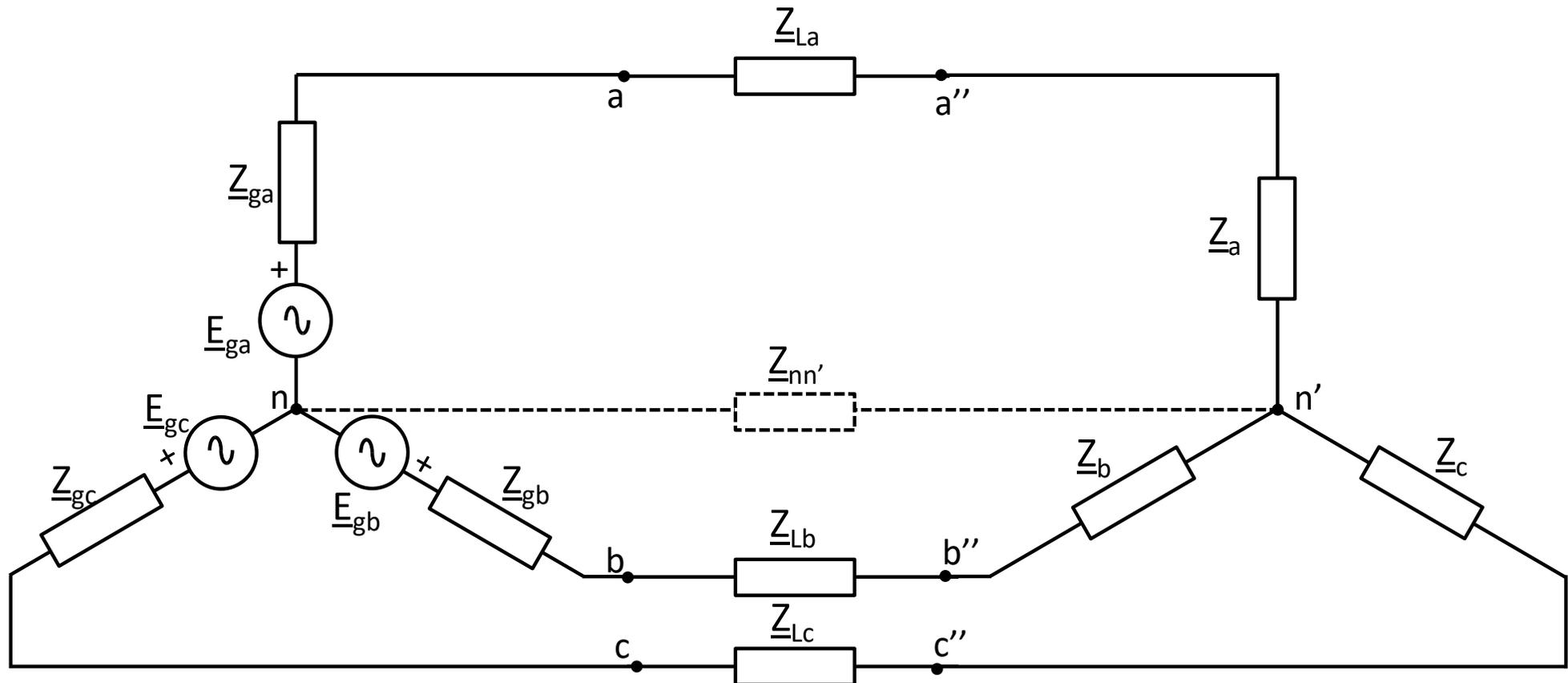
# ¿En Y ó en D?



## ***8.4. Conexión de sistemas trifásicos***

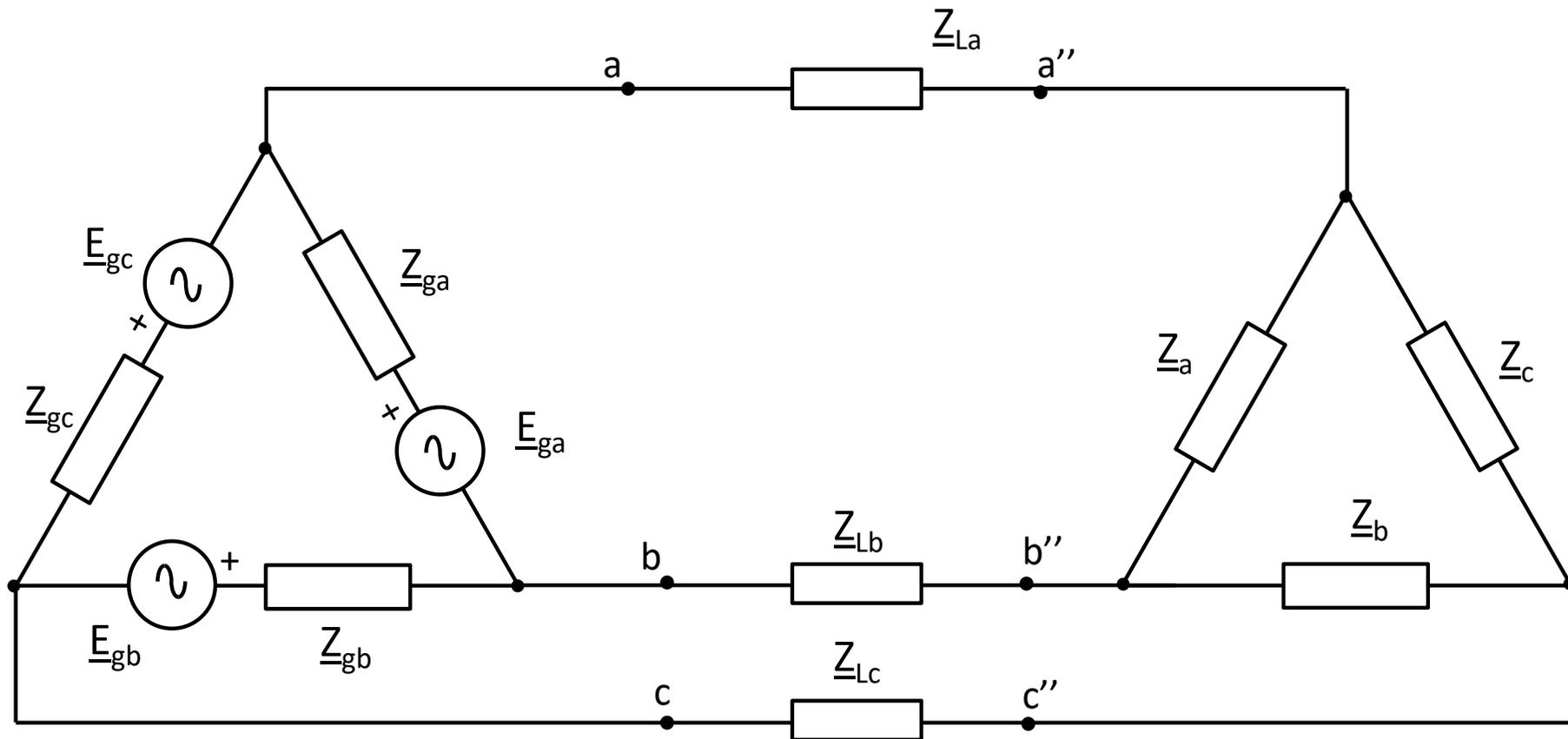
## 8.4.1. Sistema estrella - estrella

- *Sistema Y-Y*



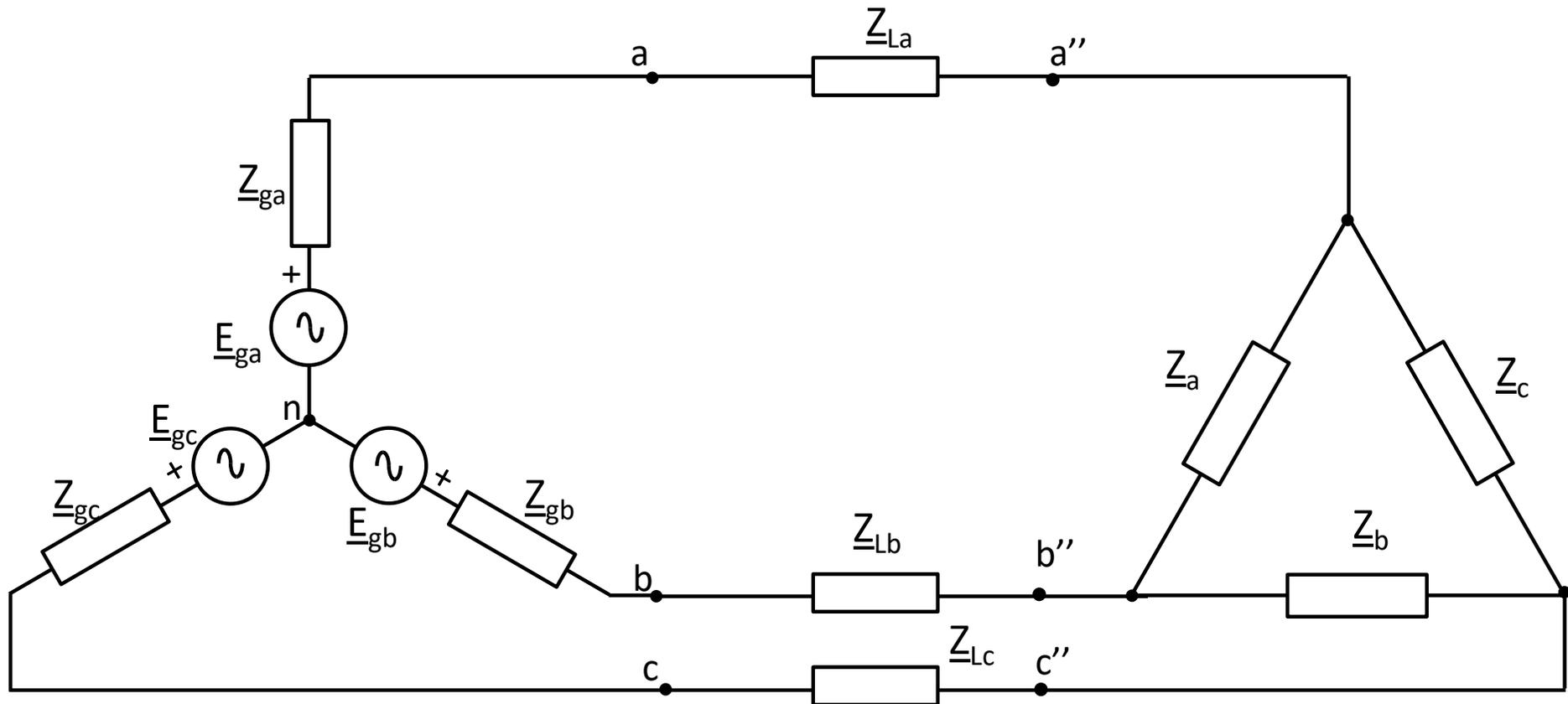
## 8.4.2. Sistema triángulo - triángulo

- Sistema  $\Delta$ - $\Delta$



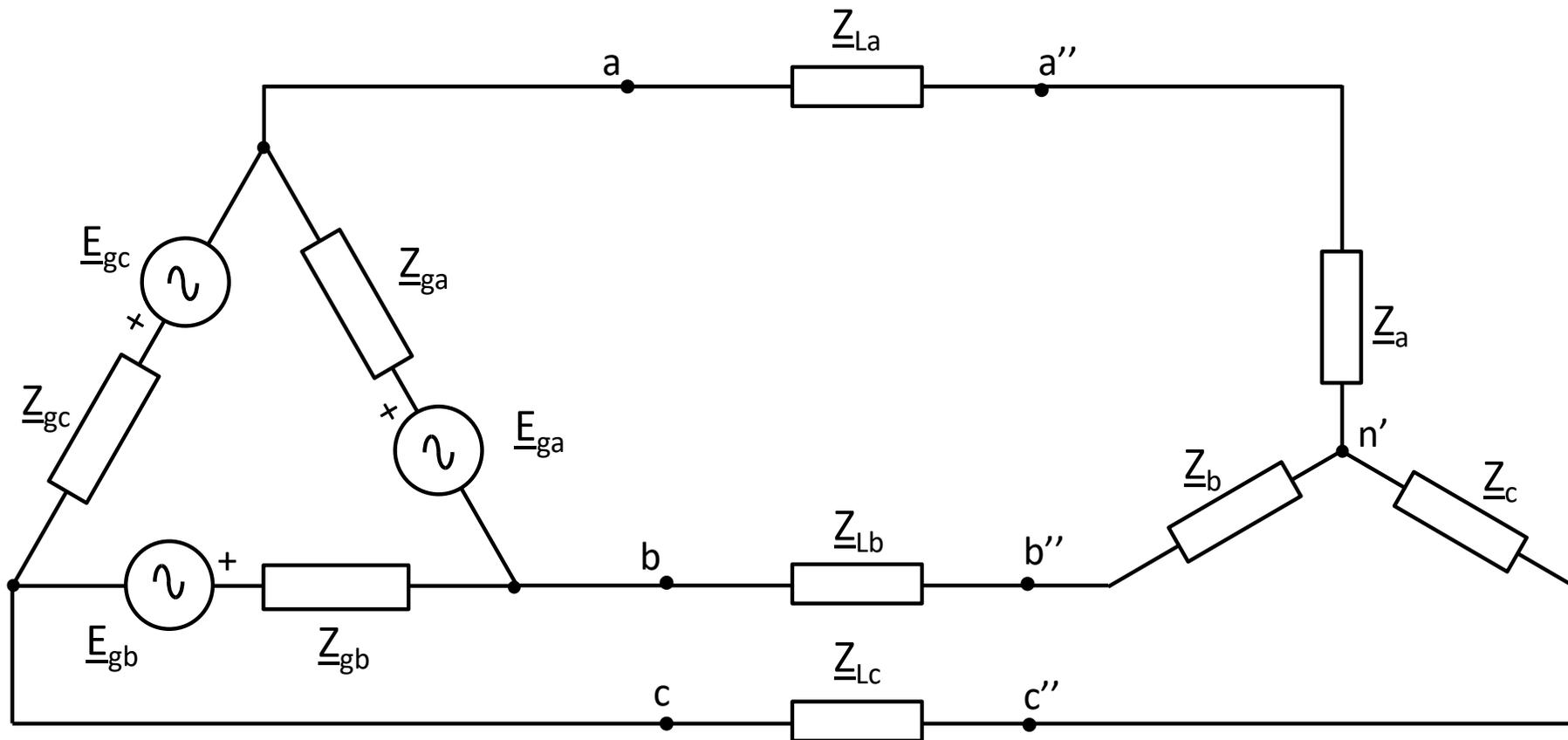
## 8.4.3. Sistema estrella - triángulo

- Sistema Y- $\Delta$



## 8.4.4. Sistema triángulo - estrella

- Sistema  $\Delta$ -Y





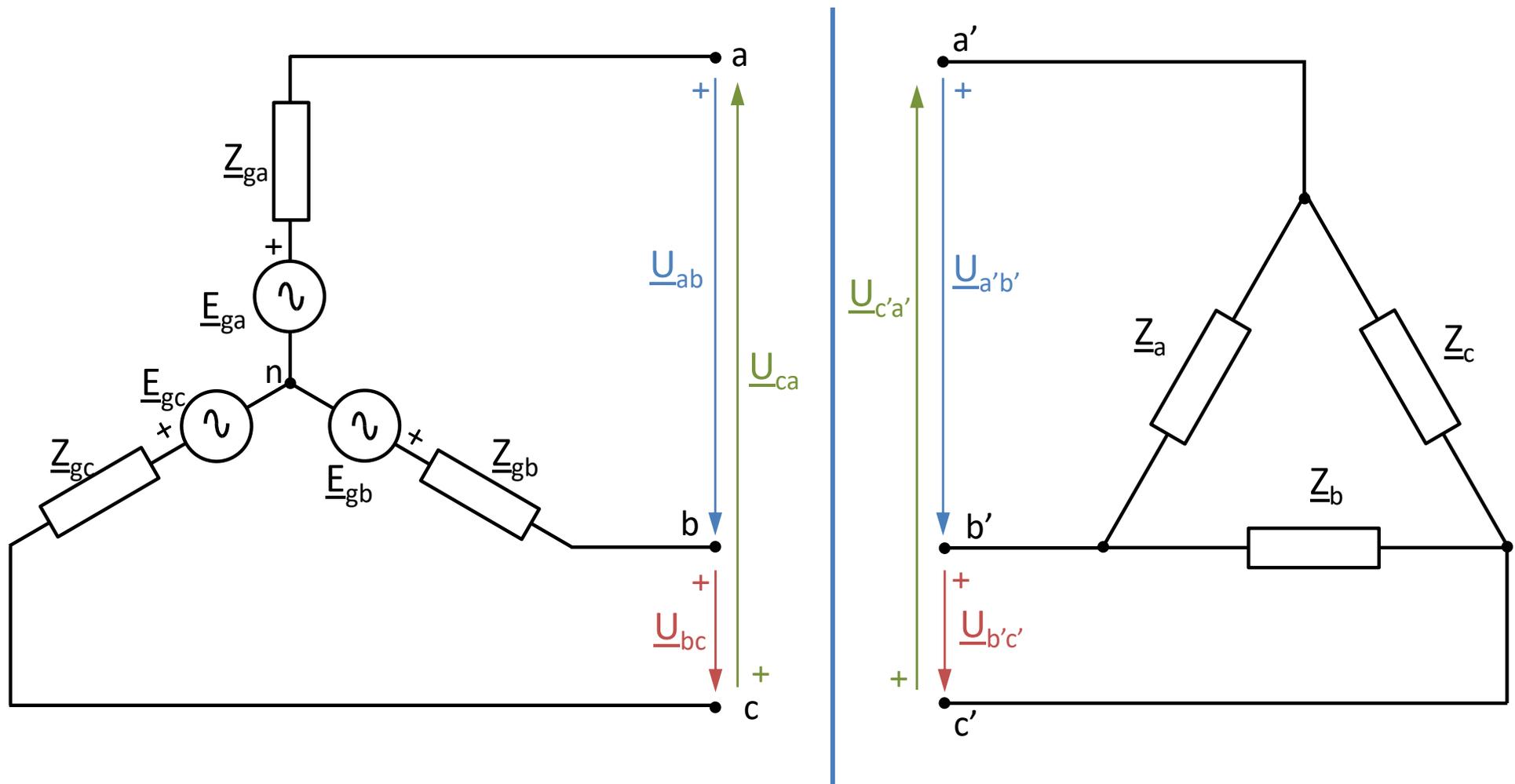


“Trenzado”

## ***8.5. Tensiones e intensidades en sistemas trifásicos***

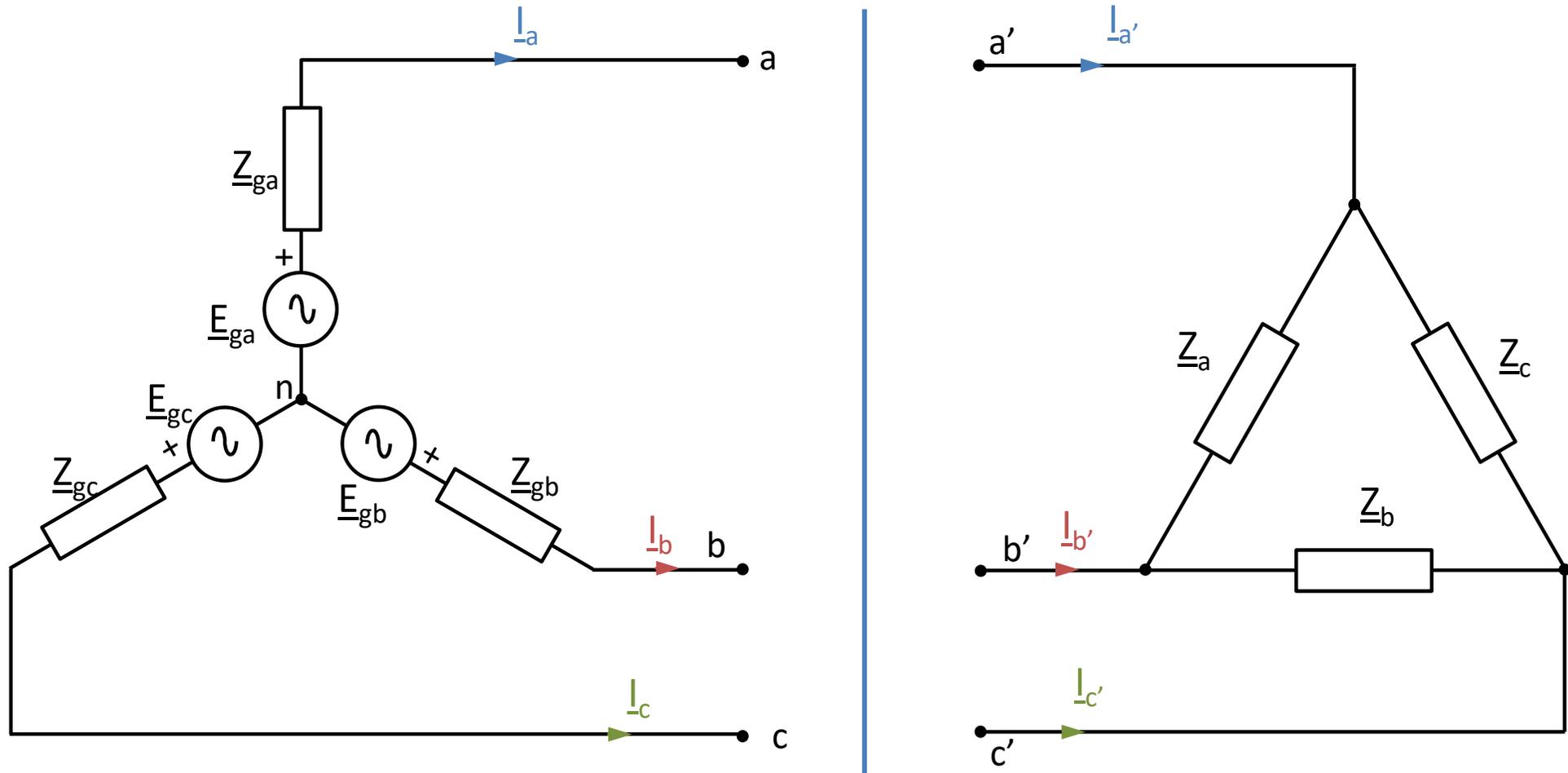
# 8.5.1. Tensión de línea o tensión compuesta

- Tensión entre dos conductores de línea.



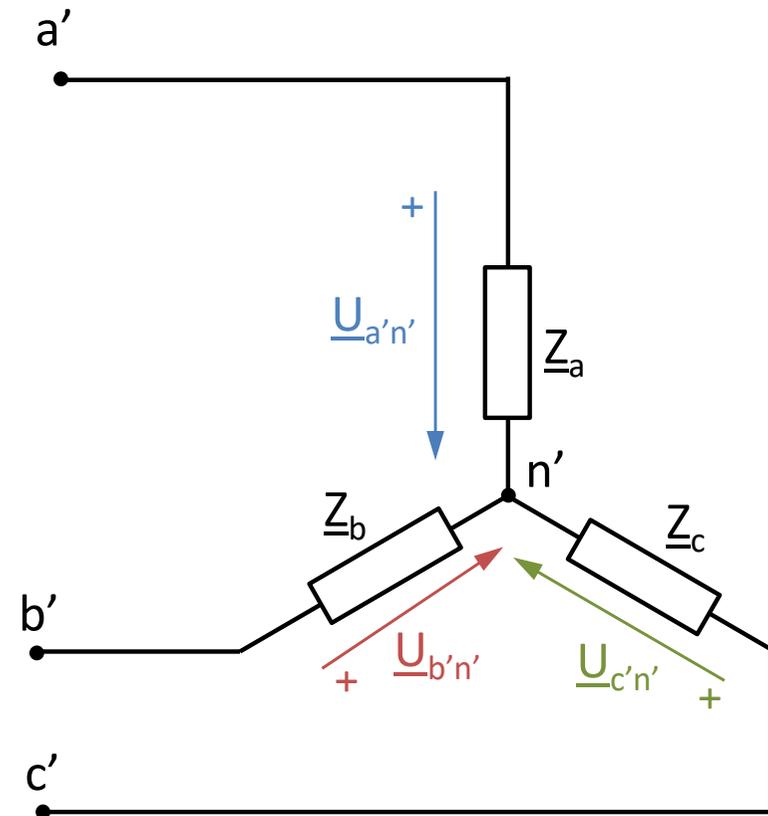
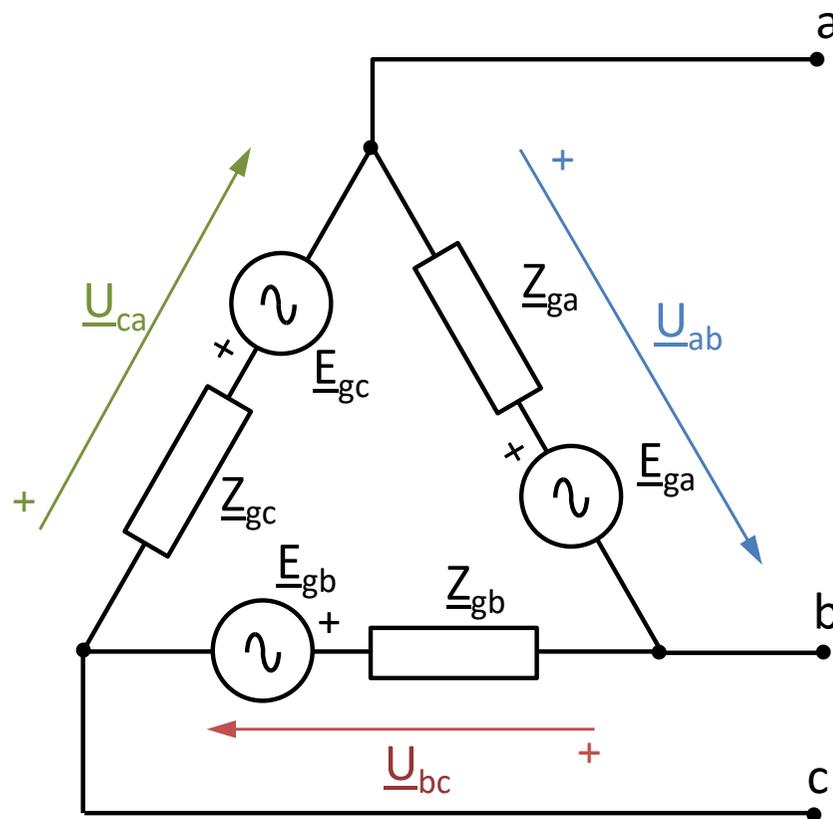
## 8.5.2. Intensidad de línea

- Intensidad que circula por cada uno de los conductores de la línea de conexión entre generación y carga.



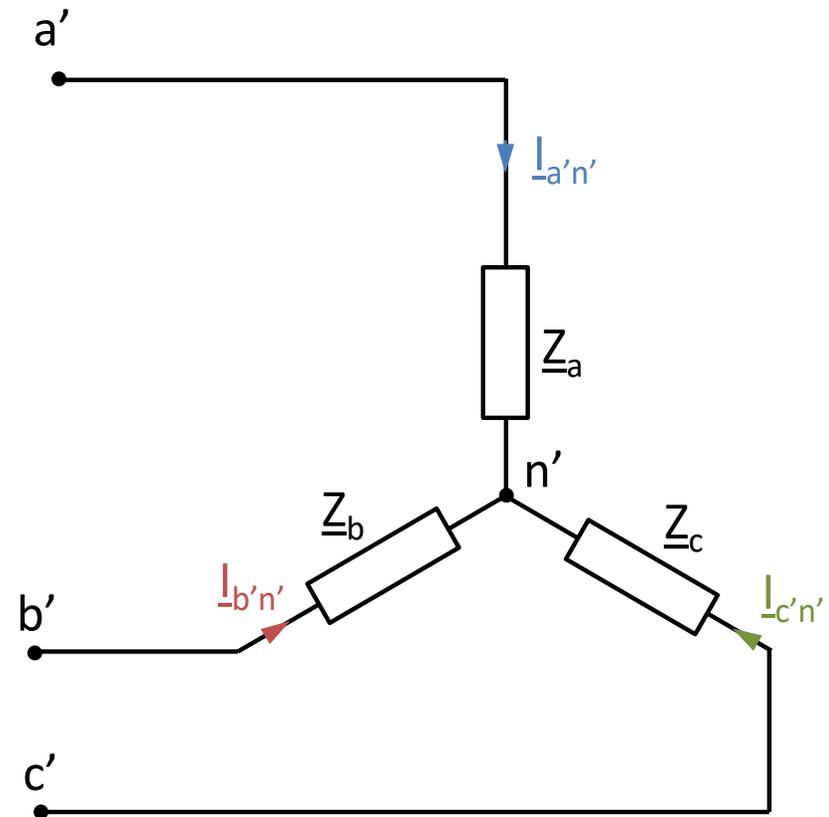
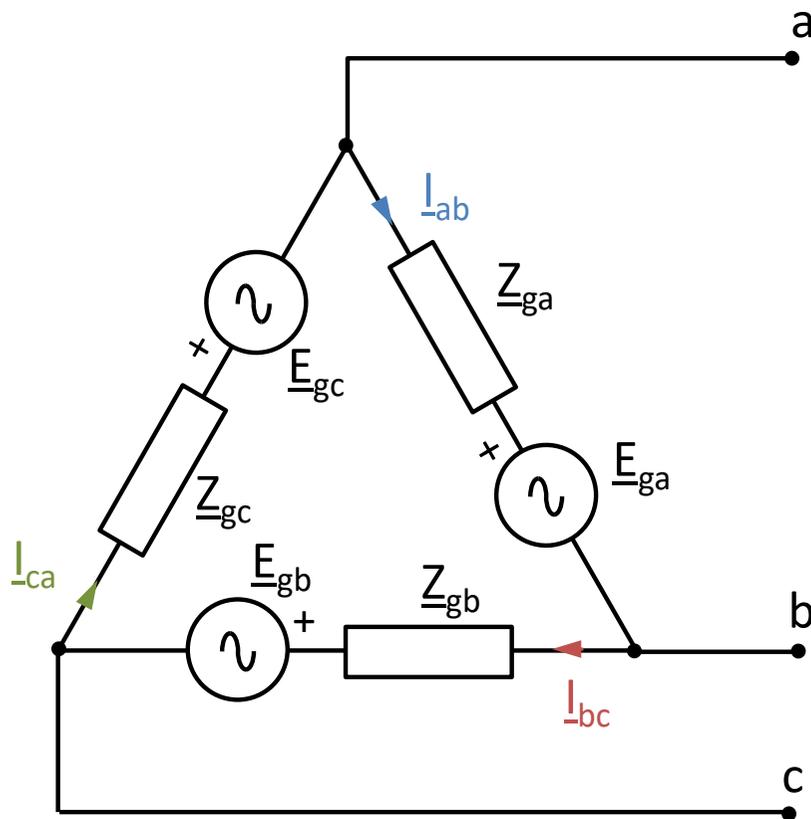
## 8.5.3. Tensión de fase o tensión simple

- Tensión en bornes de cada una de las fases, ya sea de la generación o de la carga

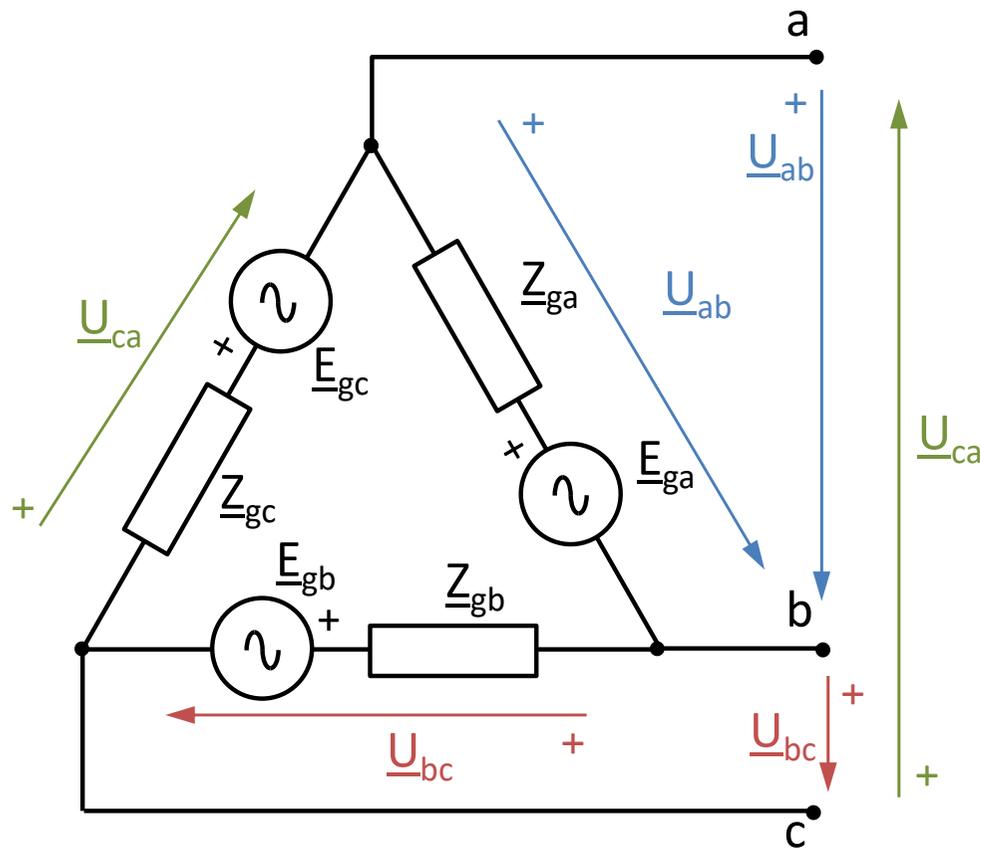


## 8.5.4. Intensidad de fase

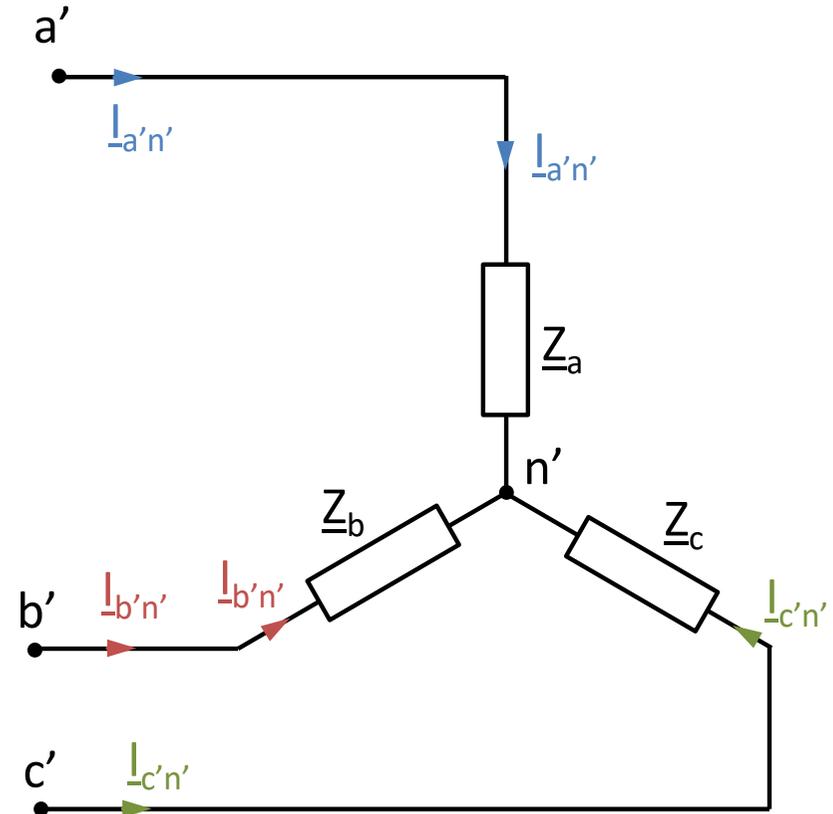
- Intensidad que circula por cada fuente de la generación o por cada impedancia de la carga.



## 8.5. Tensiones e intensidades



En una conexión en triángulo, las tensiones de línea coinciden con las tensiones de fase.



En una conexión en estrella, las intensidades de línea coinciden con las intensidades de fase.

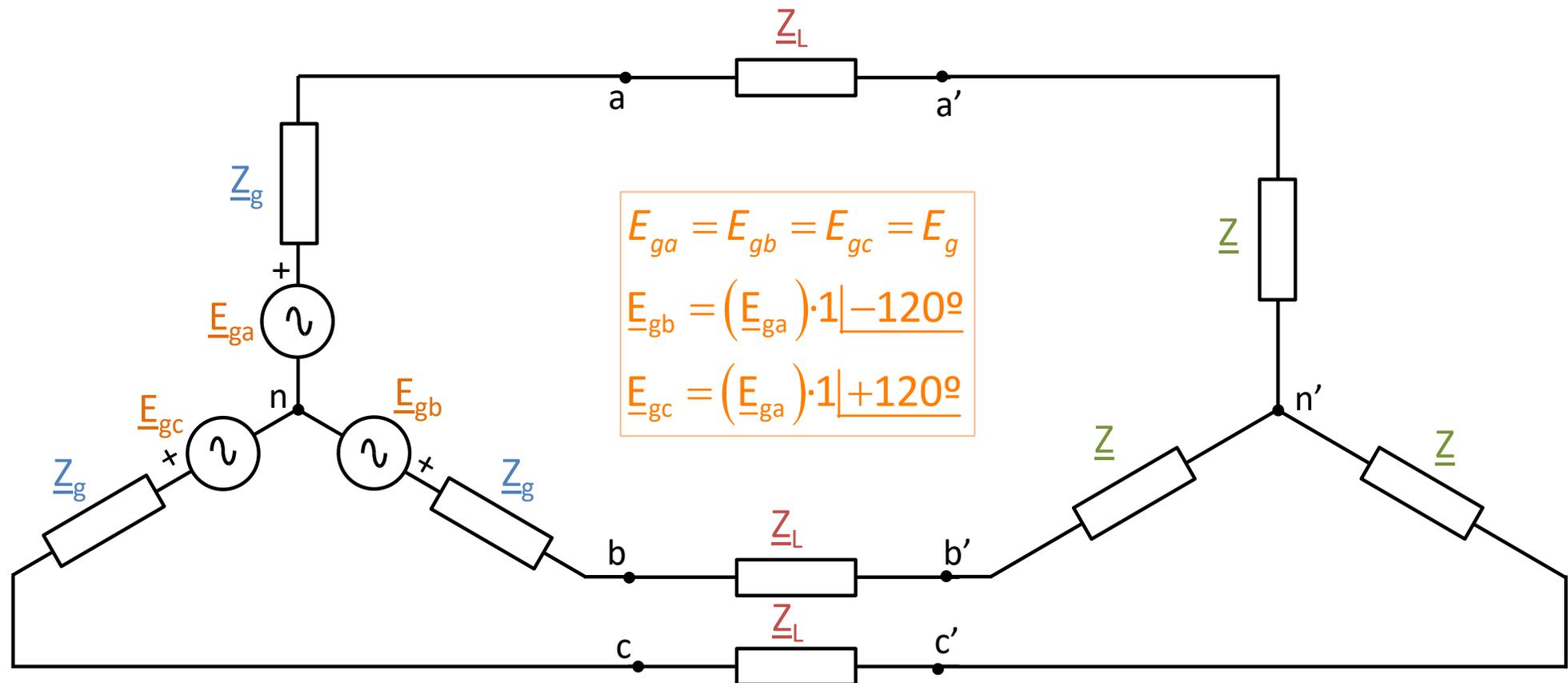
## ***8.6. Sistemas trifásicos equilibrados***

## 8.6. *Sistemas trifásicos equilibrados*

- *Sistema equilibrado: Cuando son iguales las impedancias en cada de las fases que componen las cargas, son iguales las impedancias internas de las fuentes que representan cada fase de la generación y son iguales las impedancias de las tres líneas que unen generación y carga, y las fuentes de tensión que representan la generación tienen el mismo valor eficaz y están defasadas  $120^\circ$ .*

# 8.6. Sistemas trifásicos equilibrados

Ejemplo de sistema equilibrado



# 8.6.1. Relación entre magnitudes de línea y de fase

- Relación entre tensiones de línea y tensiones de fase

Suponiendo sist. eq. **secuencia directa**:

$$\underline{U}_{an} = U_F \angle 0^\circ \leftarrow \text{origen de fases}$$

$$\underline{U}_{bn} = U_F \angle -120^\circ$$

$$\underline{U}_{cn} = U_F \angle +120^\circ$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{an} - \underline{U}_{bn}$$

Por LKT:  $\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{bn} - \underline{U}_{cn}$

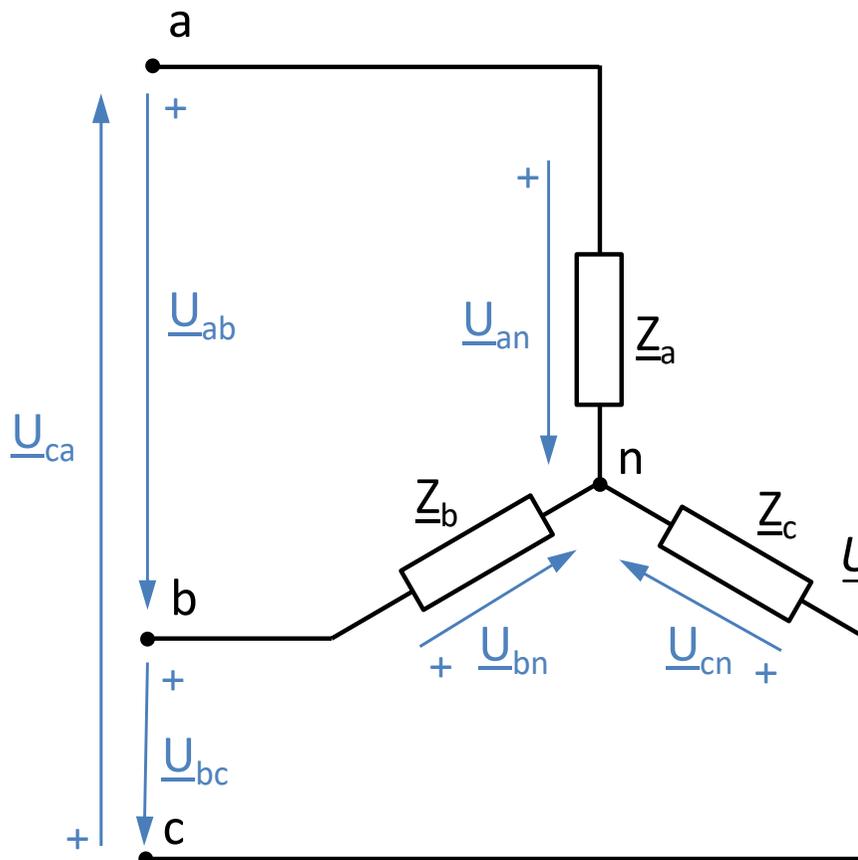
$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{cn} - \underline{U}_{an}$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{an} - \underline{U}_{bn} = U_F (1 \angle 0^\circ - 1 \angle -120^\circ) = \sqrt{3} \cdot U_F (1 \angle 30^\circ)$$

Esto es: Si  $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_L$

$$U_{ab} = U_L = \sqrt{3} \cdot U_F$$

Las tensiones de línea adelantan  $30^\circ$  a las tensiones de fase correspondientes

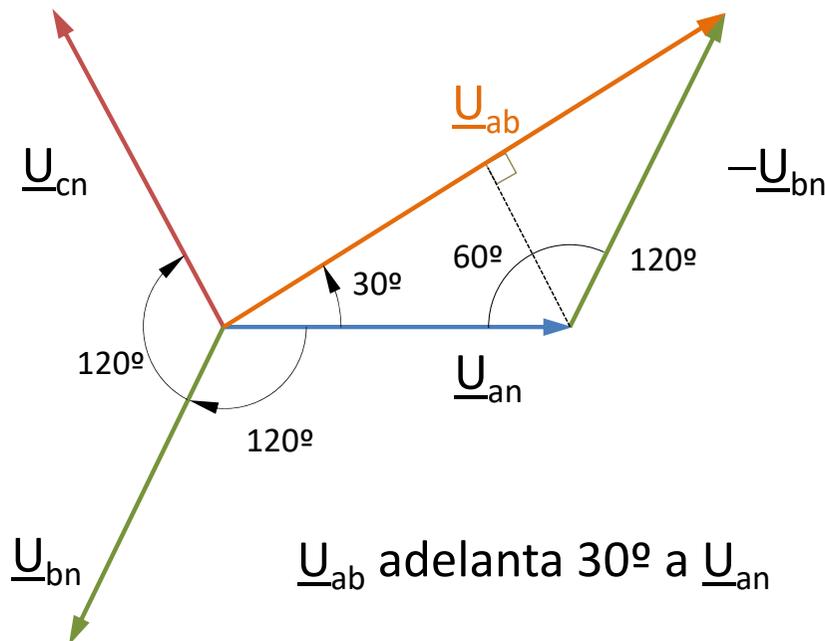


Secuencia directa

# 8.6.1. Relación entre magnitudes de línea y de fase

Secuencia directa:  $\underline{U}_{an}$ ,  $\underline{U}_{bn}$ ,  $\underline{U}_{cn}$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{an} - \underline{U}_{bn}$$



$\underline{U}_{ab}$  adelanta  $30^\circ$  a  $\underline{U}_{an}$

Comprobar que:

$\underline{U}_{bc}$  adelanta  $30^\circ$  a  $\underline{U}_{bn}$

$\underline{U}_{ca}$  adelanta  $30^\circ$  a  $\underline{U}_{cn}$

En triángulo, las tensiones de línea coinciden con las tensiones de fase

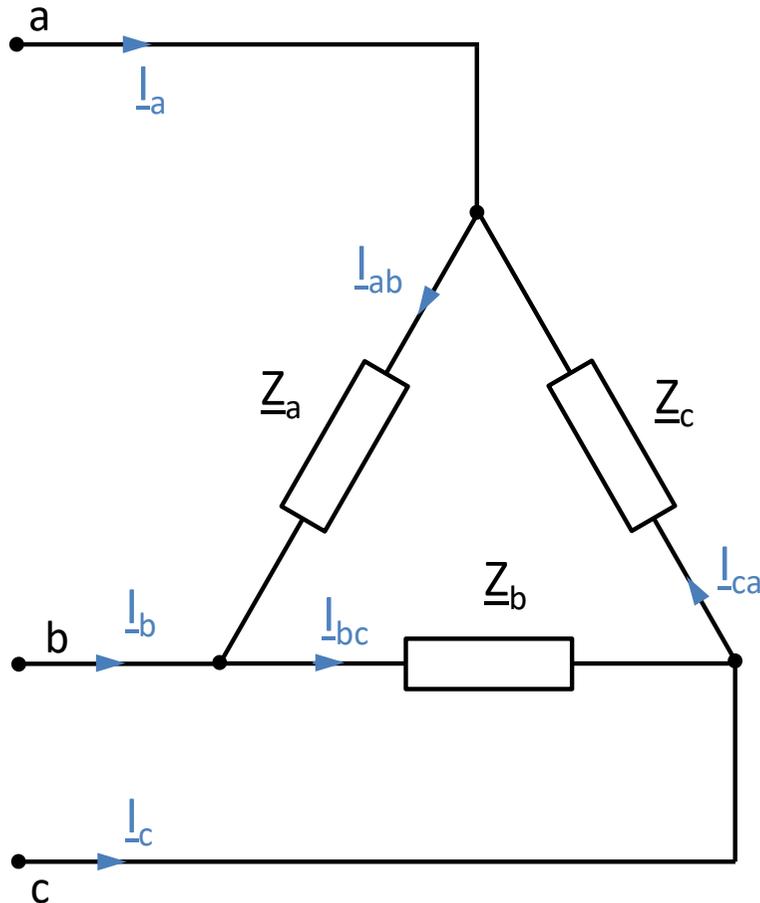
Comprobar que en sist. trifásicos equilibrados de **secuencia inversa**:

$$U_{ab} = U_L = \sqrt{3} \cdot U_F$$

Las tensiones de línea retrasan  $30^\circ$  respecto de las tensiones de fase correspondientes.

# 8.6.1. Relación entre magnitudes de línea y de fase

- Relación entre intensidades de línea e intens. de fase



Secuencia directa



Suponiendo sist. eq. **secuencia directa**:

$$\underline{I}_{ab} = I_F \underline{1|0^\circ} \leftarrow \text{origen de fases}$$

$$\underline{I}_{bc} = I_F \underline{1|-120^\circ}$$

$$\underline{I}_{ca} = I_F \underline{1|+120^\circ}$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$$

Por 1ª LK:  $\underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = I_F (1|0^\circ - 1|120^\circ) = \sqrt{3} \cdot I_F (1|-30^\circ)$$

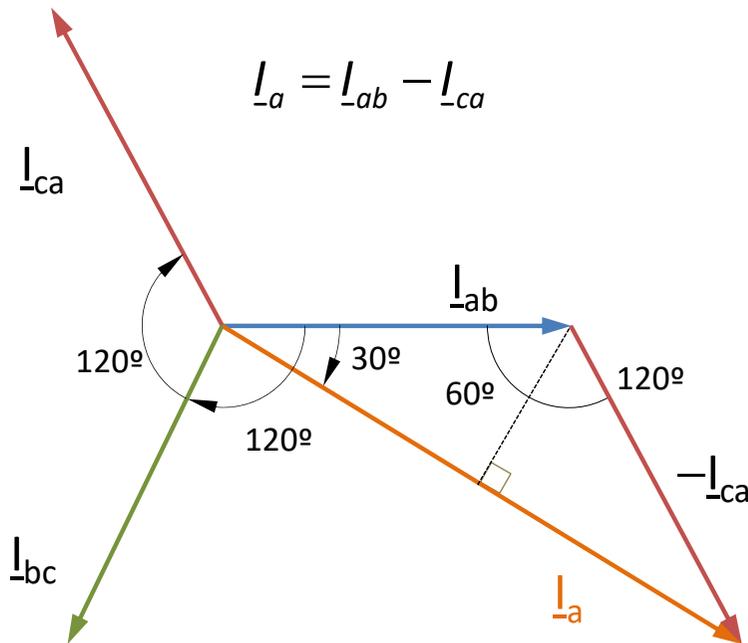
Esto es: Si  $I_a = I_b = I_c = I_L$

$$I_a = I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

Las intensidades de línea retrasan 30 ° a las intensidades de fase correspondientes

# 8.6.1. Relación entre magnitudes de línea y de fase

Secuencia directa:  $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$



$$I_a = I_{ab} - I_{ca}$$

$I_a$  retrasa  $30^\circ$  a  $I_{ab}$

Comprobar que:

$I_b$  retrasa  $30^\circ$  a  $I_{bc}$

$I_c$  adelanta  $30^\circ$  a  $I_{ca}$

En estrella, las intensidades de línea coinciden con las intensidades de fase

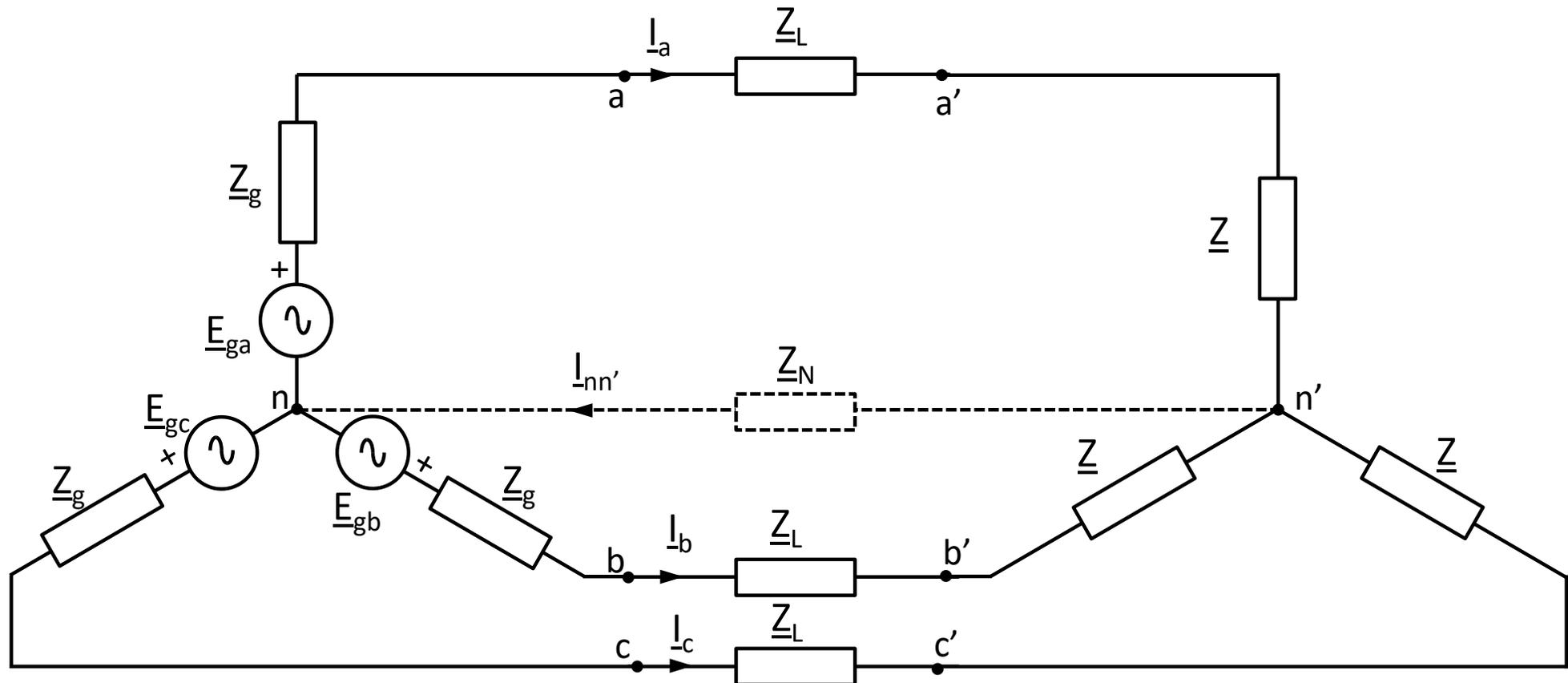
Comprobar que en sist. trifásicos equilibrados de **secuencia inversa**:

$$I_a = I_L = \sqrt{3} \cdot I_F$$

Las intensidades de línea adelantan  $30^\circ$  respecto de las intensidades de fase correspondientes.

## 8.6.2. Equivalentes monofásicos

- *Equivalente Y-Y*



## 8.6.2. Equivalentes monofásicos

$$\underline{E}_{ga} = \underline{Z}_g \cdot \underline{I}_{-a} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_{-a} + \underline{Z} \cdot \underline{I}_{-a} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'} = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}) \underline{I}_{-a} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'}$$

$$\underline{E}_{gb} = \underline{Z}_g \cdot \underline{I}_{-b} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_{-b} + \underline{Z} \cdot \underline{I}_{-b} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'} = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}) \underline{I}_{-b} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'}$$

$$\underline{E}_{gc} = \underline{Z}_g \cdot \underline{I}_{-c} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_{-c} + \underline{Z} \cdot \underline{I}_{-c} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'} = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}) \underline{I}_{-c} + \underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'}$$

---


$$\underline{E}_{ga} + \underline{E}_{gb} + \underline{E}_{gc} = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z})(\underline{I}_{-a} + \underline{I}_{-b} + \underline{I}_{-c}) + 3\underline{Z}_N \underline{I}_{-nn'} \quad \text{Sumando}$$

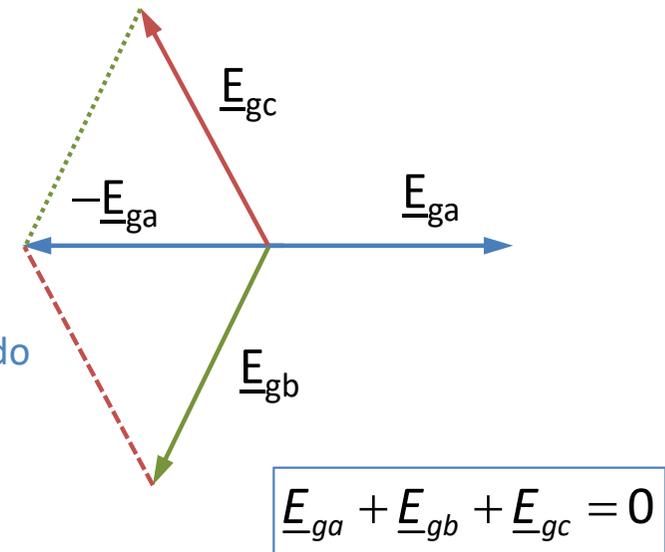
$$= 0$$

Como:  $\underline{I}_{-nn'} = (\underline{I}_{-a} + \underline{I}_{-b} + \underline{I}_{-c})$

$$(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z} + 3\underline{Z}_N)(\underline{I}_{-a} + \underline{I}_{-b} + \underline{I}_{-c}) = 0 \Rightarrow (\underline{I}_{-a} + \underline{I}_{-b} + \underline{I}_{-c}) = 0 \Rightarrow \underline{I}_{-nn'} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{-nn'} = 0$$

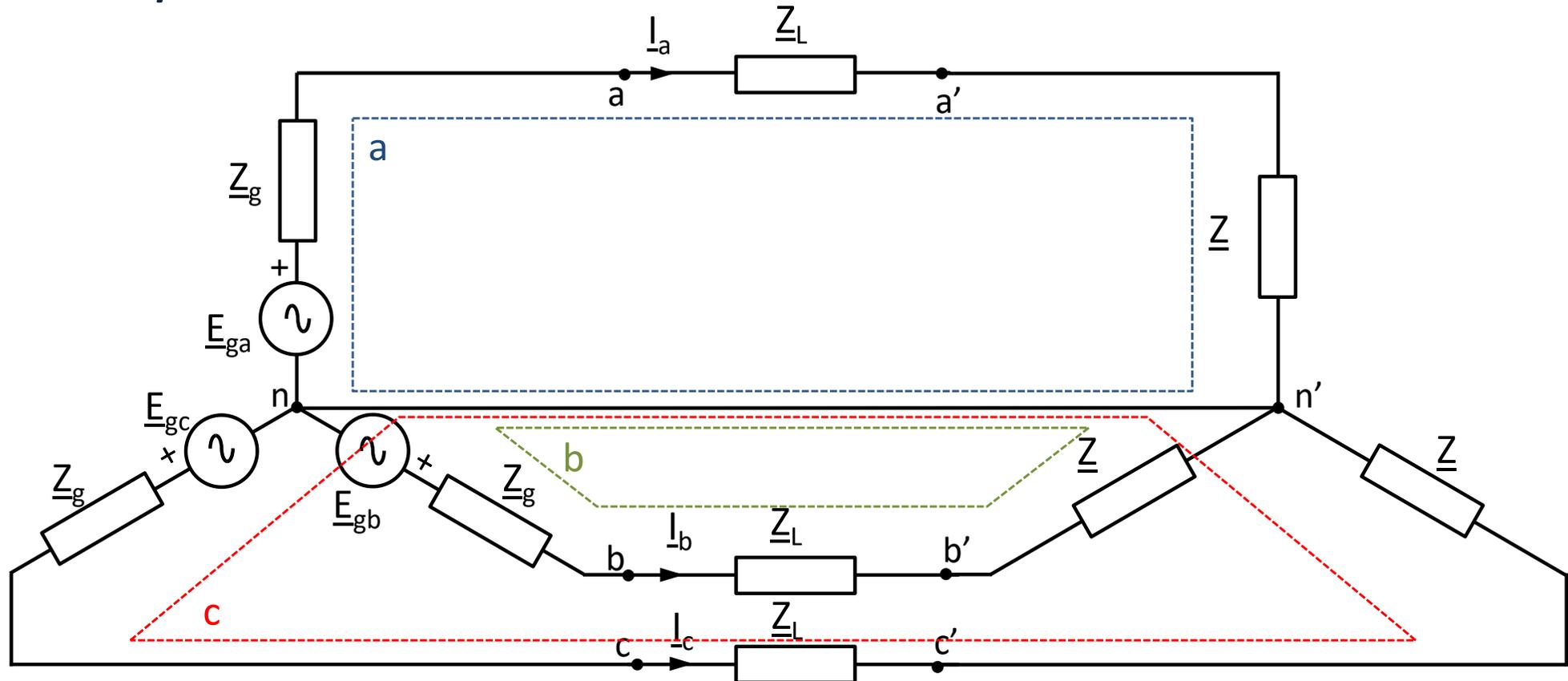
Esto es: En un sistema trifásico equilibrado Y-Y, los neutros de las estrellas siempre están a la misma tensión.

Si esto es así, podemos unir dichos neutros mediante un cortocircuito, tal y como se ve en el esquema siguiente:



## 8.6.2. Equivalentes monofásicos

- *Equivalente Y-Y*



Aplicando la 2ª LK a las trayectorias indicadas en la figura, se tiene que:

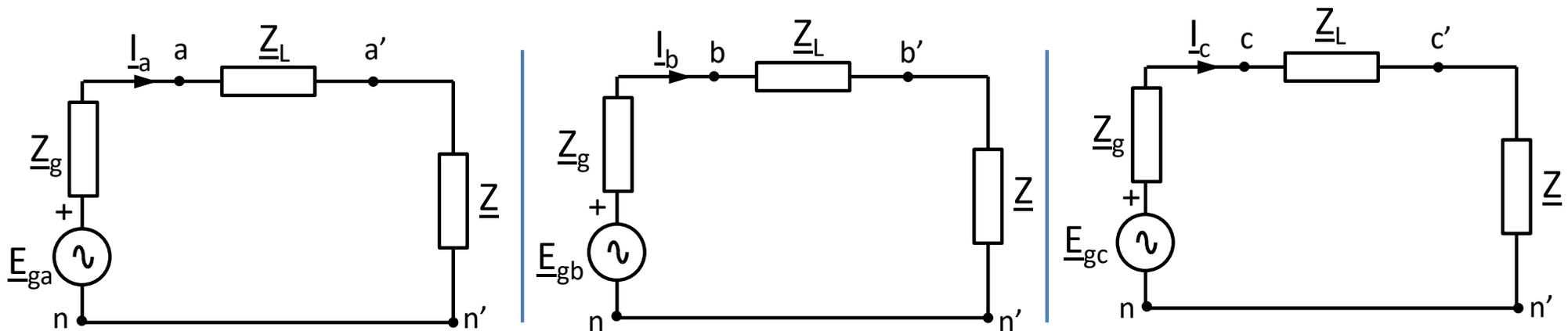
## 8.6.2. Equivalentes monofásicos

$$\text{a) } \underline{I}_a = \frac{\underline{E}_{ga}}{(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z})}$$

$$\text{b) } \underline{I}_b = \frac{\underline{E}_{gb}}{(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z})}$$

$$\text{c) } \underline{I}_c = \frac{\underline{E}_{gc}}{(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z})}$$

Intensidades que también se obtienen si se analizan los tres circuitos monofásicos:

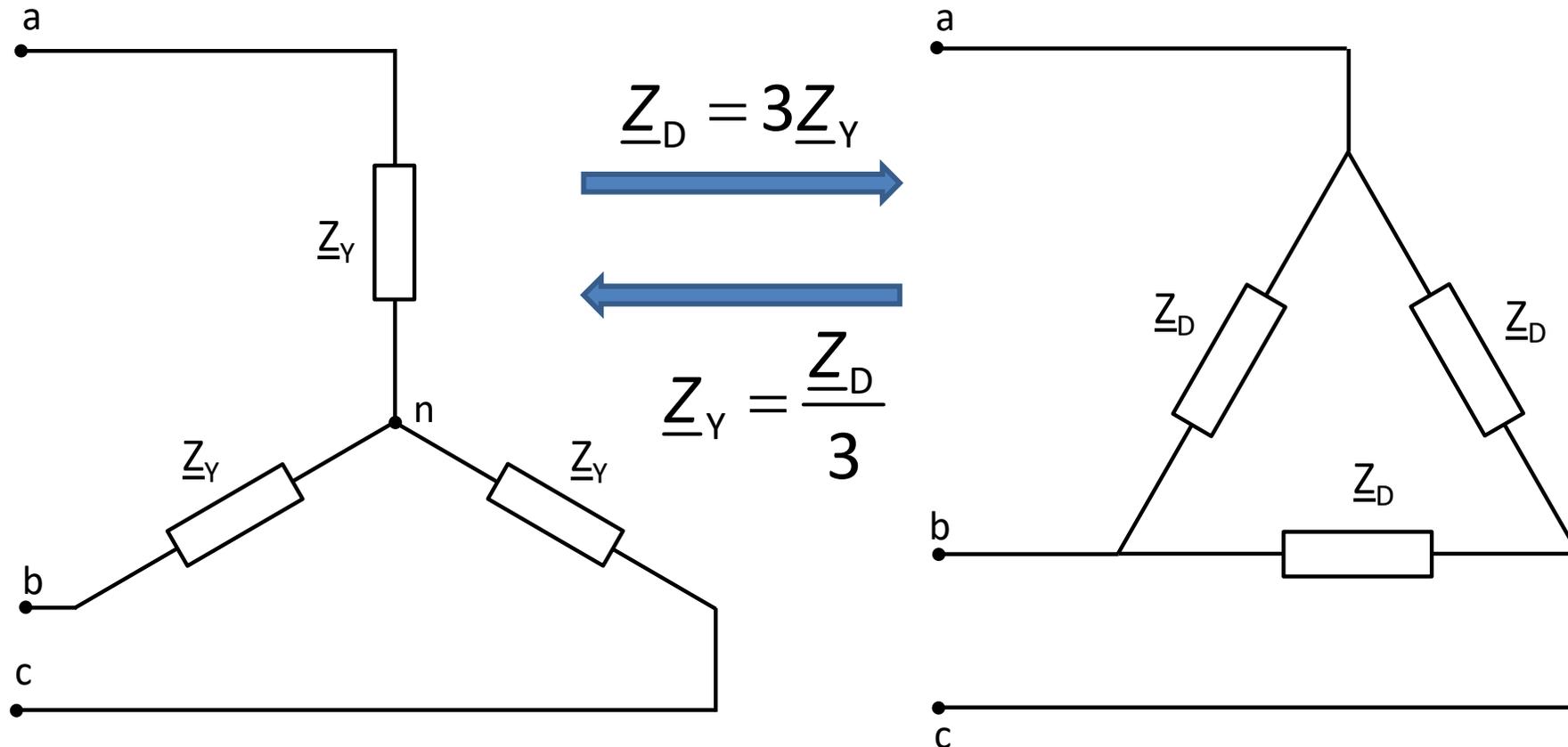


### Equivalentes monofásicos de un sistema Y-Y

Basta con analizar uno los equivalentes para obtener las tensiones e intensidades para el resto de las fases. Sólo habrá que tener en cuenta que estas tensiones e intensidades serán fasores desfasados  $120^\circ$  respecto de las calculadas sobre el equivalente elegido.

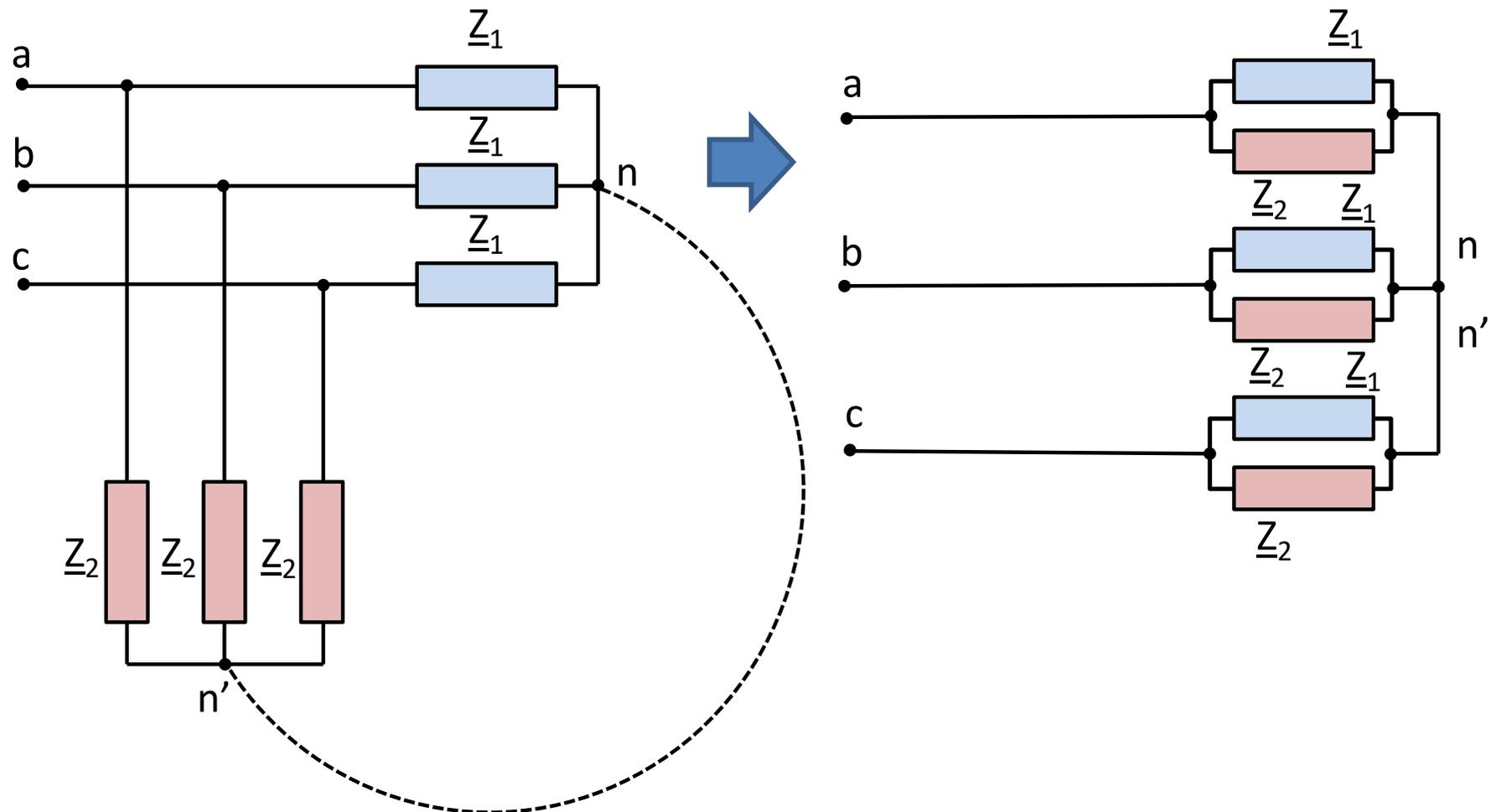
## 8.6.3. Equivalencia de cargas

- *Equivalencia estrella-triángulo*



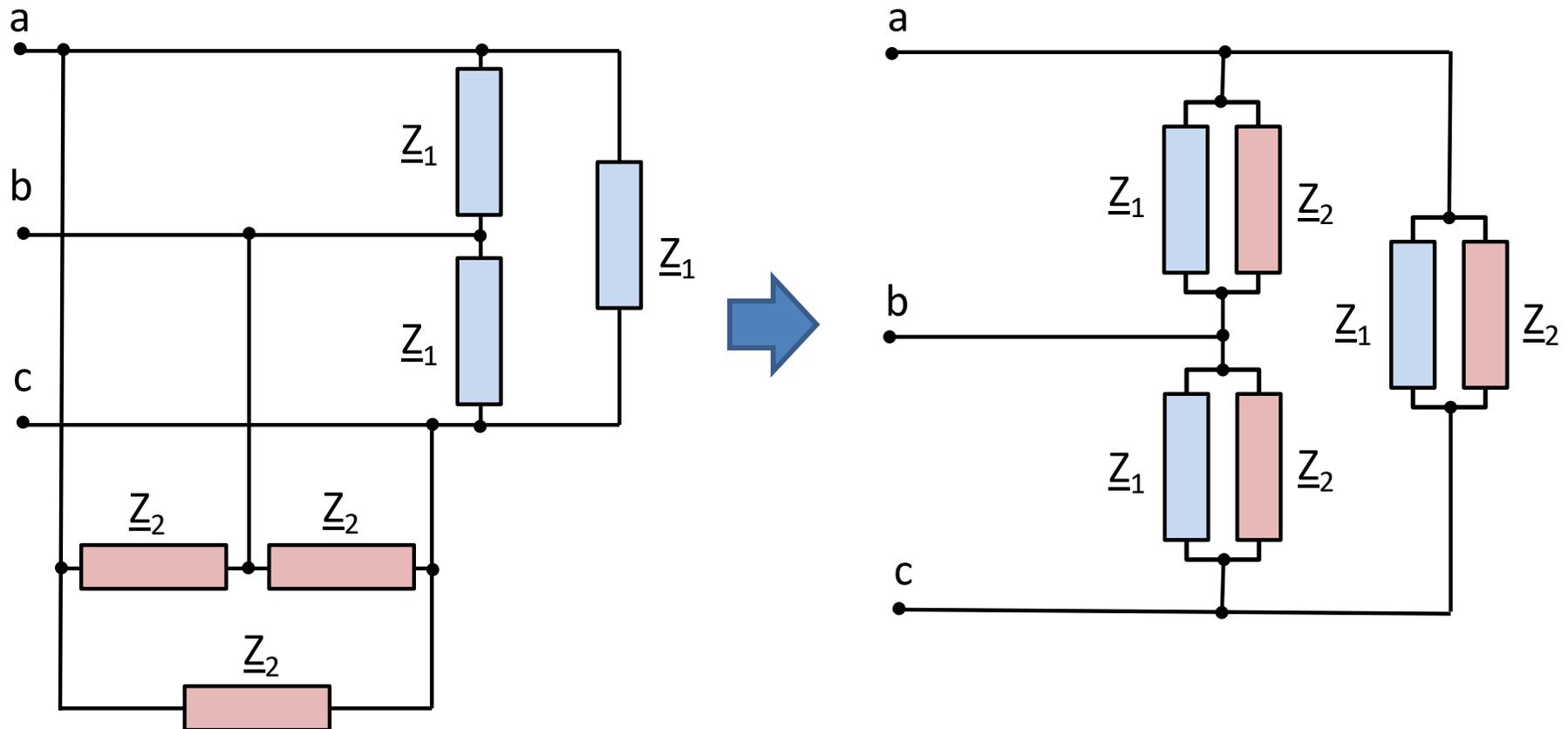
## 8.6.3. Equivalencia de cargas

- Cargas en estrella en paralelo*



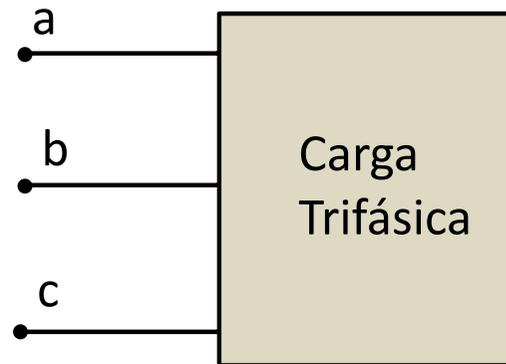
## 8.6.3. Equivalencia de cargas

- *Cargas en triángulo en paralelo*



## 8.6.4. Potencia en sistemas trifásicos equilibrados

- *Sea un sistema trifásico equilibrado:*



- La potencia activa absorbida por una fase vale:

$$P_F = U_F \cdot I_F \cos \varphi$$

- Como el sistema es equilibrado, la potencia absorbida por las 3 fases vale:

$$P_T = 3P_F = 3U_F \cdot I_F \cos \varphi$$

## 8.6.4. Potencia en sistemas trifásicos equilibrados

- Dado que en una carga conectada en estrella se cumple:

$$U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

$$I_L = I_F$$

- Y si la carga está conectada en triángulo se cumple:

$$U_F = U_L$$

$$I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

- Entonces, en ambos casos:

$$U_F \cdot I_F = \frac{1}{\sqrt{3}} U_L \cdot I_L$$

## 8.6.4. Potencia en sistemas trifásicos equilibrados

– Y entonces se tiene:

$$P_T = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi$$

$$Q_T = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi$$

– *En los sistemas trifásicos, si se habla de tensión o intensidad y no se indica nada más, se hace referencia, de forma implícita, a magnitudes de línea.* Entonces:

$$P_T = \sqrt{3} U I \cos \varphi$$

$$Q_T = \sqrt{3} U I \sin \varphi$$

– Atención: U e I son magnitudes de línea, pero:

$$\varphi = \widehat{U_F, I_F}$$

## 8.6.4. Potencia en sistemas trifásicos equilibrados

- Dado que la potencia compleja vale:

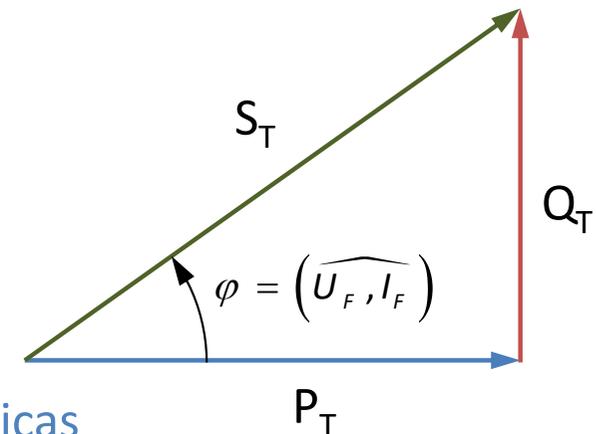
$$\underline{S}_T = P_T + jQ_T$$

- Entonces:

$$\underline{S}_T = P_T + jQ_T = \sqrt{3} UI (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi)$$

- Por lo que la potencia aparente trifásica vale:

$$S_T = \sqrt{3} UI$$



Triángulo de potencias trifásicas

# Referencias

- PARRA, V. M.; ORTEGA, J.; PASTOR, A.; PEREZ, A.: **“Teoría de Circuitos (Tomo I)”**. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).
- BAYOD, A.A.; BERNAL, J.L.; DOMINGUEZ, J.A.; GARCIA GARCIA, M.A.; LLOMBART, A.; YUSTA, J.M.: **“Análisis de circuitos eléctricos I”**. Colección Textos Docentes, vol. 58. Pressas Universitarias de Zaragoza.
- SALLÁN, J.: **“Sistemas trifásicos”**. Dpto. Ingeniería Eléctrica. Universidad de Zaragoza.
- BAYOD, A.A.: **“Análisis de circuitos trifásicos en régimen estacionario senoidal”**. Colección Textos Docentes, vol. 108. Pressas Universitarias de Zaragoza.