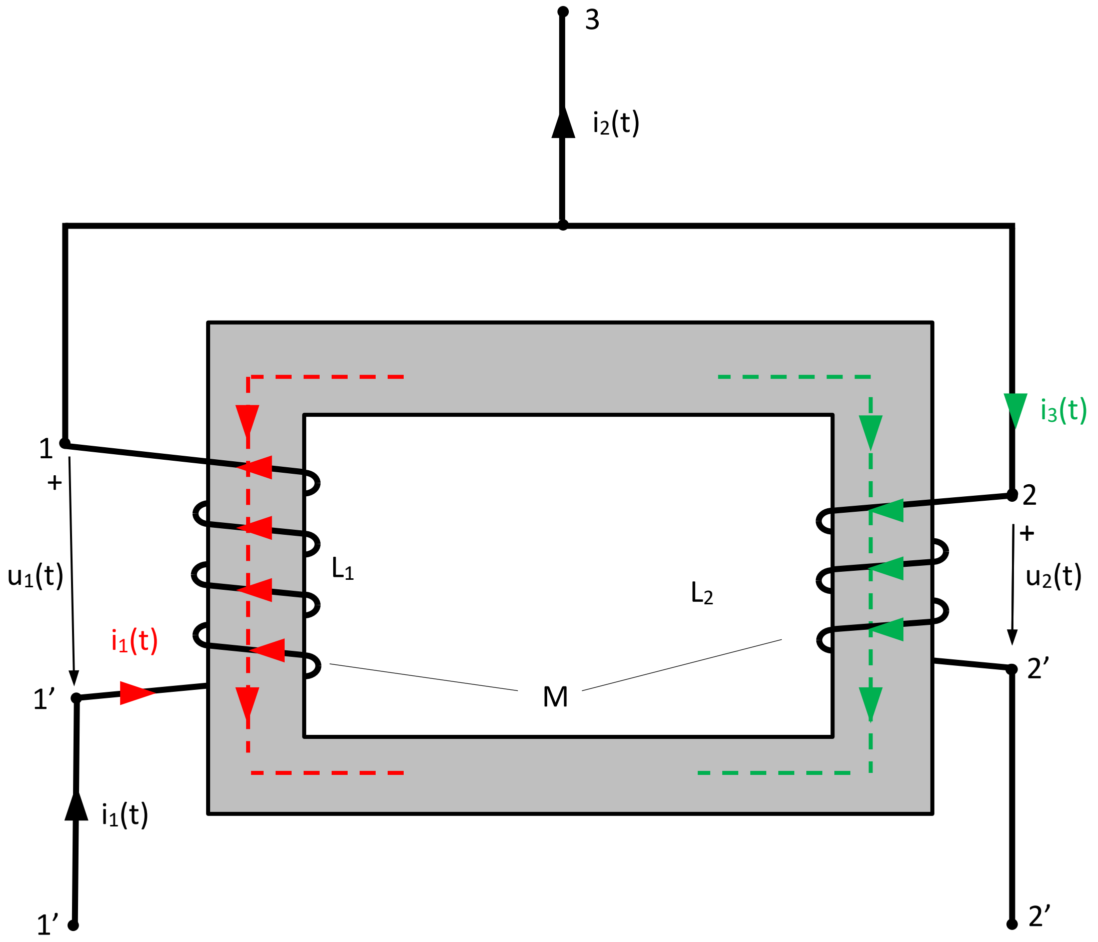
Prueba 1. Curso 2021/22

SOLUCIÓN:

Cuestión 1: Las bobinas acopladas magnéticamente, de parámetros L_1, L_2 y M, se conectan tal y como se muestra en la figura.

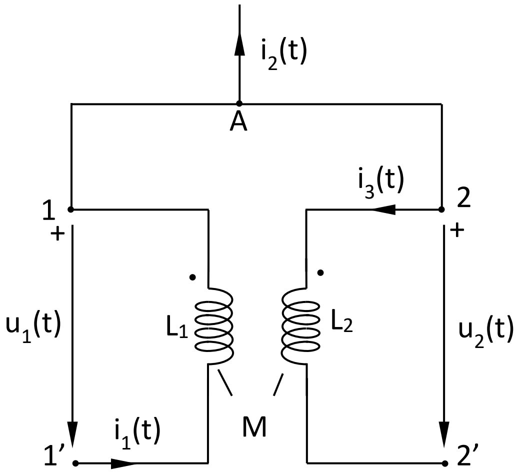
a) Determinar los terminales correspondientes de estas dos bobinas, justificando el resultado.



Si la intensidad $i_1(t)$ entra por el terminal 1' de la bobina 1, crea una línea de campo magnético con sentido antihorario (regla de la mano derecha). Si la intensidad $i_3(t)$ entra por el terminal 2 de la bobina 2, crea una línea de campo magnético con sentido horario. Por lo tanto, al tener las líneas de campo magnético creadas por esas dos intensidades, entrando por los terminales 1' y 2, sentidos contrarios, se deduce que los terminales 1' y 2 NO SON CORRESPONDIENTES y, entonces, ***los terminales 1 y 2 SÍ SON CORRESPONDIENTES***, así como también lo son los terminales 1' y 2'.

b) Para las referencias indicadas en la figura, escribir las ecuaciones de las tensiones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en función de las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y de los parámetros de ambas bobinas.

Si se dibujan las bobinas en representación plana, se tiene:



Para las referencias indicadas en la figura, y los terminales correspondientes determinados anteriormente, las ecuaciones de definición de estas dos boinas acopladas son:

$$u_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_3(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = +L_2 \frac{di_3(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Se pide que las tensiones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se expresen en función de las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$ Para conseguir esto hay que aplicar la LKI al nudo A, y se tiene que:

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) \Rightarrow \frac{di_3(t)}{dt} = \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt}$$

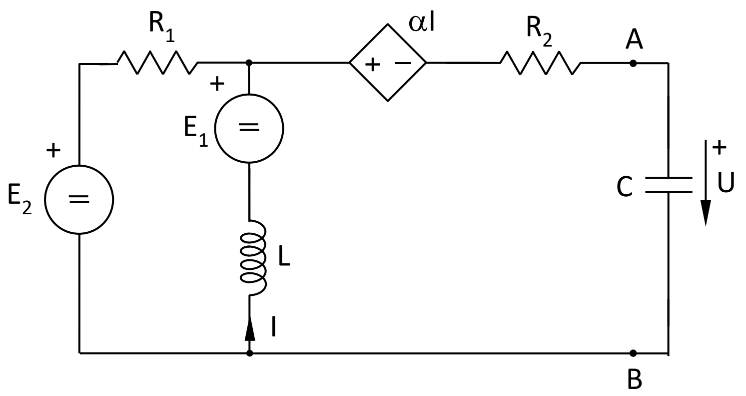
Sustituyendo esta relación en las ecuaciones de definición quedan:

$$u_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M\left(\frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt}\right) = \left(-L_1 + M\right)\frac{di_1(t)}{dt} - M\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = +L_2\left(\frac{di_1(t)}{dt} - \frac{di_2(t)}{dt}\right) - M\frac{di_1(t)}{dt} = \left(L_2 - M\right)\frac{di_1(t)}{dt} - L_2\frac{di_1(t)}{dt}$$

esto es:

$$u_1(t) = \left(-L_1 + M\right)\frac{di_1(t)}{dt} - M\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = \left(L_2 - M\right)\frac{di_1(t)}{dt} - L_2\frac{di_2(t)}{dt}$$

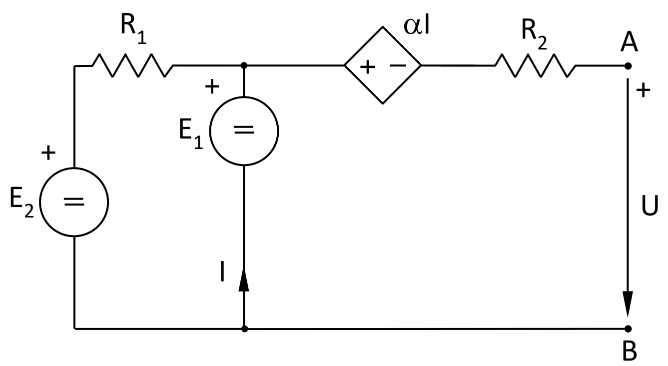
Cuestión 2: Dado el circuito de la figura, determinar el valor de la tensión U. Todas las fuentes del circuito son de corriente continua y el circuito se encuentra en régimen estacionario.



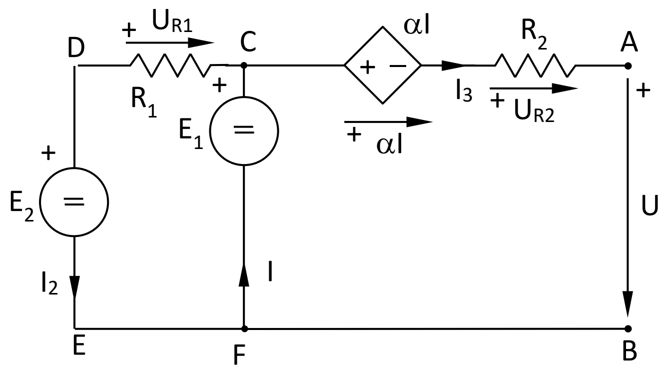
Se dice que $\begin{cases} \textit{fuentes} \text{ del circuito son de corriente continua} \\ \text{el circuito se encuentra en régimen estacionario} \end{cases}$, esto implica que:

$\begin{cases} \textit{Bobinas} \equiv \text{ cortocircuito} \\ \text{Condensadores } \equiv \text{ circuito abierto} \end{cases}$

Haciendo estas transformaciones en el circuito queda:



Se ponen referencias en el circuito:



La tensión U, que es la tensión que se pide, se calcula aplicando la LKT a la trayectoria cerrada ACFBA:

$$-U_{R2} - \alpha I + E_1 - U = 0 \Rightarrow U = U_{R2} - \alpha I + E_1$$

Como el dipolo está a circuito abierto, ocurre que:

$$I_3 = 0$$

y esto significa que:

$$I_2 = I \quad \text{y que:}$$
$$U_{R2} = 0$$

Por lo tanto:

$$U = -\alpha I + E_1$$

Por otra parte, aplicando la LKT a la trayectoria cerrada CDEFC, se tiene que:

$$-U_{R1} + E_2 - E_1 = 0$$

De la ecuación de definición de la resistencia R_1 se tiene que:

$$U_{R1} = -R_1 I_2 = -R_1 I$$

por lo que:

$$R_1 I + E_2 - E_1 = 0$$

y, entonces, la intensidad I vale:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1}$$

por lo que la tensión U se vale:

$$U = -\alpha \frac{E_1 - E_2}{R_1} + E_1$$

o, lo que es lo mismo:

$$U = -\alpha \frac{E_1 - E_2}{R_1} + E_1 = \frac{-\alpha E_1 + \alpha E_2 + R_1 E_1}{R_1} = \frac{\alpha E_2 - (\alpha - R_1) E_1}{R_1}$$

$$U = \frac{\alpha E_2 - (\alpha - R_1) E_1}{R_1}$$