Procedimientos sistemáticos de resolución de circuitos

	NUDOS	MALLAS
Aplicación sistemática de	LKI en cada nudo: $\left[Y_{ij}\right]\cdot\left[u_i(t)\right]=\left[\pm i_{ial}(t)\right]$ Suma de intensidades que salen de cada nudo por las admitancias = Suma de intensidades que alimentan (entran) a cada nudo por las fuentes	LKT en cada malla: $\left[Z_{ij}\right]\cdot\left[i_i(t)\right]=\left[\pm e_{i,al}(t)\right]$ Suma de caídas de tensión en las impedancias (en el sentido de circulación de la malla) = Suma de fuerzas electromotrices (tensiones de alimentación de las fuentes de cada malla)
Incógnitas	Tensiones de nudo (respecto al de referencia)	Corrientes de circulación de malla
Uso	Circuitos con fuentes de corriente. Programas de simulación de circuitos.	Circuitos con fuentes de tensión, bobinas acopladas y transformadores.

Análisis por NUDOS de circuitos

Fundamento del método de NUDOS: balance de corriente en los nudos

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escritura matricial del sistema de ecuaciones:

$$\left[Y_{ij}\right]\cdot\left[u_i(t)\right] = \left[\pm i_{i,al}(t)\right]$$

Suma de las corrientes que salen de cada nudo por las admitancias ($Y \approx G \approx 1/R_{generalizada}$)

Suma de las corrientes inyectadas a cada nudo por las fuentes de alimentación

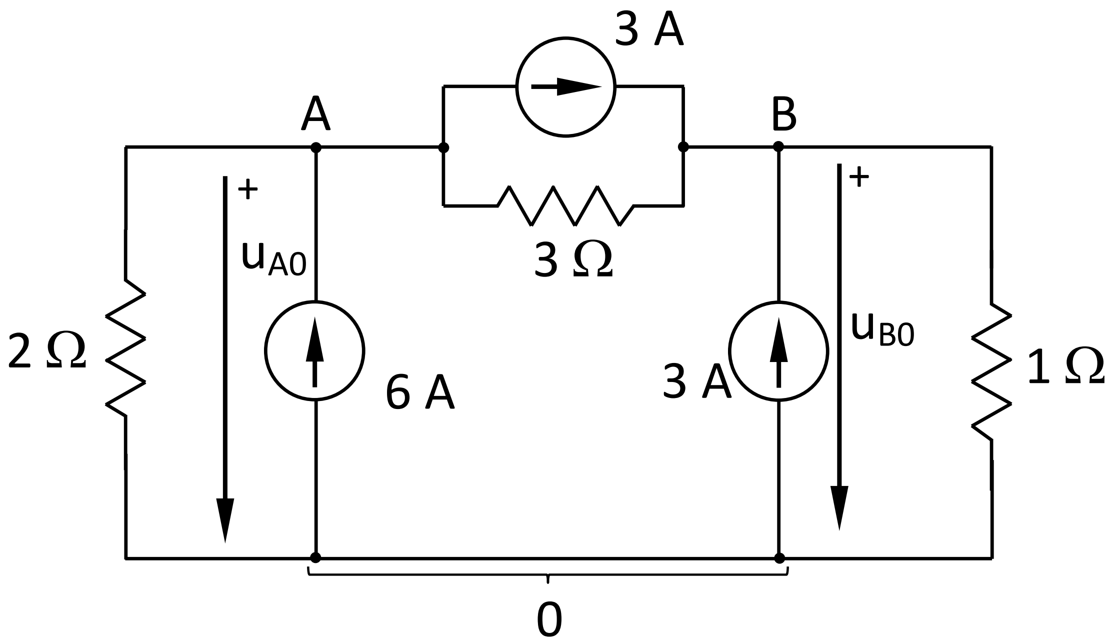
$Y_{ij}\cdot u_i(t)$ positiva **+** si sale corriente del nudo *i* por la admitancia Y_{ij}

$i_{i,al}(t)$ positiva **+** si fuente inyecta/alimenta/añade corriente al nudo *i*

4.5.2 Presentación informal mediante ejemplos del método de análisis por nudos y simplificaciones habituales de circuitos

N.1) Calcular las tensiones de los nudos A y B

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

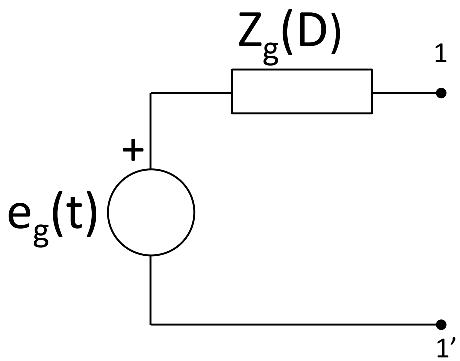


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{A0} \\ u_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 \\ 3+3 \end{bmatrix}$$

$$u_{A0} = 6\ \text{V}$$

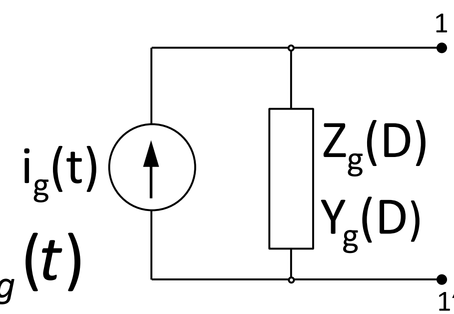
$$u_{B0} = 6\ \text{V}$$

4.4.1. Equivalencia entre fuentes reales



$$i_g(t) = \frac{e_g(t)}{Z_g(D)}$$

$$e_g(t) = Z_g(D) \cdot i_g(t)$$



$$Z_g(D)_{\text{fuente tensión}} = Z_g(D)_{\text{fuente intensidad}}$$

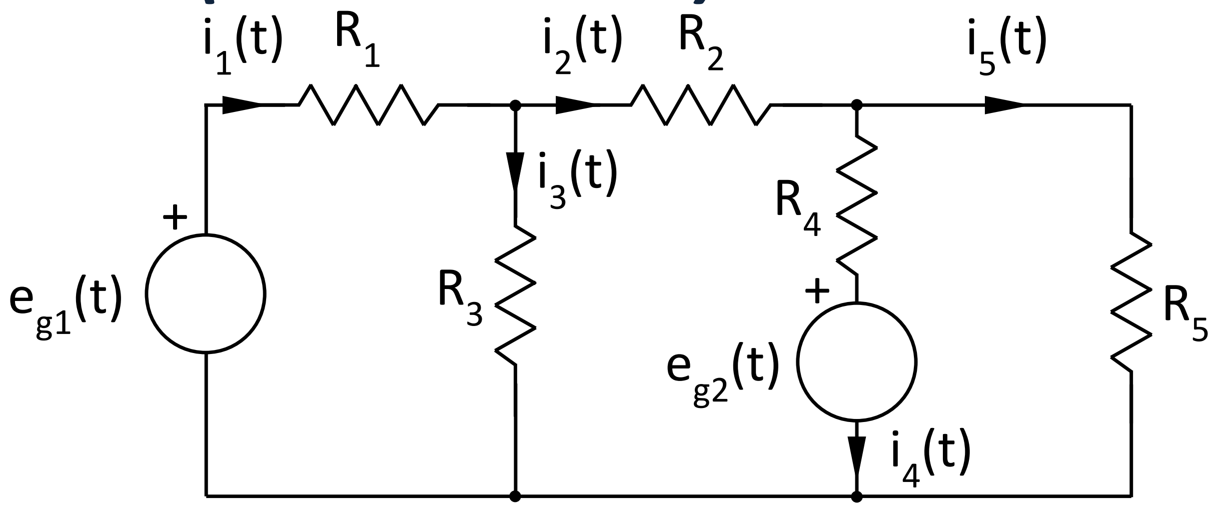
- La flecha de la fuente de intensidad ha de apuntar hacia el terminal marcado con el "**+**" de la fuente de tensión

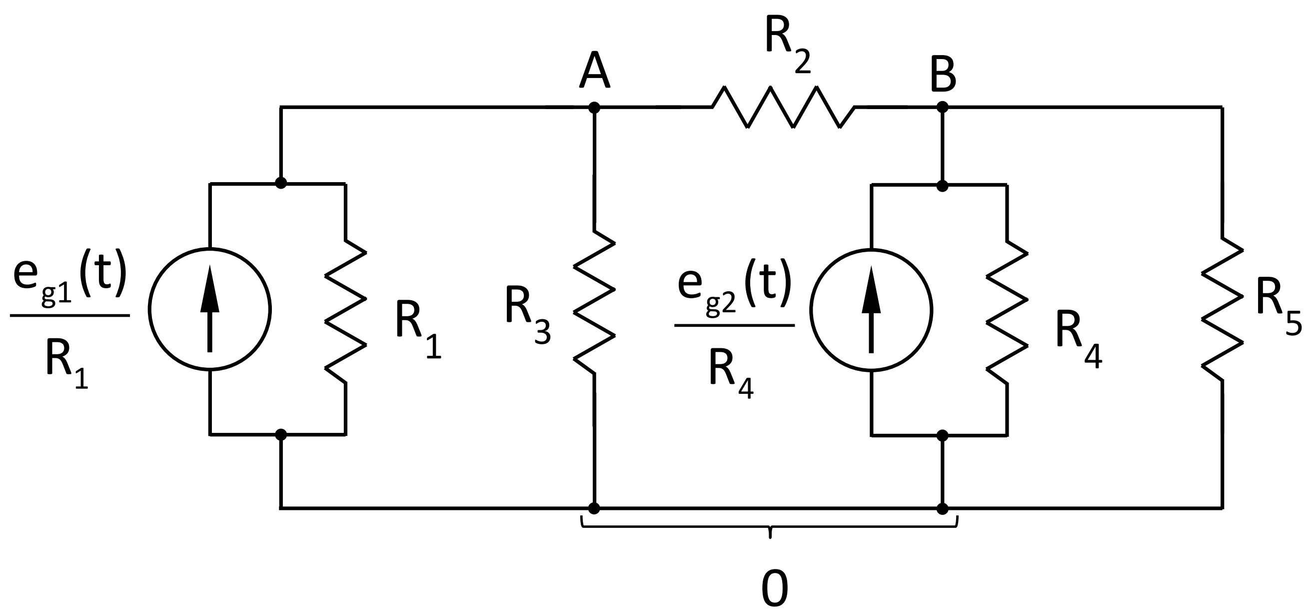
- ***Atención:*** *La equivalencia entre fuentes reales es sólo válida para el resto de los elementos del circuito al cual están conectadas, no para los elementos que forman la fuente real.*

N.2) Calcular las intensidades del circuito (Problema 4.1)

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

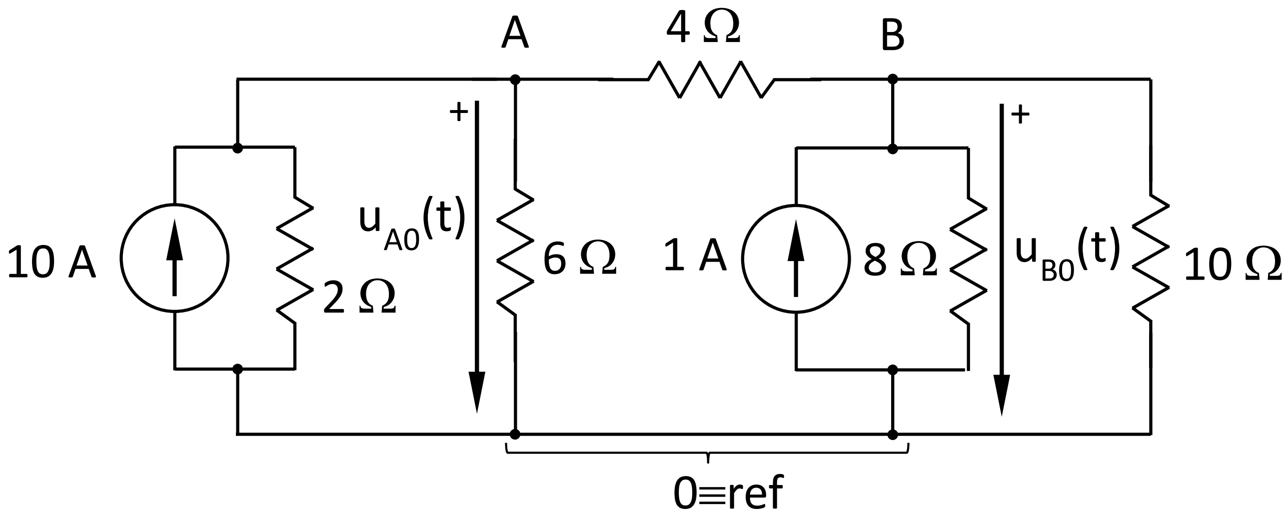
$R_1 = 2\ \Omega$,
$R_2 = 4\ \Omega$,
$R_3 = 6\ \Omega$,
$R_4 = 8\ \Omega$,
$R_5 = 10\ \Omega$,
$e_{g1}(t) = 20$ V,
$e_{g2}(t) = 8$ V.





N.2) Calcular las intensidades del circuito (continuación Pr. 4.1)

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{A0}(t) \\ u_{B0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0{,}916u_{A0}(t) - 0{,}25u_{B0}(t) = 10 \\ -0{,}25u_{A0}(t) + 0{,}475u_{B0}(t) = 1 \end{cases}$$

$$u_{A0}(t) = 13{,}408 \text{ V}$$
$$u_{B0}(t) = 9{,}162 \text{ V}$$

4.5.2 Presentación formal del método de análisis de circuitos por nudos

4.5.2. Escritura matricial del sistema de ecuaciones de nudos

- *Los elementos de la primera matriz tienen dimensiones de admitancias, los de la segunda tienen dimensiones de tensiones y los elementos de la tercera, dimensiones de intensidades. En general, se puede escribir:*

$$\left[Y_{ij}\right]\cdot\left[u_i(t)\right]=\left[i_{ial}(t)\right]$$

donde:

$\left[Y_{ij}\right]$: Matriz de admitancias de nudo (matriz simétrica)

$\left[u_i(t)\right]$: Vector de tensiones de nudo

$\left[i_{ial}(t)\right]$: Vector de intensidades de alimentación de nudo

Y_{ii} : Admitancia propia de nudo

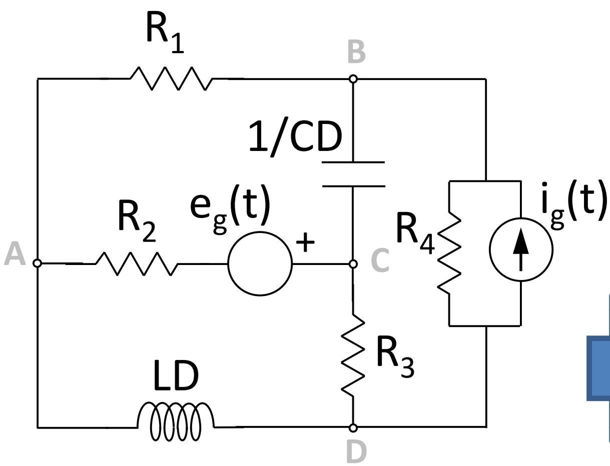
$Y_{ij}\big|_{i\neq j}$: Admitancia mutua de nudo

4.5.2. Método de análisis por nudos

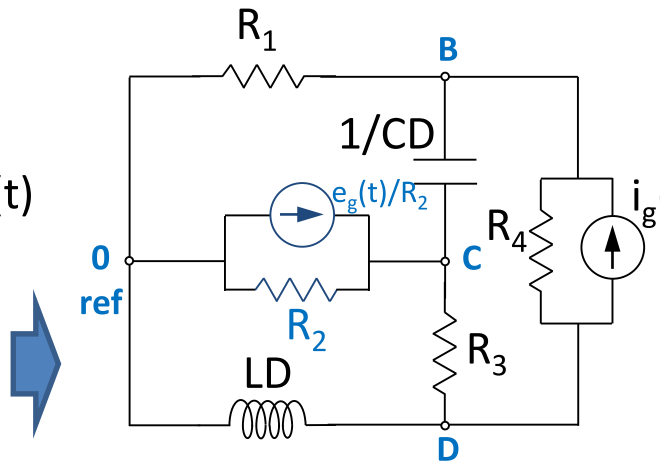
- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - Y_{ii}: Suma de las admitancias de los elementos pasivos que concurren en el nudo i.
  - $Y_{ij}|_{i\neq j}$: Suma, con signo –, de las admitancias de los elementos pasivos que comparten el nudo i y el nudo j
  - $u_i(t)$: Tensiones de nudo (incógnitas).
  - $i_{ial}(t)$: Suma algebraica de las intensidades provenientes de fuentes que entran en el nudo i. Estas intensidades se toman positivas si entran en el nudo i y negativas si salen de dicho nudo.

4.5.2. Método de análisis por nudos

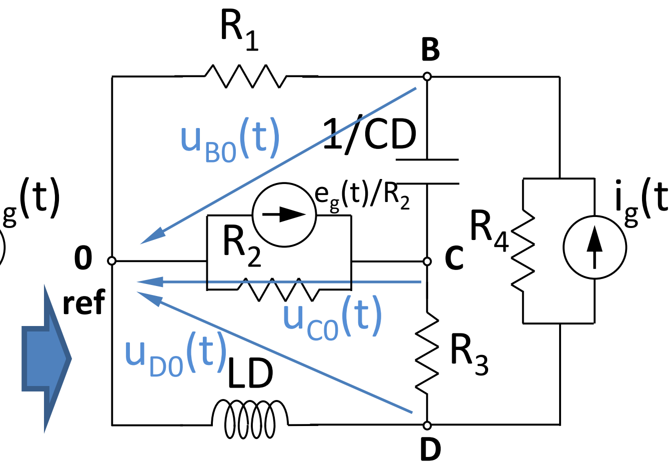
Circuito original
(enunciado del problema)



Simplificar circuito,
elegir referencia (nudo 0) y
nombrar el resto de nudos



Indicar tensiones de nudo
(respecto referencia o nudo 0)



$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+CD+\frac{1}{R_4}\right) & -CD & -\frac{1}{R_4} \\ -CD & \left(\frac{1}{R_3}+CD+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{LD}+\frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{B0}(t) \\ u_{C0}(t) \\ u_{D0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) \\ e_g(t)/R_2 \\ -i_g(t) \end{bmatrix}$$

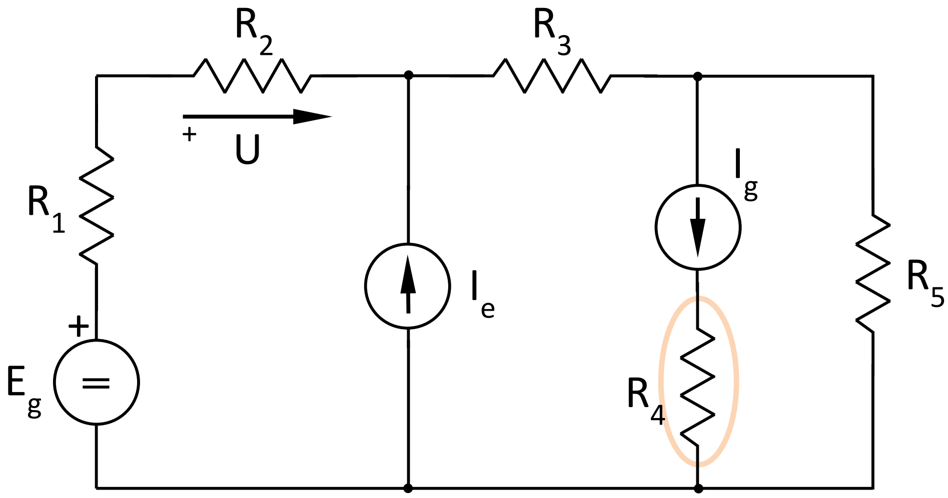
4.5.2. Procedimiento general de análisis de circuitos por nudos.

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

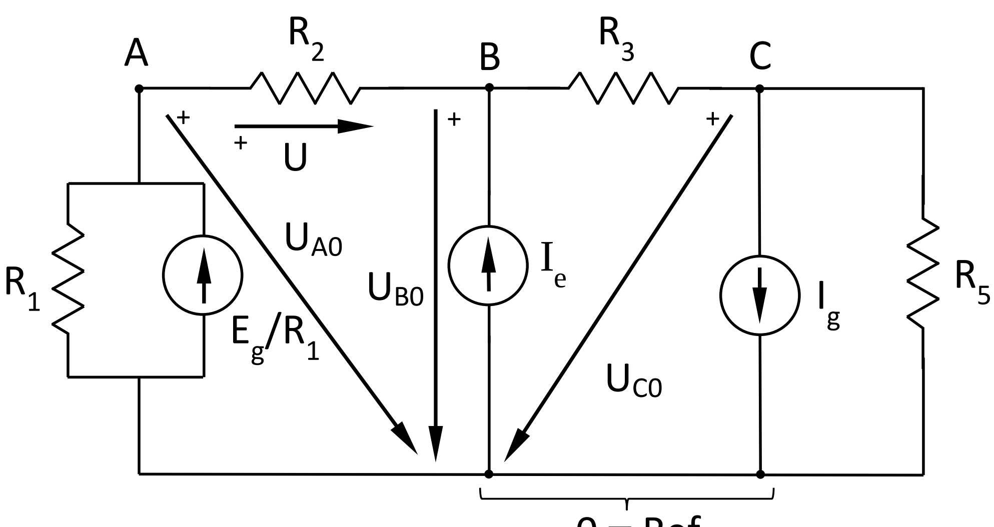
- *Simplificar el circuito (transformar fuentes reales de tensión a corriente, agrupar impedancias en serie…)*
- *Poner nombre a nudos (empezar eligiendo el nudo de referencia y continuar hasta que todos los conductores pertenezcan a algún nudo). Comprobaciones:*
  - todos los elementos del circuito deben estar flanqueados por dos nudos distintos (suprimir elementos cortocircuitados y añadir nudos omitidos).
  - no hay dos nudos unidos por un cortocircuito que tengan distinto nombre (**nudos únicos**).
- *Indicar en el circuito las tensiones de nudo.*
- *Escribir y resolver el sistema de ecuaciones.*
- *Calcular las tensiones y corrientes en el circuito original (para ello hay que deshacer la transformación de las fuentes reales de tensión y cualquier otra transformación que se haya realizado en el circuito).*

N.3) Calcular la tensión U utilizando el método de nudos

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza



E_g = 8 V,
I_g = -46 A,
I_e = 13 A,
R_1 = 1 Ω,
R_2 = 1/2 Ω,
R_3 = 1/3 Ω,
R_4 = 1/4 Ω,
R_5 = 1/5 Ω.



$$\begin{bmatrix} 1+2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+3 & -3 \\ 0 & -3 & 3+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ +46 \end{bmatrix}$$

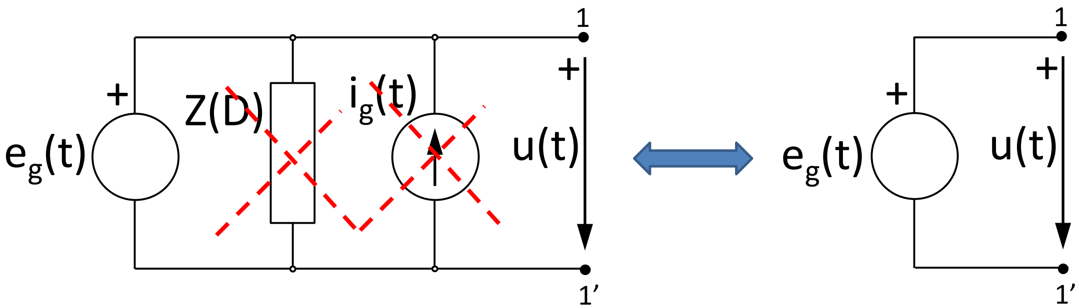
Tensión pedida:

$$U = U_{A0} - U_{B0}$$

$$U_{A0} = 12\text{ V}$$
$$U_{B0} = 14\text{ V}$$
$$U_{C0} = 11\text{ V}$$
$$U = U_{A0} - U_{B0} = -2\text{ V}$$

4.4.2. Elementos en paralelo y en serie con fuentes ideales

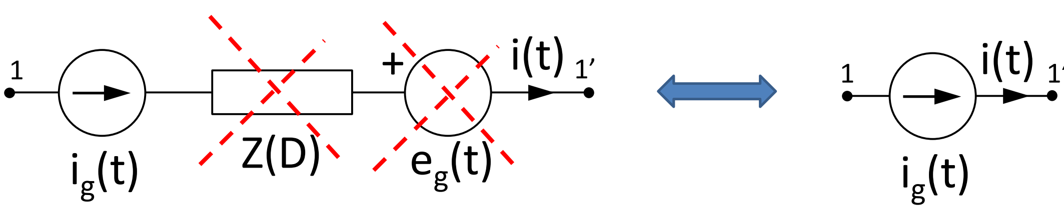
- *Simplificación para **mallas**: Elementos en paralelo con una **fuente ideal** de tensión*



En ambos casos:

$$u(t) = e_g(t)$$

- *Simplificación para **nudos**: Elementos en serie con una **fuente ideal** de intensidad*



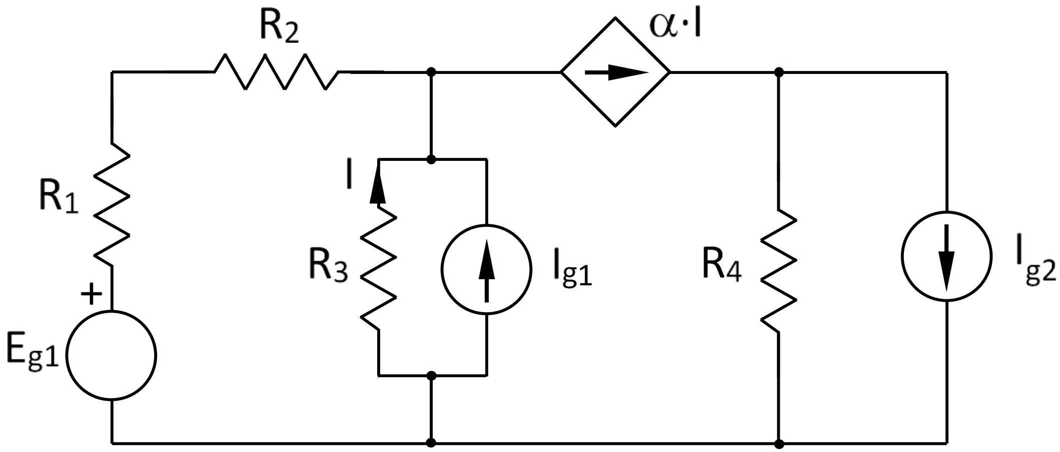
En ambos casos:

$$i(t) = i_g(t)$$

Atención: *Estas equivalencias son sólo válidas para los elementos del resto del circuito, no para los elementos que intervienen en ella.*

N.4) Calcular las tensiones de los nudos y la intensidad I

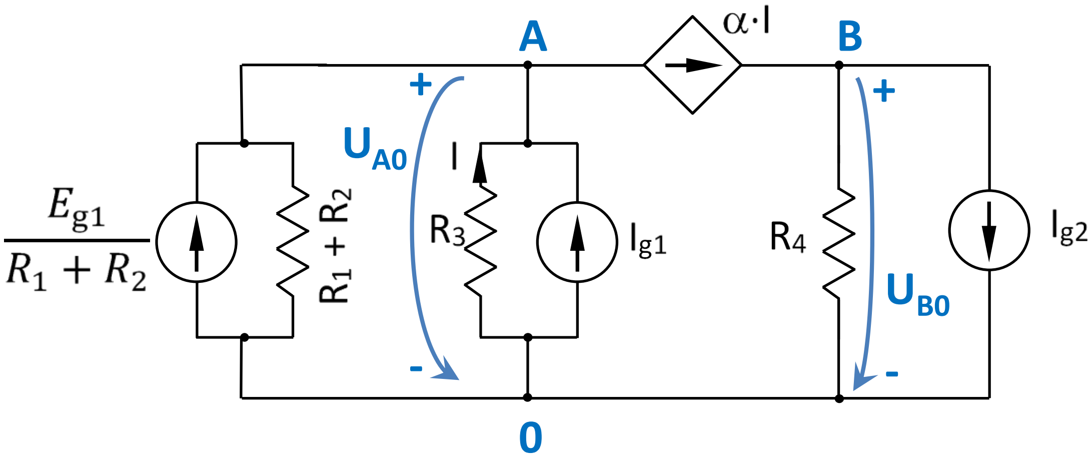
Centro Universitario de la Defensa Zaragoza



$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$, $E_{g1} = 4$ V, $I_{g1} = 3$ A, $I_{g2} = 12$ A, $\alpha = 3$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{g1}}{R_1+R_2}+I_{g1}-\alpha I \\ \alpha I - I_{g2} \end{bmatrix}$$

Ec. adicional: $I = -U_{A0} / R_3$



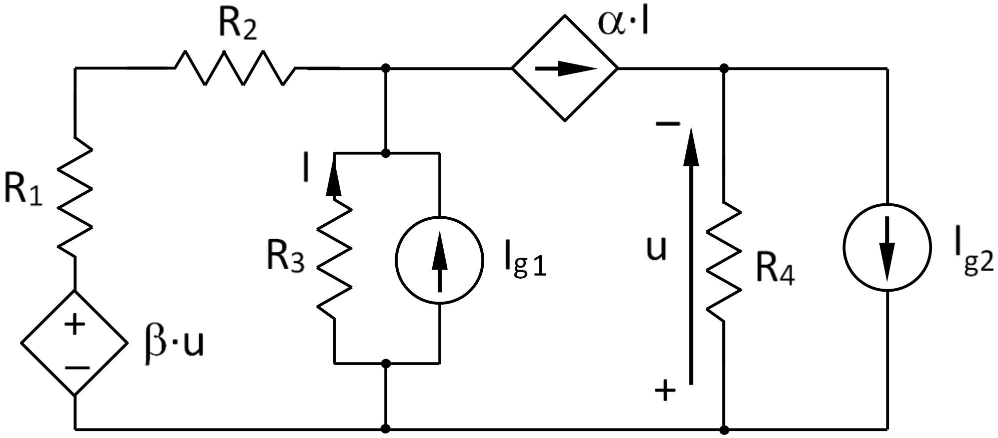
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+1}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+1}+3-3\left(-U_{A0}/2\right) \\ 3\left(-U_{A0}/2\right)-12 \end{bmatrix}$$

$U_{A0} = -10$ V; $U_{B0} = 6$ V; $I = 5$ A

4.5.2. Método de análisis por nudos

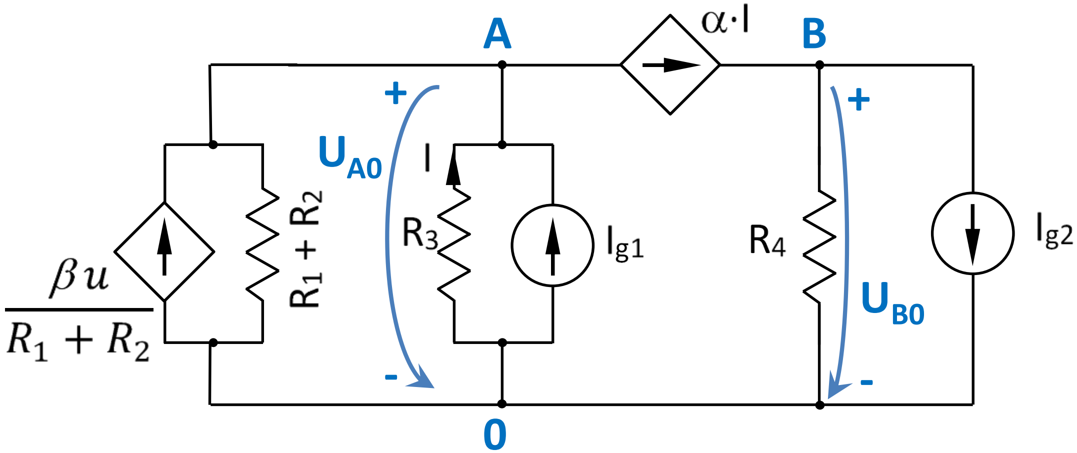
- ***Circuitos con fuentes dependientes:***
  - Una fuente dependiente (de tensión o de intensidad) puede ser real o bien ideal.
  - El tratamiento de las fuentes dependientes es idéntico al seguido con las fuentes independientes.
  - Ahora bien, al depender su valor de la tensión o de la intensidad en otra parte del circuito, cada fuente dependiente introduce una incógnita (la tensión o la intensidad de la cual depende). Para que el sistema de ecuaciones sea determinado, es necesario **añadir una ecuación adicional**.
  - **Forma de construir la ecuación adicional:** Se expresa la tensión o la intensidad de la cuál depende la fuente dependiente, como función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo en este caso).

N.5) Calcular la tensión u y la int. I



$R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega,\ R_3 = 2\ \Omega,\ R_4 = 2\ \Omega,$
$I_{g1} = 3\ \text{A},\ I_{g2} = 12\ \text{A},\ \alpha = 3,\ \beta = 1$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1+R_2}+\dfrac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta u}{R_1+R_2}+I_{g1}-\alpha I \\ \alpha I - I_{g2} \end{bmatrix}$$



Ec. adicionales: $I = -u_{A0} / R_3$

$u = -u_{B0}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1(-U_{B0})}{1+1}+3-3\left(\dfrac{-U_{A0}}{2}\right) \\ 3\left(\dfrac{-U_{A0}}{2}\right)-12 \end{bmatrix}$$

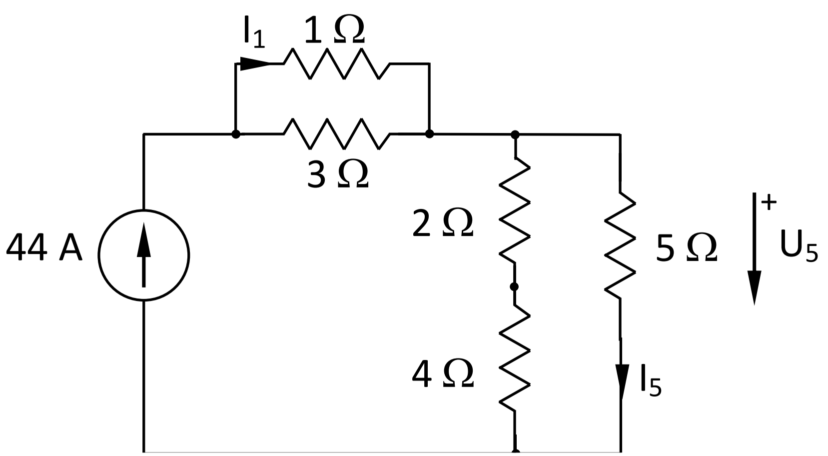
$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} U_{A0} = -7{,}5\ \text{V}; & U_{B0} = -1{,}5\ \text{V}; \\ I = 3{,}75\ \text{A}; & u = +1{,}5\ \text{V} \end{matrix}$$

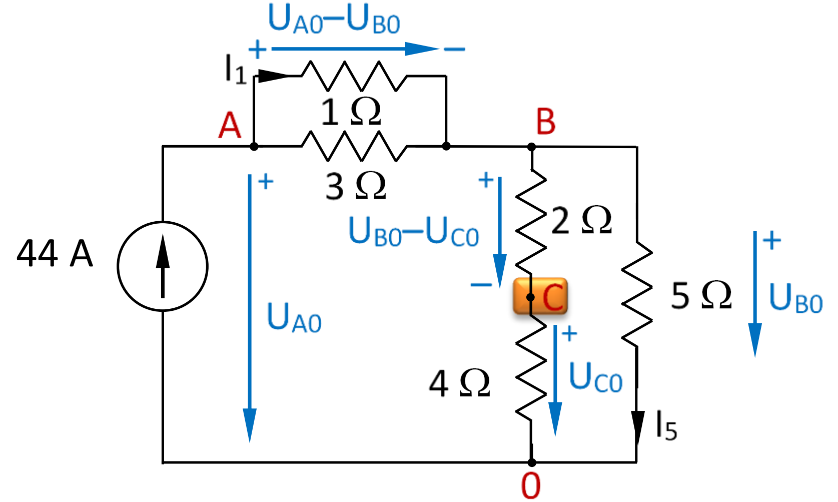
Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

4.5.2 Más problemas sencillos (♦) de nudos

N.6) Calcular las magnitudes referenciadas en el circuito

I_1 calculado a través de la tensión entre dos nudos distintos de la referencia. Circuito resuelto sin agrupar resistencias (circuito original).





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1}+\frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{A0} = 153\ \text{V}$$

$$U_{B0} = 120\ \text{V} = U_5$$

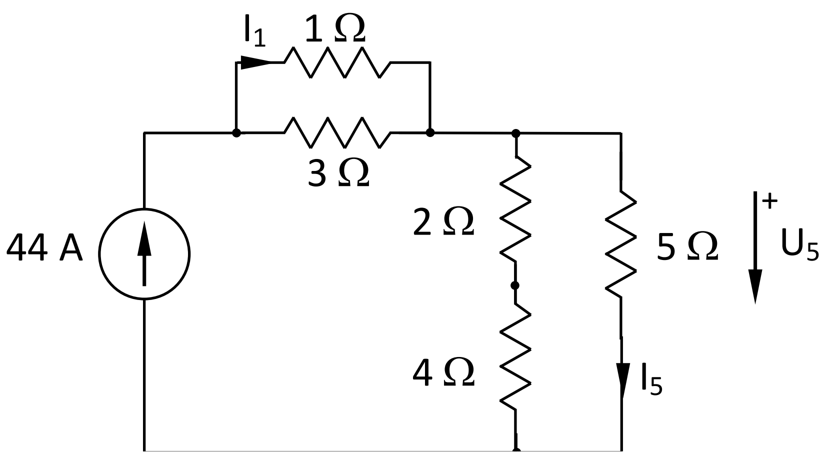
$$U_{C0} = 80\ \text{V}$$

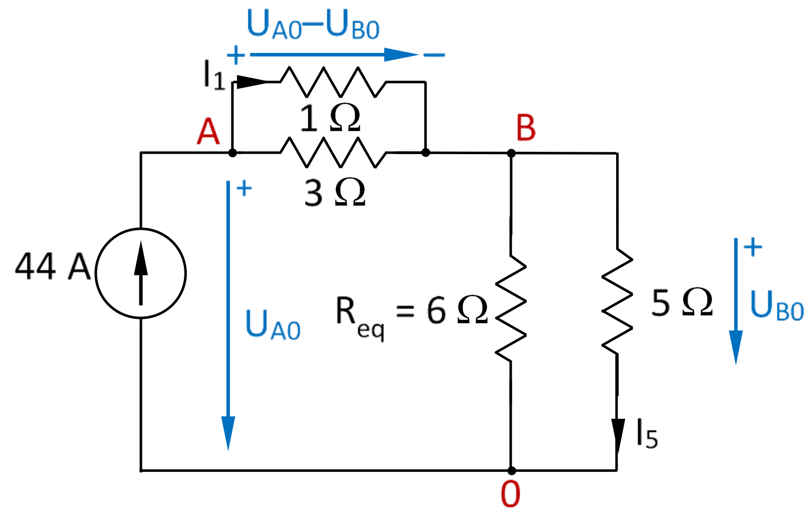
$$I_1 = \frac{U_{A0} - U_{B0}}{1\,\Omega} = 33\ \text{A}$$

$$I_5 = \frac{U_{B0}}{5\,\Omega} = 24\ \text{A}$$

N.6) Resolución agrupando resistencias (menor número de nudos)

El circuito permite agrupar resistencias





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1}+\frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) \\ -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suma de las dos ecuaciones: $0\,U_{A0} + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)U_{B0} = 44$

$$U_{A0} = 153\text{ V}$$

$$U_{B0} = 120\text{ V} = U_5$$

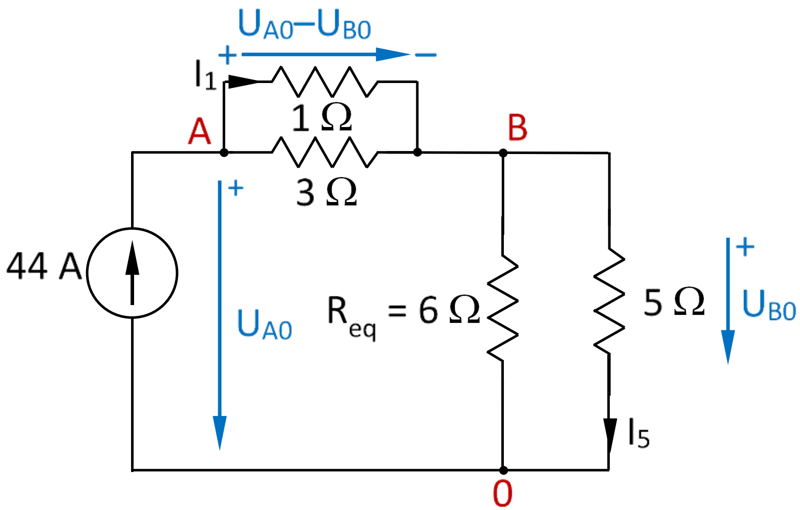
$$I_1 = \frac{U_{A0} - U_{B0}}{1\,\Omega} = 33\text{ A}$$

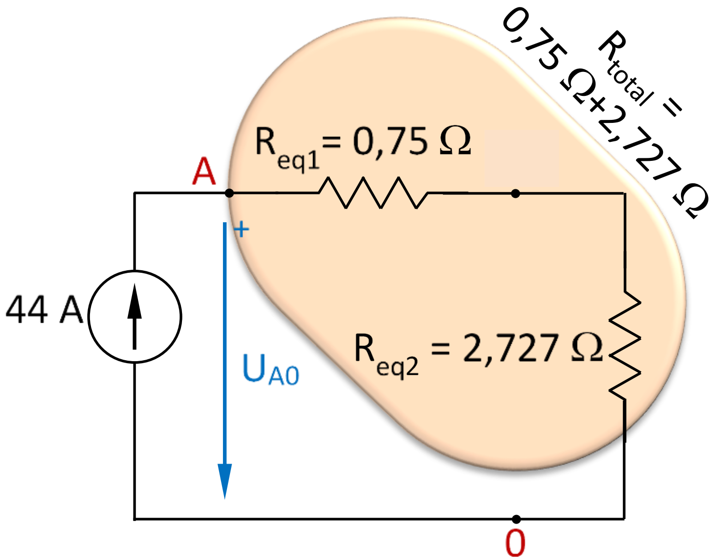
$$I_5 = \frac{U_{B0}}{5\,\Omega} = 24\text{ A}$$

En el método de nudos, es conveniente agrupar los elementos en serie para reducir el número de nudos (pero no agrupamos los elementos que están en paralelo).

N.6) Resolución agrupando todas las resistencias

Al agrupar elementos, puede ser necesario volver al circuito original del problema.





Circuito con 1 nudo + referencia: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$\left[\frac{1}{0,75+2,727}\right]\cdot\left[U_{A0}\right]=\left[44\right]$$

$$U_{A0}=44\,(0,75+2,727)=153\text{ V}$$

$I_1=¿?$

$U_5=¿?$

$I_5=¿?$

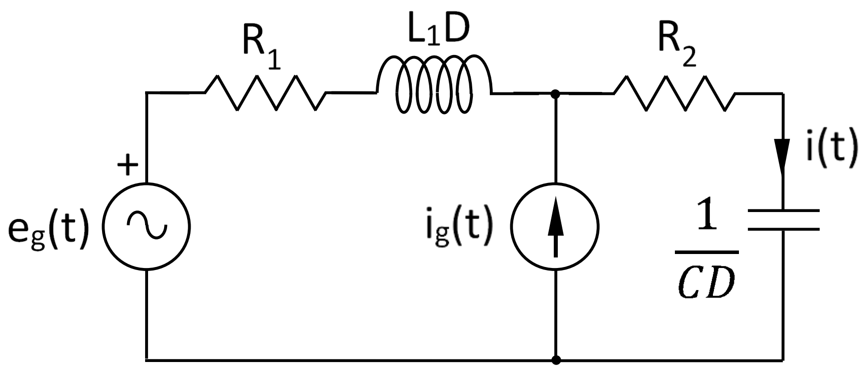
No suele merecer la pena agrupar los elementos en paralelo o hacer transformaciones costosas del circuito en el método de resolución por nudos.

N.7) Agrupación de impedancias

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escribir todas las ecuaciones correspondientes al análisis por el método de nudos del siguiente circuito. Calcular i(t).

*Las tensiones y las corrientes **varían** con el **tiempo**.*

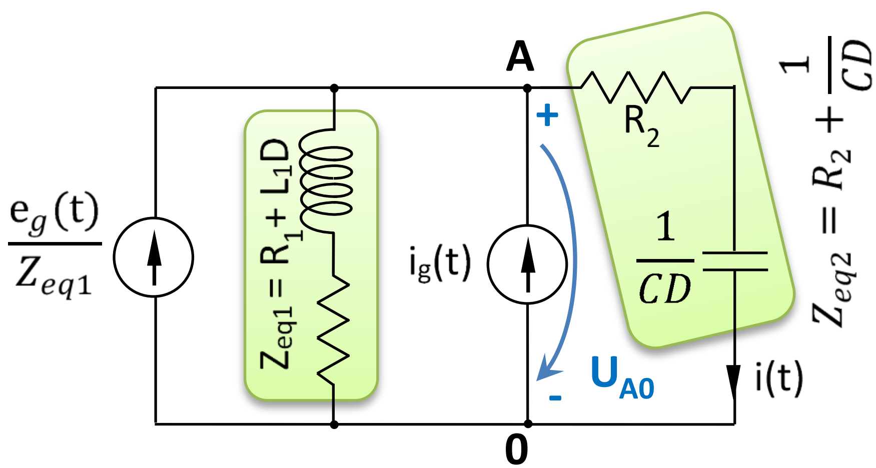


Circuito con 1 nudo + referencia: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$\left[\frac{1}{Z_{eq1}}+\frac{1}{Z_{eq2}}\right]\left[U_{A0}(t)\right]=\left[\frac{e_g(t)}{Z_{eq1}}+i_g(t)\right]$$

Corrientes que salen del nudo por las impedancias

Corrientes que entran al nudo por las fuentes



$$U_{A0}(t)=\frac{\frac{e_g(t)}{Z_{eq1}}+i_g(t)}{\frac{1}{Z_{eq1}}+\frac{1}{Z_{eq2}}}=\frac{e_g(t)+Z_{eq1}i_g(t)}{1+\frac{Z_{eq1}}{Z_{eq2}}}$$

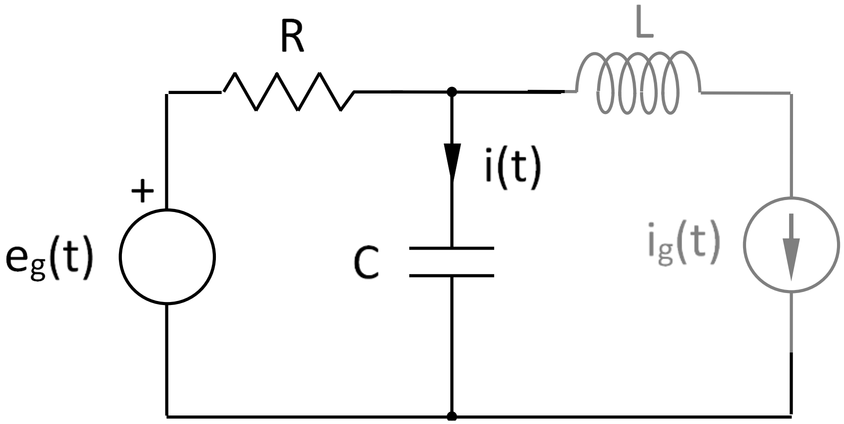
Corriente por R_2: $i(t)=+\frac{U_{A0}(t)}{Z_{eq2}}$

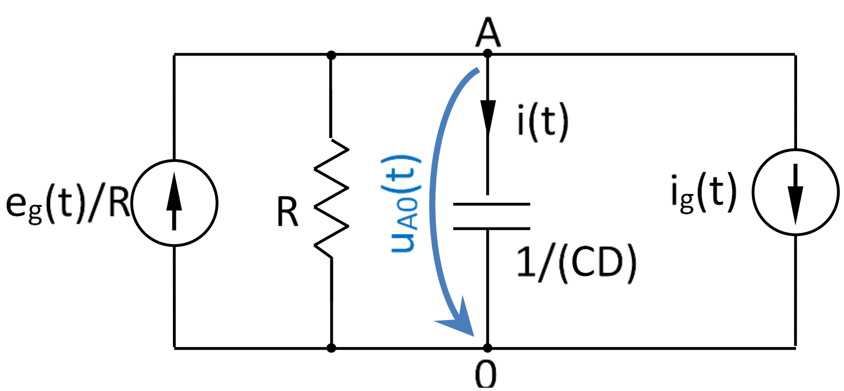
N.8) Resuelto eliminando impedancia en serie con fuente de corriente.

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escribir todas las ecuaciones correspondientes al análisis por el método de nudos del siguiente circuito. Calcular i(t).

*Las tensiones y las corrientes **varían** con el **tiempo**.*





Circuito con 1 nudo + referencia: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$\left[\frac{1}{R}+CD\right]\left[U_{A0}(t)\right]=\left[\frac{e_g(t)}{R}-i_g(t)\right]$$

Corrientes que salen del nudo por las impedancias

Corrientes que entran al nudo por las fuentes

$$U_{A0}(t)=\frac{\dfrac{e_g(t)}{R}-i_g(t)}{\dfrac{1}{R}+CD}=\frac{e_g(t)-R\,i_g(t)}{1+RCD}$$

Corriente por C: $i(t)=\dfrac{U_{A0}(t)}{1/(CD)}=CDU_{A0}(t)$

4.5.2 Análisis por nudos con fuentes ideales de tensión

4.5.2. Análisis por nudos con fuentes ideales de tensión

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

- ***Circuitos con fuentes ideales de tensión:***
  - El método de nudos prefiere que las fuentes sean de intensidad. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de tensión en fuente de intensidad, será necesario encontrar una forma de solventar este "inconveniente". **Procedimiento**:
  - Se da una referencia a la intensidad que circula por la fuente ideal de tensión.
  - Esta intensidad que circula por la fuente ideal de tensión se trata, a todos los efectos, como se trata a la intensidad suministrada por una fuente de intensidad.

4.5.2. *Análisis por nudos con fuentes ideales de tensión*

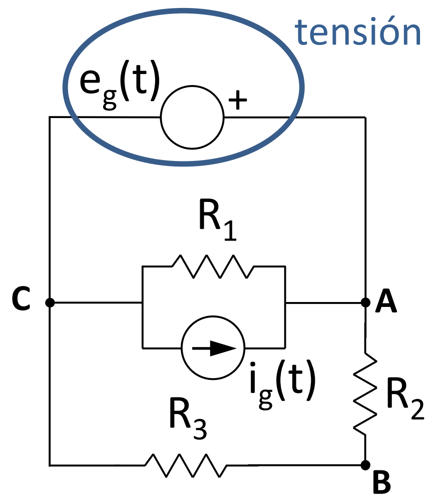
Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

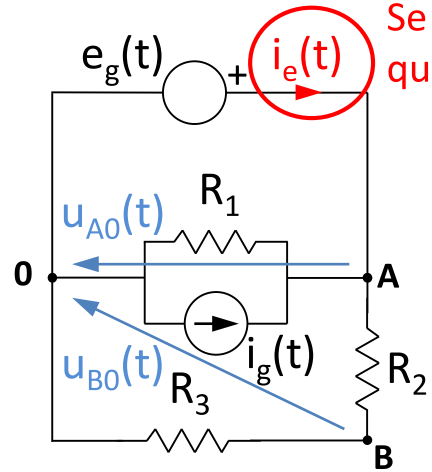
- ***Circuitos con fuentes ideales de tensión (cont.)***
  - Esta intensidad (que es desconocida), al tratarla como la intensidad proveniente de una fuente, aparecerá en el vector de intensidades de alimentación de nudo.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que ***añadir una ecuación adicional*** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de nudos.
  - **<u>Forma de construir la ecuación adicional</u>**: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su tensión) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las tensiones de nudo).

4.5.2. Análisis por nudos con fuentes ideales de tensión

- ***Ejemplo:*** *Analizar el circuito por el método de los nudos*

Fuente ideal de tensión





Se dibuja, en sentido arbitrario, la intensidad que circula por la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{A0}(t) \\ u_{B0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t)+i_e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas: $u_{A0}(t)$, $u_{B0}(t)$ e $i_e(t)$

Ecuación adicional: $\boxed{e_g(t) = u_{A0}(t)}$

- Lo que sabemos de la fuente: $e_g(t)$
- En función de las incógnitas: $u_{A0}(t)$, $u_{B0}(t)$

Por lo tanto: 3 ecuaciones lin. indeptes, 3 incógnitas ⟹ SOLUCIÓN ÚNICA

Incógnitas adicionales

- *Incógnitas adicionales a las tensiones de nudos o a las corrientes de circulación de mallas.*
- *En sistemas de ecuaciones matriciales, aparecen fuera del vector de incógnitas.*
- *Para poder resolver el sistema, es necesario una ecuación adicional por cada incógnita adicional (nº ecuaciones independientes = nº incógnitas).*
- *Aparecen en circuitos con fuentes dependientes y fuentes de tensión (nudos) o de corriente (mallas) que no se pueden transformar.*

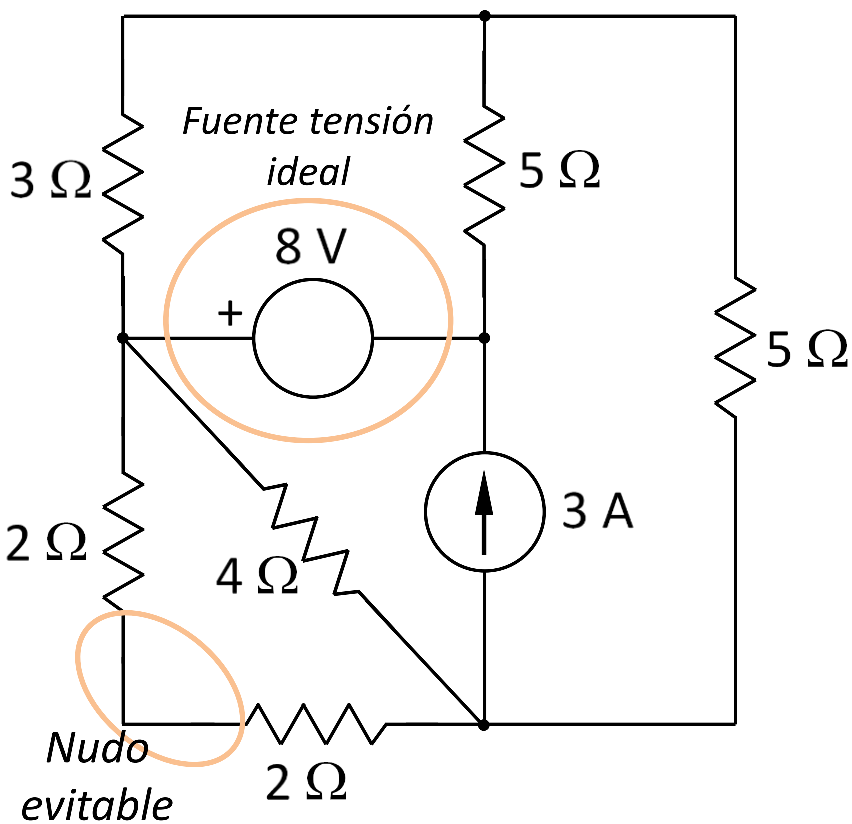
Ecuaciones adicionales

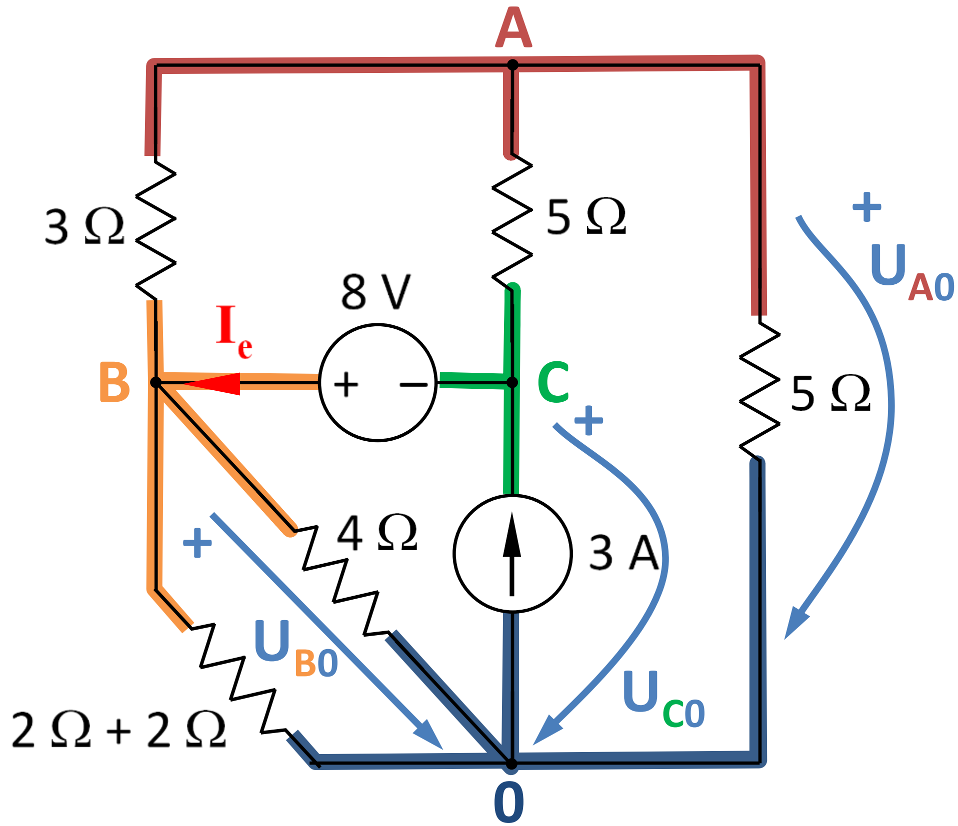
- *Fuentes de tensión (nudos) o de corriente (mallas) que no se pueden transformar: añadir una referencia de corriente (nudos) o tensión (mallas).*
- *Fuentes dependientes: añadir una ecuación que relacione la magnitud de dependencia con el resto de incógnitas.*
- *Ecuaciones de transformadores.*
- *En **nudos** se necesitan ecuaciones donde aparezcan las tensiones de nudos y **no** sirve aplicar **LKI**.*
- *En **mallas** se necesitan ecuaciones donde aparezcan las corrientes de malla y **no** sirve aplicar **LKT**.*

Ejercicio 4.10/4.12 del libro de problemas (apdo. por nudos).

Problema 4.10/4.12 del libro (apdo. por nudos).

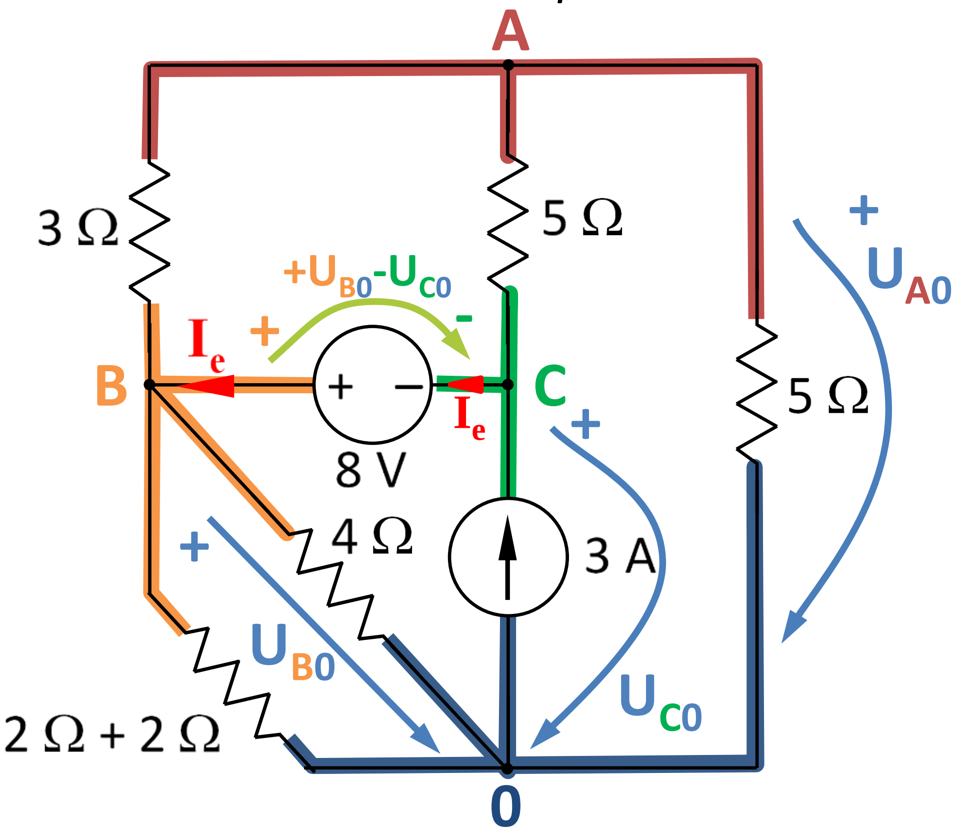
Determinar la potencia absorbida por la fuente de intensidad aplicando el método de análisis por nudos.





Problema 4.10/4.12 del libro (apdo. por nudos).

Determinar la potencia absorbida por la fuente de intensidad aplicando el método de análisis por nudos.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2+2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +I_e \\ -I_e+3 \end{bmatrix}$$

Ecuación adicional: $8 = +U_{B0} - U_{C0}$

Resolviendo el sistema: $I_e = 3{,}87\ \text{A}$

$U_{A0} = 1{,}69\ \text{V} \qquad U_{B0} = 5{,}32\ \text{V} \qquad U_{C0} = -2{,}68\ \text{V}$

Cálculo de la potencia de la fuente $I_g(t) = 3\ \text{A}$

$U_{C0}\downarrow \ I_g(t)\uparrow$ (Refs. opuestas) $\Rightarrow U_{C0} I_g(t) = P_{Ced}$

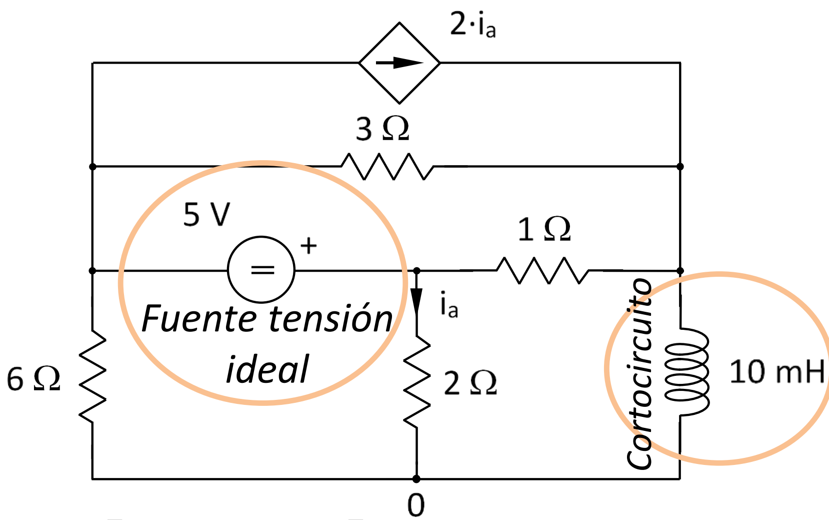
$$P_{Ced\ i_g=3\ \text{A}} = U_{C0} I_g(t) = (-2{,}68\ \text{V})(3\ \text{A}) = -8{,}02\ \text{W}$$

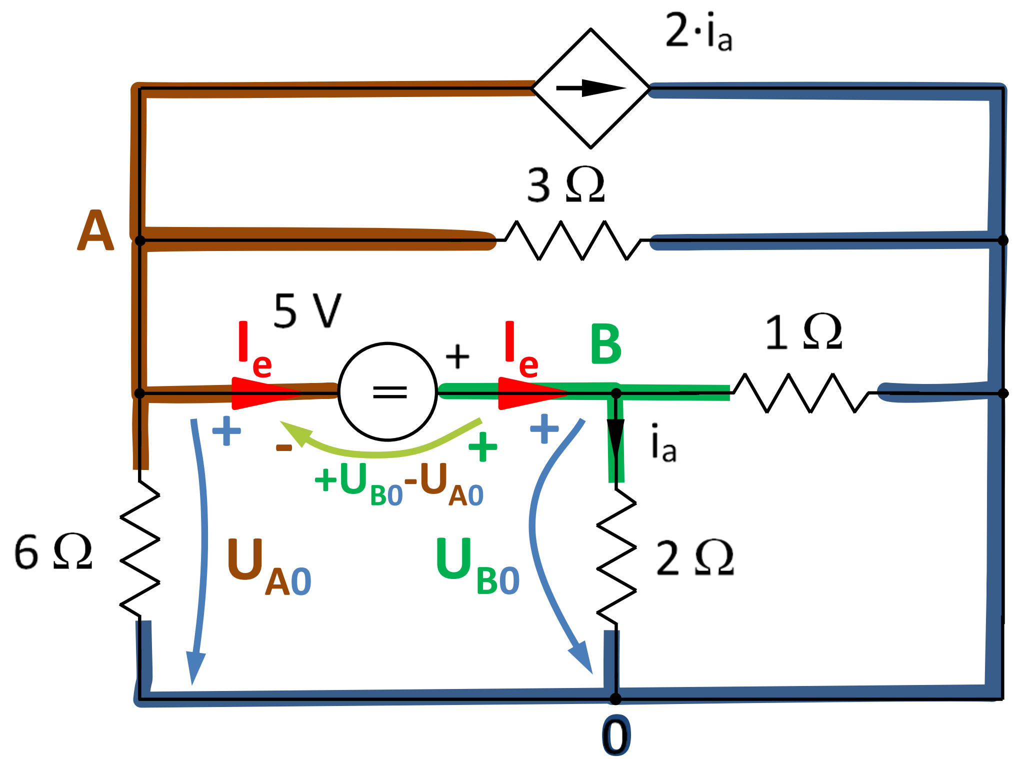
$$P_{Abs\ i_g=3\ \text{A}} = -P_{Ced\ i_g=3\ \text{A}} = +8{,}02\ \text{W}$$

Ejercicio 4.11/4.13 del libro de problemas

Problema 4.11/4.13 del libro

Aplicando el método de análisis por nudos, calcular la potencia absorbida por la fuente de intensidad del circuito de la figura. Tomar el nudo 0 como nudo de referencia. Nota: circuito en estado estacionario.





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}+\frac{1}{3} & -0 \\ -0 & \frac{1}{1}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_e - 2i_a \\ +I_e \end{bmatrix}$$

Ec. Adic. Fte. Dpte.: $i_a = +U_{B0}/2$

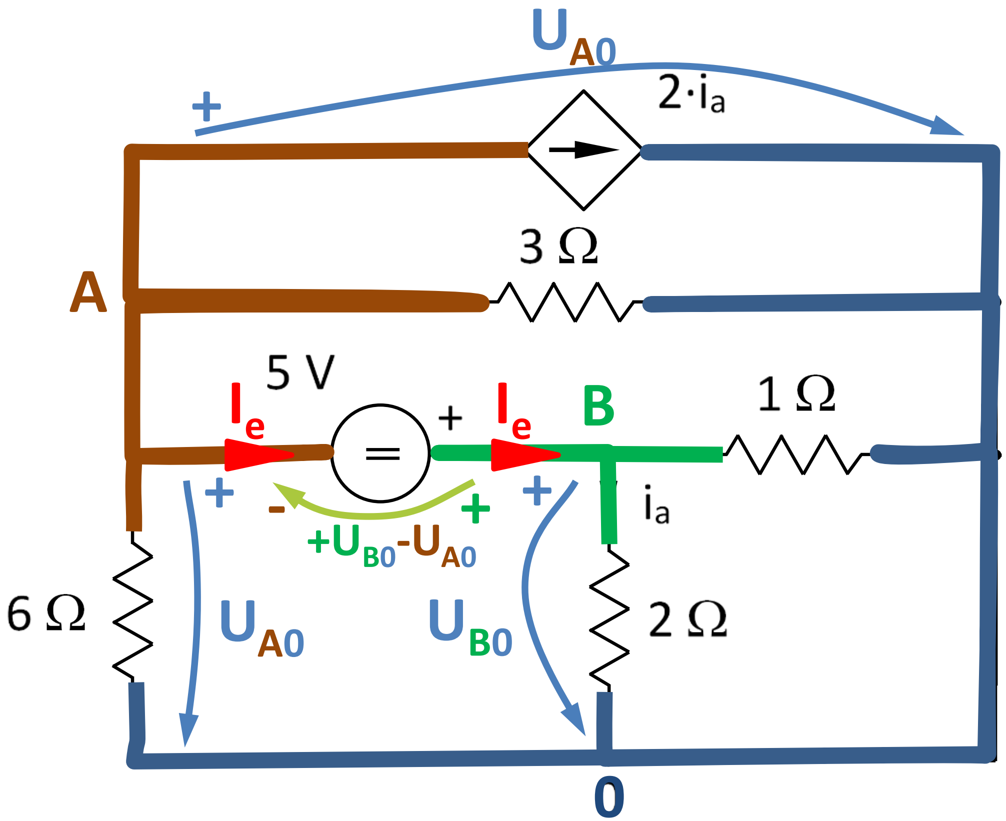
Ec. Adic. Fte. tensión: $5 = +U_{B0} - U_{A0}$

Resolviendo el sistema: $I_e = 1{,}25\text{ A}$

$U_{A0} = -4{,}17\text{ V}$ $\quad U_{B0} = 0{,}84\text{ V}$ $\quad i_a = 0{,}42\text{ A}$

Problema 4.11/4.13 del libro

Aplicando el método de análisis por nudos, calcular la potencia absorbida por la fuente de intensidad del circuito de la figura. Tomar el nudo 0 como nudo de referencia. Nota: circuito en estado estacionario.



Resolviendo el sistema: $I_e = 1{,}25\ \text{A}$

$U_{A0} = -4{,}17\ \text{V}$ $\quad U_{B0} = 0{,}84\ \text{V}$ $\quad i_a = 0{,}42\ \text{A}$

Cálculo de la potencia de la fuente

Referencias con mismo sentido: $U_{A0}\ 2{\cdot}i_a$

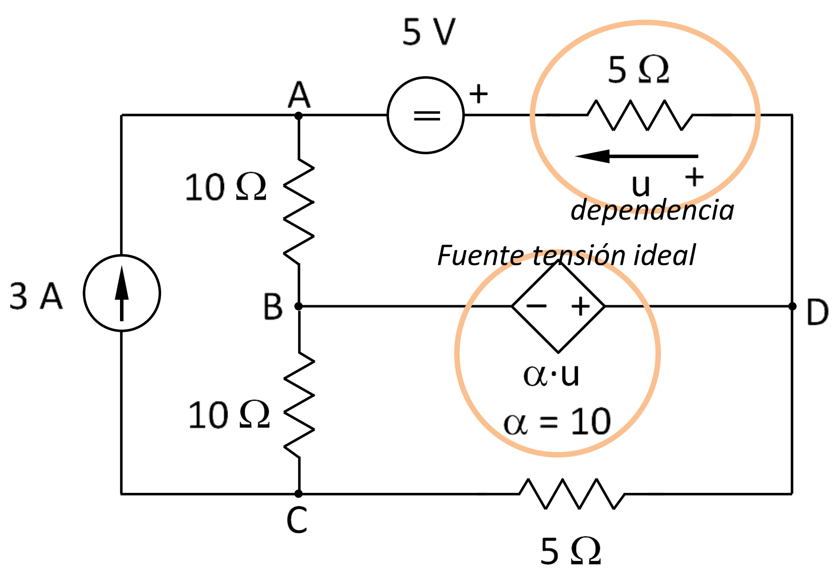
$P_{Abs\,2\cdot i_a} = U_{A0}\ 2{\cdot}i_a = (-4{,}17\ \text{V})(2{\cdot}0{,}417\ \text{A})$

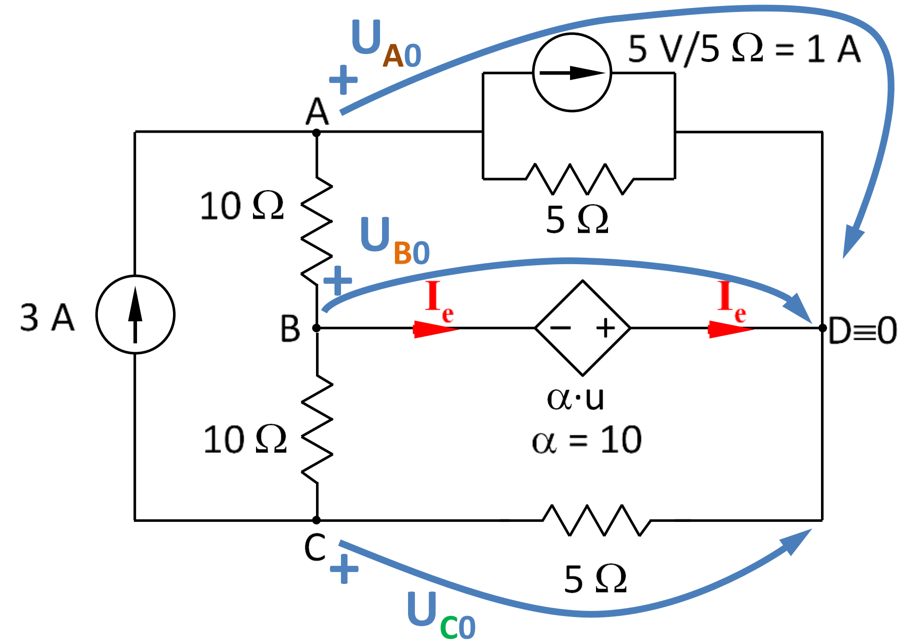
$$P_{Abs\,2\cdot i_a} = -3{,}47\ \text{W}$$

Ejercicio 4.12/4.14 del libro de problemas

Problema 4.12/4.14 del libro

Aplicando el método de análisis por nudos, calcular, utilizando el método de análisis por nudos, el valor de la tensión *u*. *Dato:* $\alpha = 10$





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ -I_e \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ec. Ad. Fte. tensión: $\alpha\,u = -U_{B0} \Rightarrow u = -U_{B0}/10$

Ec. Ad. Fte. Dpte.: $U_{A0} = -5 - u \Leftrightarrow u = -U_{A0} - 5$

Resolviendo el sistema: $I_e = 6{,}33\text{ A}$ $\quad u = 5\text{ V}$

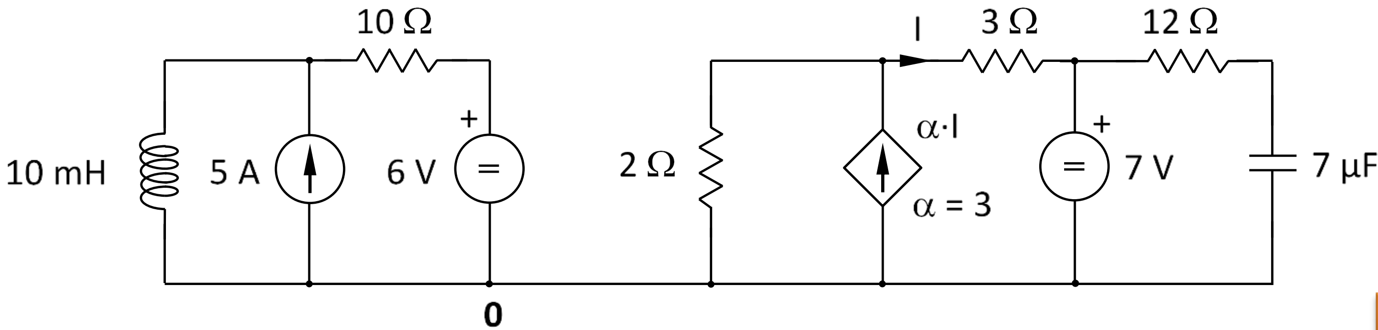
$U_{A0} = -10\text{ V} \quad U_{B0} = -50\text{ V} \quad U_{C0} = -26{,}67\text{ V}$

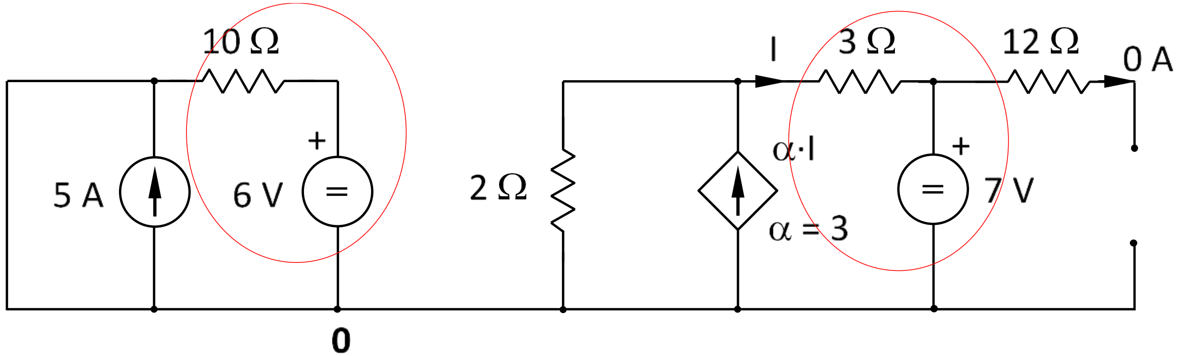
4.5.2 Problema de dificultad especial (♦♦♦+) analizado por nudos

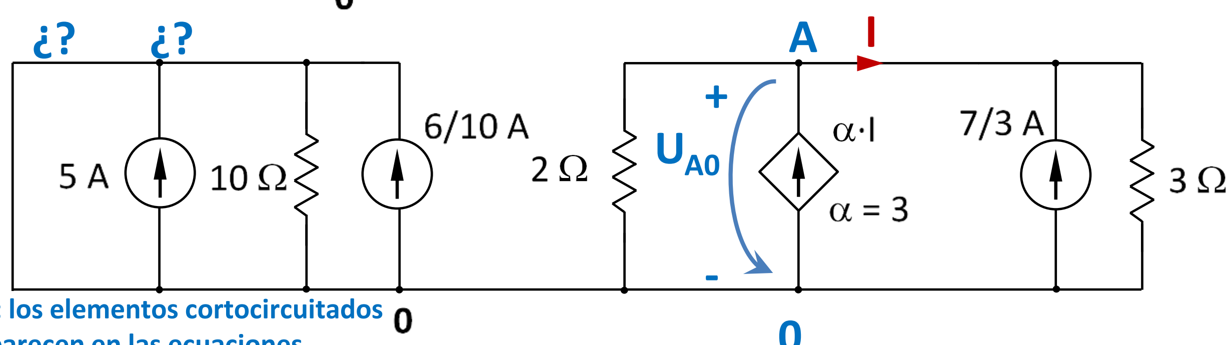
N.9) Problema (♦♦)

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Calcular las tensiones de los nudos del circuito respecto el **nudo 0 de referencia** (las fuentes son de corriente continua y el circuito se encuentra en régimen estacionario).







Circuito con 1 nudo + referencia: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]\left[U_{A0}(t)\right]=\left[\alpha\cdot I+\frac{7}{3}\right]$$

Corrientes que salen del nudo por las impedancias

Corrientes que entran al nudo por las fuentes

Ec. adicional del circuito original:

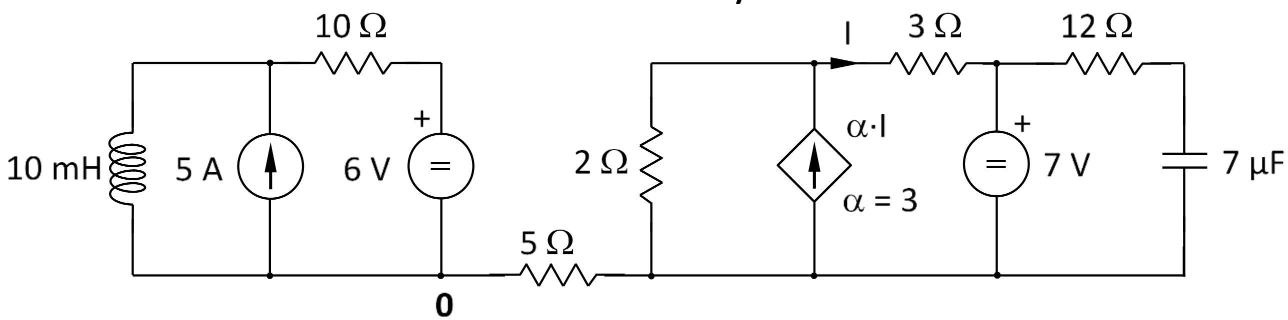
$$U_{A0}=3I+7 \quad \Rightarrow \quad I=\frac{U_{A0}-7}{3}$$

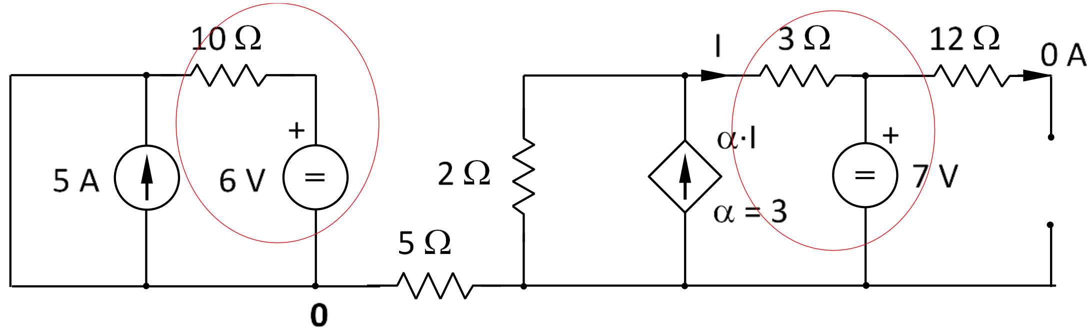
$$U_{A0}=28\,V$$
$$I=7\,A$$

Nota: los elementos cortocircuitados no aparecen en las ecuaciones

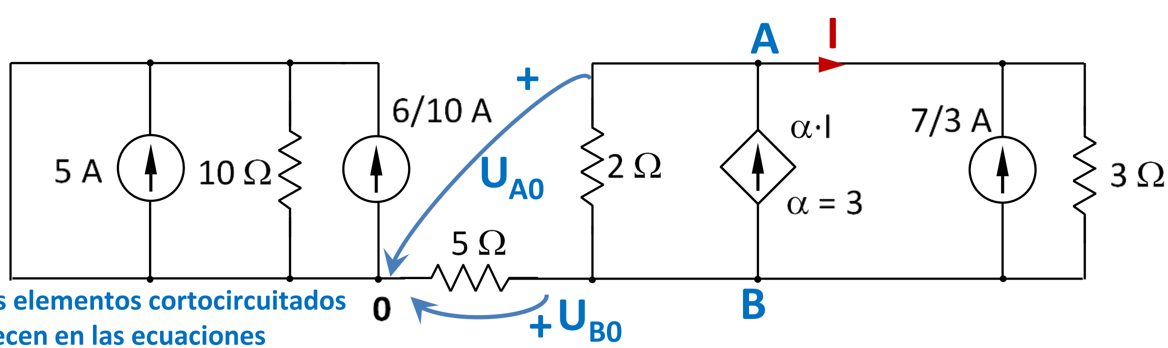
N.10) Problema de examen (♦♦♦+)

Calcular las tensiones de los nudos del circuito respecto el **nudo 0 de referencia** (las fuentes son de corriente continua y el circuito se encuentra en régimen estacionario).





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I+\frac{7}{3} \\ -3I-\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$



Ec. adicional del circuito original:

$$U_{A0} - U_{B0} = 3I + 7 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_{A0} - U_{B0} - 7}{3}$$

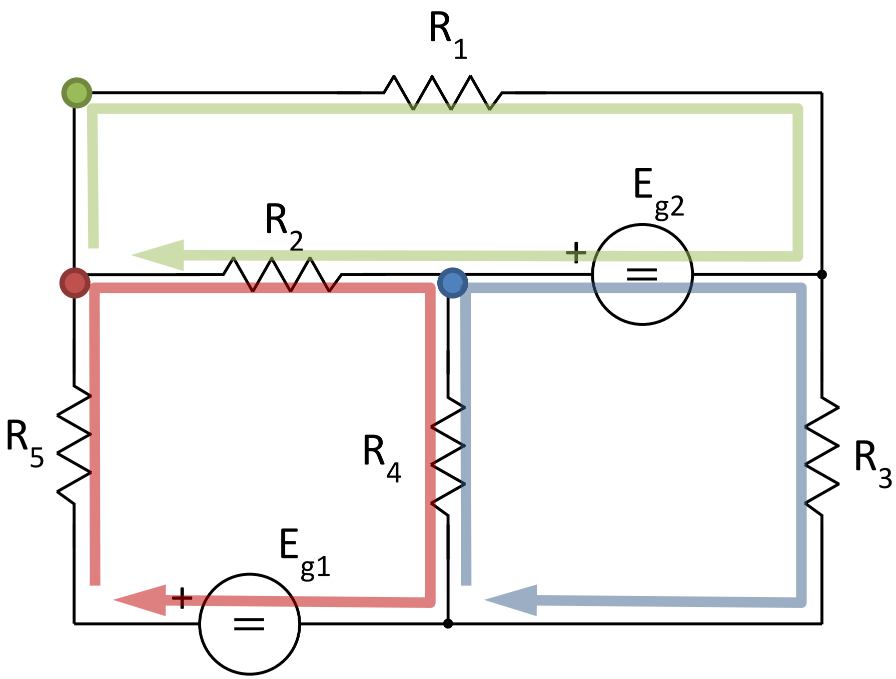
$$U_{A0} = 28\,V$$
$$U_{B0} = 0\,V$$
$$I = 7\,A$$

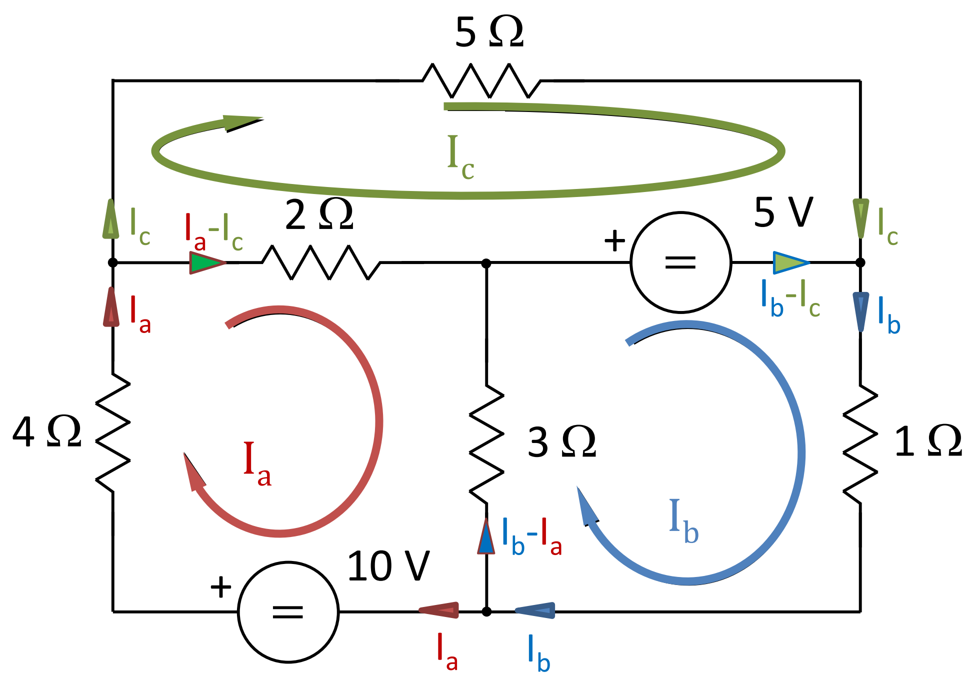
Nota: los elementos cortocircuitados no aparecen en las ecuaciones

Análisis por MALLAS de circuitos

4.5.3 Presentación informal mediante ejemplos del método de análisis por mallas y simplificaciones habituales de circuitos

M.1) Problema 4.2 del libro





$R_1 = 5\ \Omega,$

$R_2 = 2\ \Omega,$

$R_3 = 1\ \Omega,$

$R_4 = 3\ \Omega,$

$R_5 = 4\ \Omega,$

$E_{g1} = 10\ V,$

$E_{g2} = 5\ V$

$$\begin{bmatrix} 4+2+3 & -3 & -2 \\ -3 & 3+1 & 0 \\ -2 & 0 & 5+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +10 \\ -5 \\ +5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9I_a - 3I_b - 2I_c = 10 \\ -3I_a + 4I_b = -5 \\ -2I_a + 7I_c = 5 \end{cases}$$

$I_a = 1{,}242\ \text{A}$

$I_b = -0{,}318\ \text{A}$

$I_c = 1{,}069\ \text{A}$

4.5.3 Presentación formal del método de análisis de circuitos por mallas

4.5.3. Procedimiento general MALLAS

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

- *Transformar fuentes reales de corriente a tensión.*
- *Dar nombre y sentido de circulación a las mallas.*
- *Escribir y resolver el sistema de ecuaciones.*
- *Calcular las tensiones y corrientes en el circuito original (para ello hay que deshacer la transformación de las fuentes reales de corriente y cualquier otra transformación que se haya realizado en el circuito).*
  - Las corrientes de circulación de mallas coinciden con la corriente de las ramas exteriores.

Fundamento del método de MALLAS: balance de tensión en las mallas

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escritura matricial del sistema de ecuaciones:

$$\left[Z_{ij} \right] \cdot \left[i_{malla\ i}(t) \right] = \left[\pm e_{g,\, malla\ i}(t) \right]$$

Suma de caídas de tensión en las impedancias (en el sentido de circulación de cada malla)

Suma de fuerzas electromotrices (tensiones de alimentación de las fuentes de cada malla)

$Z_{ij} \cdot i_i(t)$ positiva **+** si caída de tensión en sentido de circulación de la malla

Signo de $e_{i,al}(t)$:
terminal +/- de **salida** de la corriente de malla

4.5.3. Método de análisis por mallas

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

$$\left[Z_{ij}\right]\cdot\left[i_i(t)\right]=\left[e_{ial}(t)\right]$$

donde:

$\left[Z_{ij}\right]$: Matriz de impedancias de malla (matriz simétrica)

$\left[i_i(t)\right]$: Vector de intensidades de alimentación de malla

$\left[e_{ial}(t)\right]$: Vector de tensiones de alimentación de malla

Z_{ii} : Impedancia propia de malla

$Z_{ij}\Big|_{i\neq j}$: Impedancia mutua de malla

- *Escritura sistemática de las ecuaciones:*
  - Z_{ii}: Suma de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen a la malla i.

4.5.3. Método de análisis por mallas

– $Z_{ij}|_{i \neq j}$: Suma algebraica de las impedancias de los elementos pasivos que pertenecen simultáneamente a la malla i y a la malla j
  - Signo positivo: Las intensidades de ambas mallas llevan el mismo sentido sobre la impedancia considerada.
  - Signo negativo: Las intensidades de ambas mallas tienen sentidos contrarios sobre la impedancia considerada.

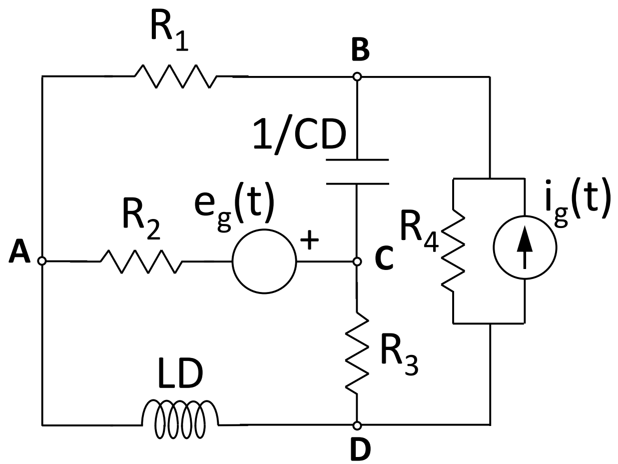
– $i_i(t)$: Intensidades de circulación de malla (incógnitas).

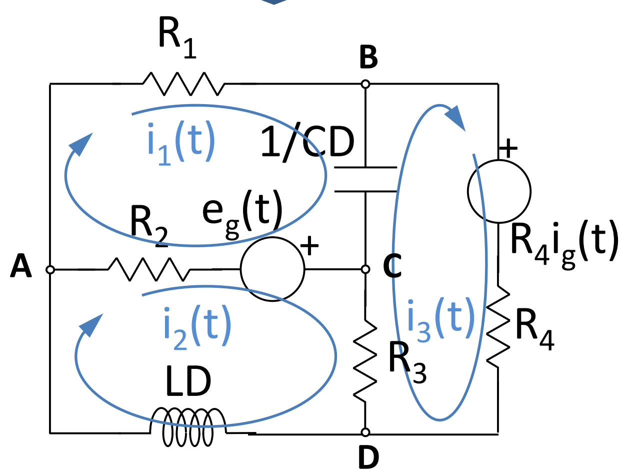
– $e_{ial}(t)$: Suma algebraica de los valores de las fuentes de tensión que pertenecen a la malla i.
  - Signo positivo: Si la intensidad de la malla considerada sale por el terminal marcado con "+" de la fuente.
  - Signo negativo: Si la intensidad de la malla considerada entra por el terminal marcado con "+" de la fuente.

4.5.3. Método de análisis por mallas

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Circuito con tensiones y corrientes que varían en el tiempo.





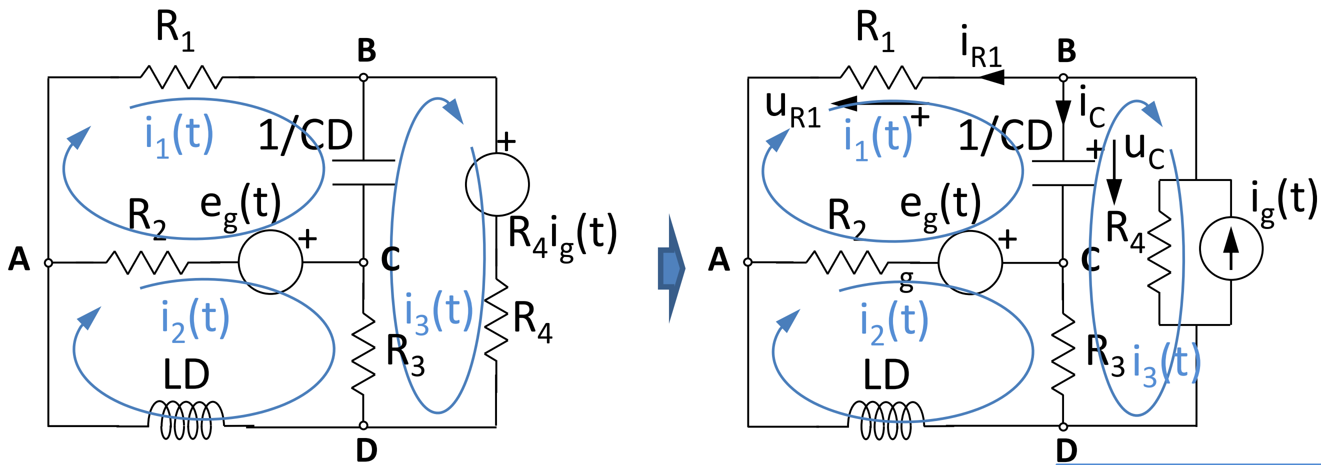
$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{CD}+R_2 & -R_2 & -\frac{1}{CD} \\ -R_2 & R_2+R_3+LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_4+R_3+\frac{1}{CD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_g(t) \\ e_g(t) \\ -R_4 i_g(t) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz son las impedancias de las mallas, los del vector de incógnitas son las intensidades de circulación de las mallas y los del término independiente, las tensiones de alimentación de las mallas.

$$\left[Z_{ij}\right]\cdot\left[i_i(t)\right]=\left[e_{ial}(t)\right]$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

- *A partir de las intensidades de malla, se pueden determinar las tensiones e intensidades en todos y cada uno de los elementos del circuito.*



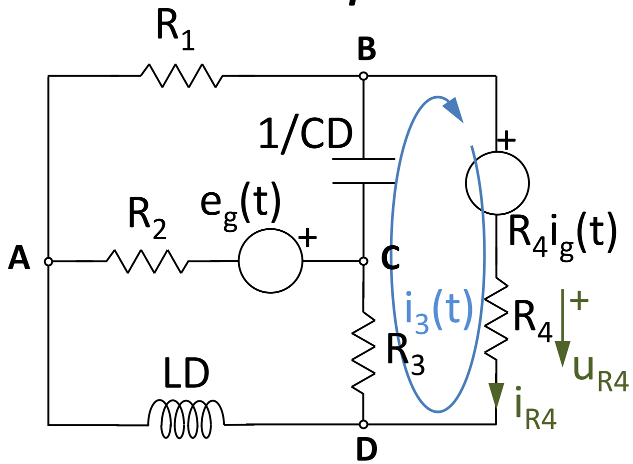
$$i_{R1}(t) = -i_1(t)$$
$$u_{R1}(t) = -R_1 \cdot i_1(t)$$

$$i_C(t) = \left(i_1(t) - i_3(t)\right)$$
$$u_C(t) = \frac{1}{CD} \cdot \left(i_1(t) - i_3(t)\right)$$

4.5.3. Método de análisis por mallas

- ***Atención*** *a las ramas "transformadas" y los elementos que las forman.*
  ¡Calcular tensiones e intensidades en el circuito original !

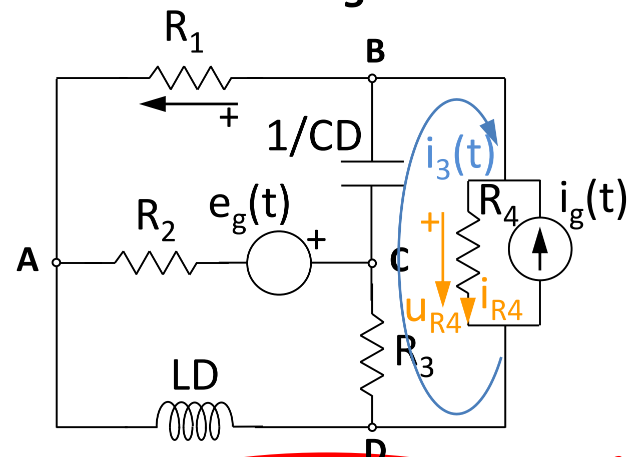
Circuito equivalente



$$i_{R4}(t) = i_3(t)$$
$$u_{R4}(t) = R_4 i_3(t)$$

Distintas !!!!!

Circuito original



$$i_{R4}(t) = i_3(t) + i_g(t)$$
$$u_{R4}(t) = R_4\left(i_3(t) + i_g(t)\right)$$

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

4.5.3 Análisis por mallas con fuentes ideales de corriente

4.5.3. *Análisis por mallas con fuentes ideales de corriente*

- ***Circuitos con fuentes ideales de intensidad:***
  - El método de mallas prefiere que las fuentes sean de tensión. Como no conocemos la manera de convertir una fuente ideal de intensidad en fuente de tensión, será necesario encontrar una forma de solventar este "inconveniente". **Procedimiento**:
  - Se da una referencia a la tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad.
  - Esta tensión en bornes de la fuente ideal de intensidad se trata, a todos los efectos, como se trata a la tensión en bornes de una fuente de tensión.

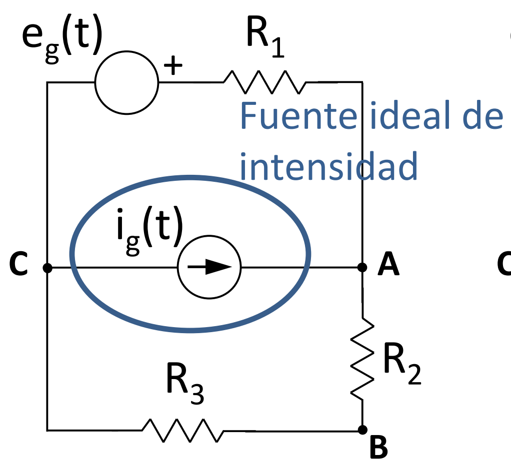
4.5.3. Análisis por mallas con fuentes ideales de corriente

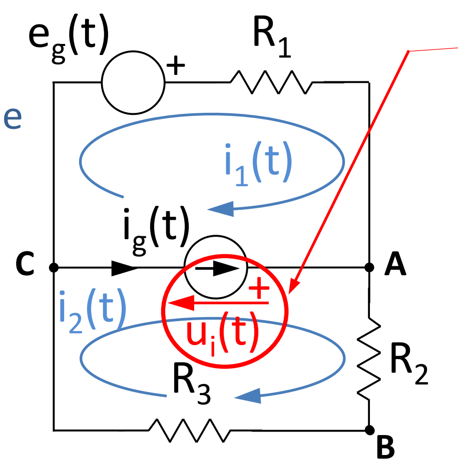
Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

- ***Circuitos con fuentes ideales de intensidad (cont)***
  - Esta tensión (que es desconocida), al tratarla como la tensión en bornes de una fuente, aparecerá en el vector de tensiones de alimentación de malla.
  - De esta manera, se ha añadido una incógnita al sistema de ecuaciones. Para que el sistema sea determinado, habrá que ***añadir una ecuación adicional*** que sea linealmente independiente de las ecuaciones escritas a partir del método de mallas.
  - **Forma de construir la ecuación adicional**: Se escribe lo que se conoce de la fuente ideal (el valor de su intensidad) en función de las incógnitas principales del método de análisis (las intensidades de malla).

4.5.3. Análisis por mallas con fuentes ideales de corriente

- *Ejemplo: Analizar el circuito por el método de las mallas*





Se dibuja, en sentido arbitrario, la tensión en bornes de la fuente (incógnita)

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_g(t) - u_i(t) \\ u_i(t) \end{bmatrix}$$

2 ecuaciones, 3 incógnitas: $i_1(t)$, $i_2(t)$ y $u_i(t)$

Ecuación adicional: $\boxed{i_g(t) = i_2(t) - i_1(t)}$

Lo que sabemos de la fuente: $i_g(t)$
En función de las incógnitas: $i_1(t)$, $i_2(t)$

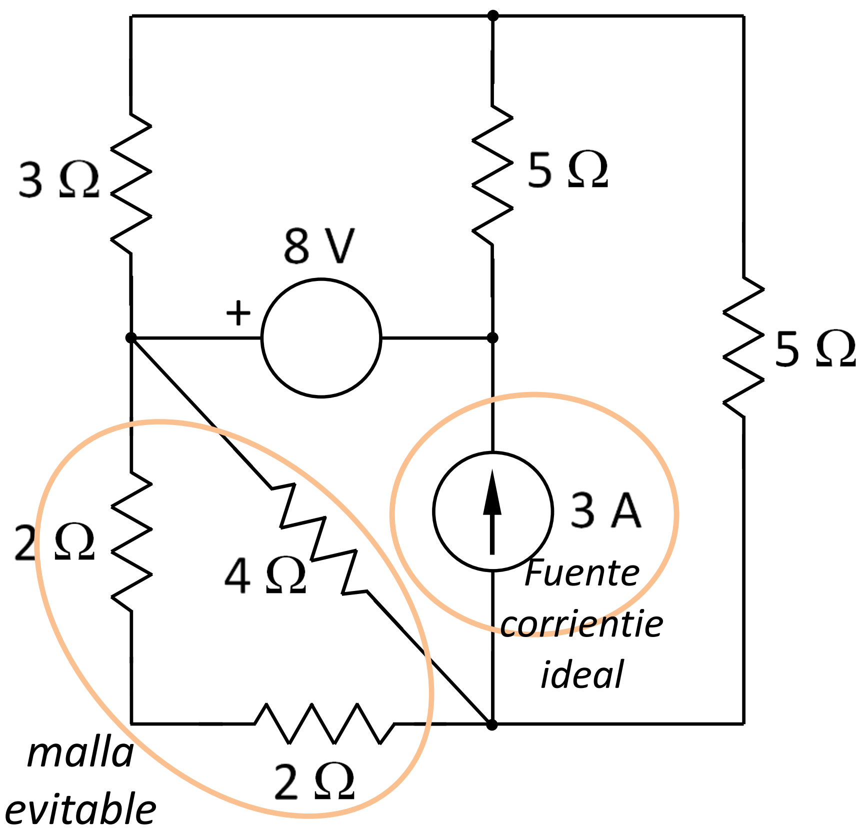
Por lo tanto: 3 ecuaciones, 3 incógnitas ⟶ SOLUCIÓN ÚNICA

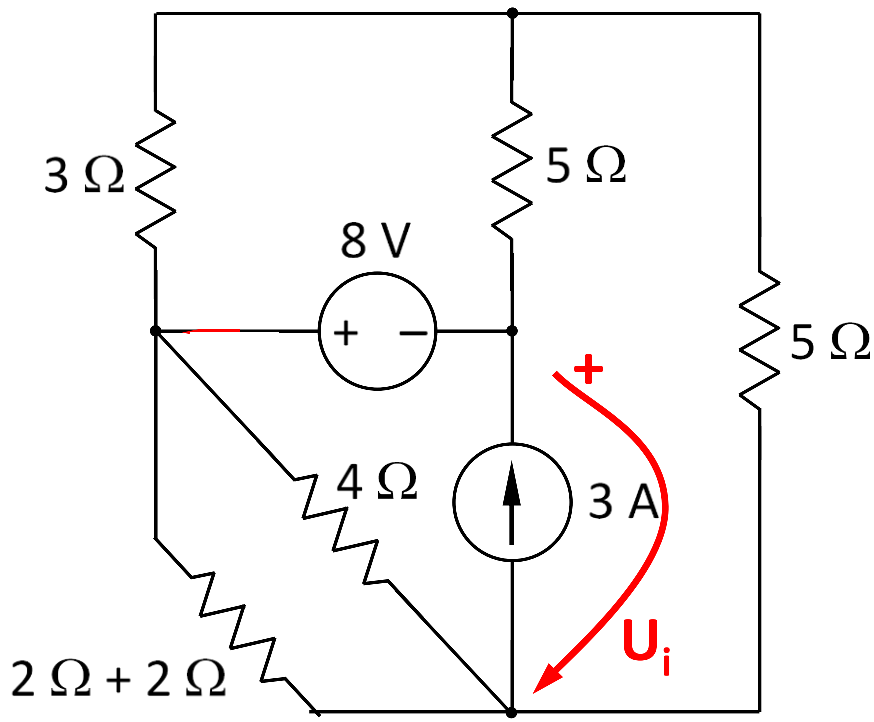
Ejercicio 4.10/4.12 del libro de problemas (apdo. por mallas).

Problema 4.10/4.12 del libro (apdo. por mallas).

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

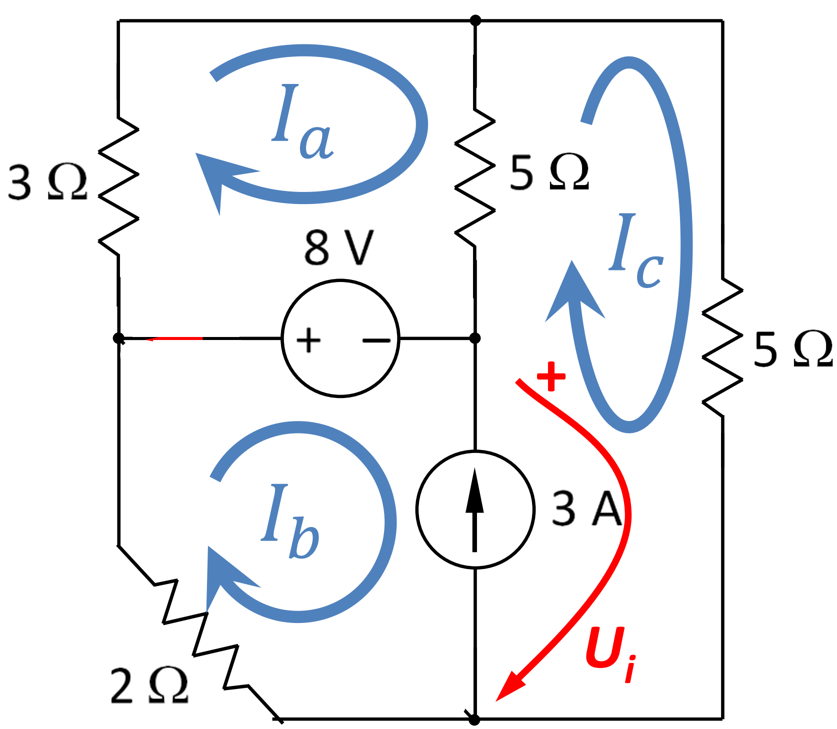
Determinar la potencia absorbida por la fuente de intensidad aplicando el método de análisis por mallas.





Problema 4.10/4.12 del libro (apdo. por mallas).

Determinar la potencia absorbida por la fuente de intensidad aplicando el método de análisis por mallas.



$$\begin{bmatrix} 3+5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 5+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +8 \\ -8-U_i \\ +U_i \end{bmatrix}$$

Ecuación adicional (fuente intensidad 3 A):

$$3 = +I_c - I_b$$

Resolviendo el sistema: $U_i = -2{,}67 \text{ V}$

$I_a = 1{,}21 \text{ A} \quad I_b = -2{,}66 \text{ A} \quad I_c = -0{,}338 \text{ A}$

Cálculo de la potencia de la fuente $I_g(t) = 3 \text{ A}$

$U_i \downarrow \; I_g(t) \uparrow$ (Referencias opuestas) $\Rightarrow$

$$P_{Ced\ i_g = 3\text{ A}} = U_i I_g(t) = (-2{,}68 \text{ V})(3 \text{ A}) = -8{,}02 \text{ W}$$

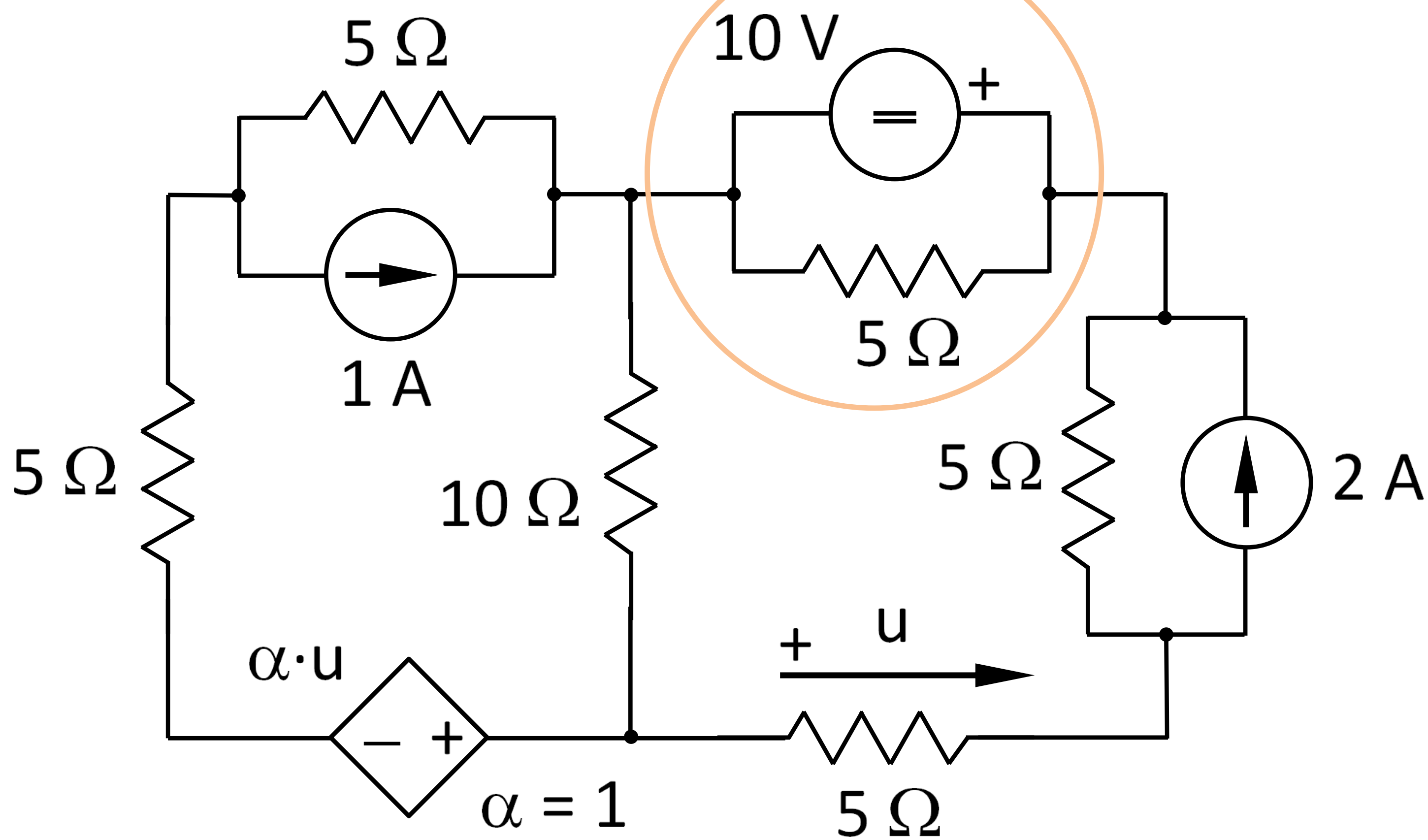
$$P_{Abs\ i_g = 3\text{ A}} = -P_{Ced\ i_g = 3\text{ A}} = +8{,}02 \text{ W}$$

Ejercicio 4.17/4.19 del libro de problemas

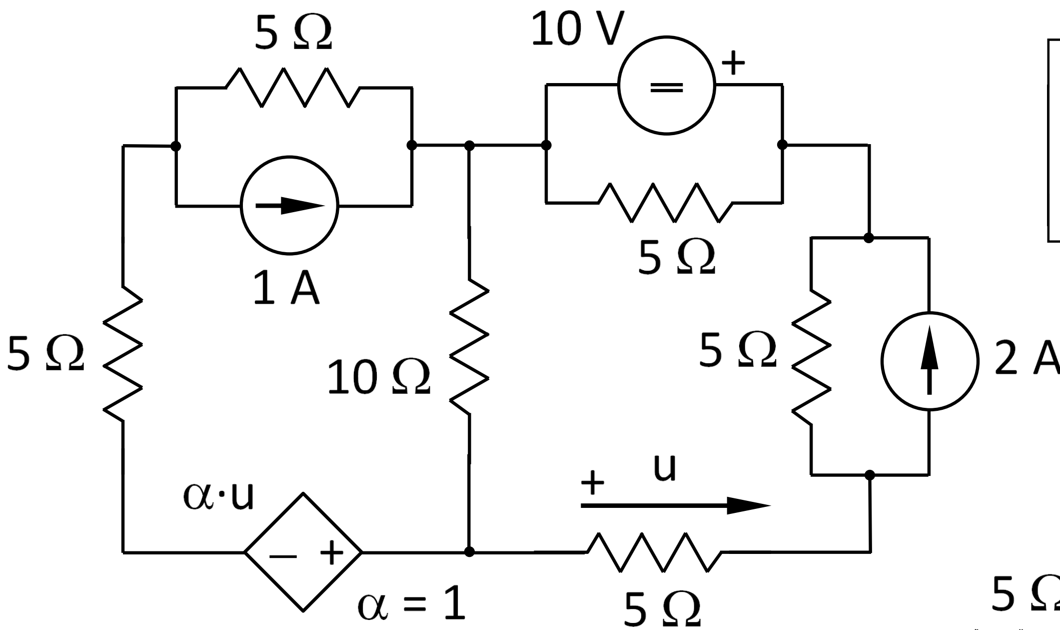
Ejercicio 4.17/4.19 del libro

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Utilizar el método de análisis por mallas para calcular el valor de la tensión *u*. Calcular también la potencia absorbida por la resistencia de 10 Ω y la suma de la potencia cedida por todas las fuentes.



Ejercicio 4.17/4.19 del libro

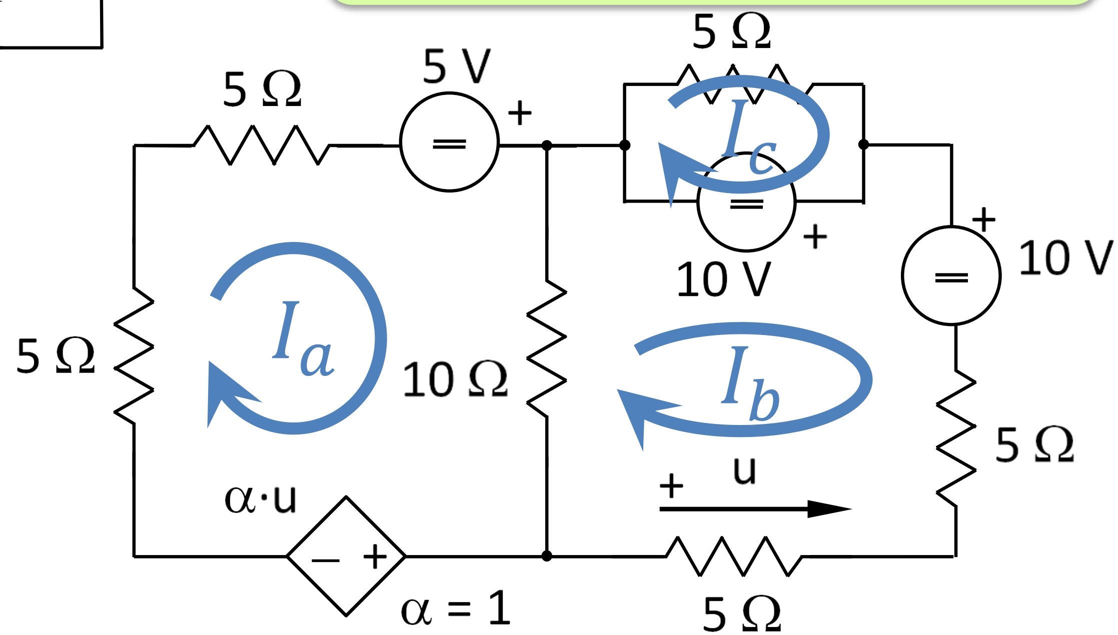


$$\begin{bmatrix} 5+10+5 & -10 & 0 \\ -10 & 5+5+10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-u \\ +10-10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Ec. adicional (x fte. dpte.): $u = -5I_b$

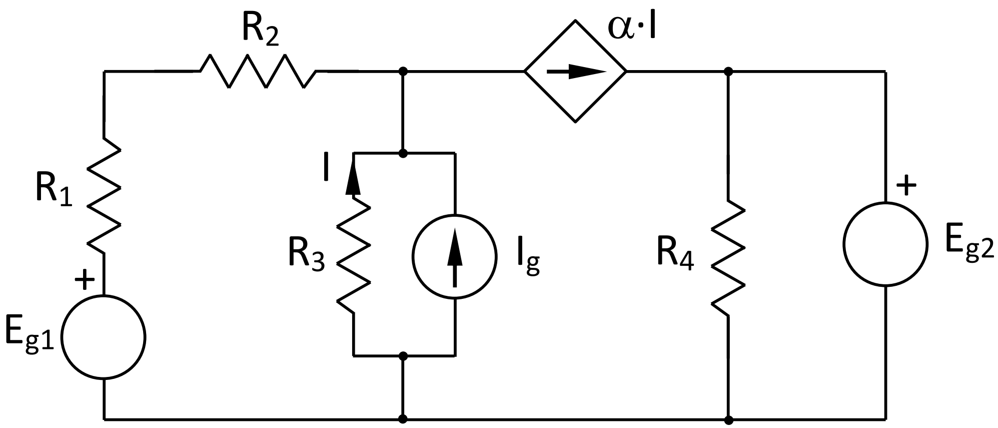
Resolviendo el sistema: $u = -1\ \mathrm{V}$

$I_a = 0{,}4\ \mathrm{A}$ $\quad I_b = 0{,}2\ \mathrm{A}$ $\quad I_c = -2\ \mathrm{A}$

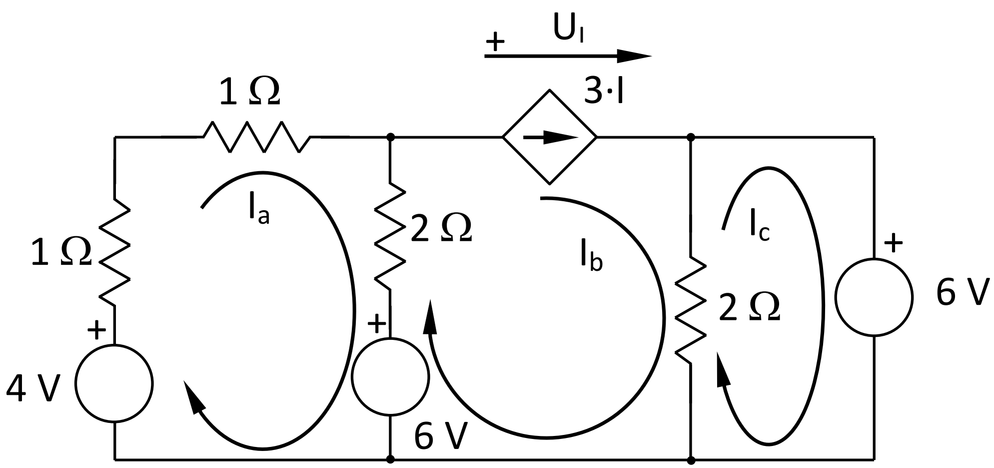


4.5.3 Problemas sencillos (♦) de mallas

M.2) Problema 4.4 del libro



$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$,
$R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$,
$E_{g1} = 4$ V, $E_{g2} = 6$ V,
$I_g = 3$ A, $\alpha = 3$.



$$\begin{bmatrix} 1+2+1 & -2 & 0 \\ -2 & 2+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 \\ 6-U_I \\ -6 \end{bmatrix}$$

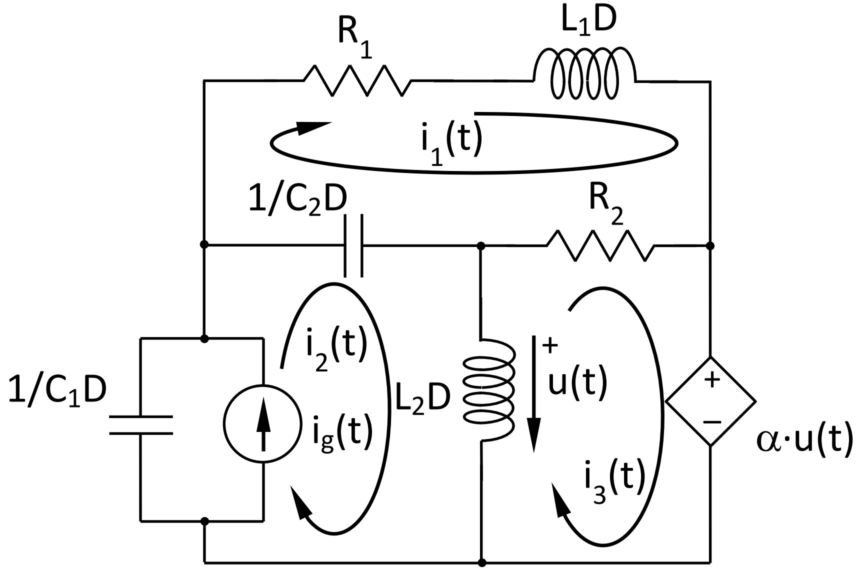
Ec. adicionales:

$$\alpha \cdot I = I_b \qquad I = -I_g - \left(I_a - I_b\right)$$

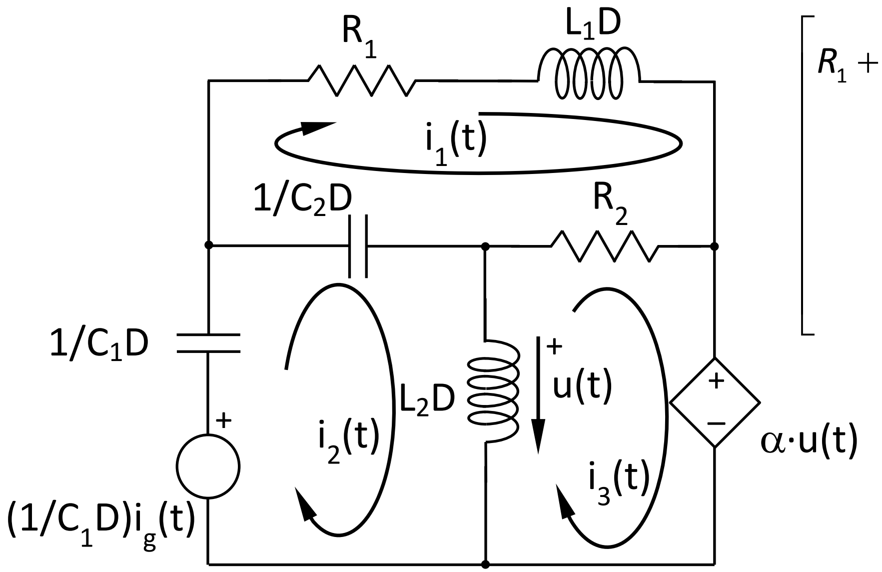
Solución sistema de ecuaciones			
	$I_a = 7$ A	$I_b = 15$ A	$I_c = 12$ A
	$I = 5$ A	$U_I = -16$ V	

M.3) Problema 4.6 del libro

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza



La tensión y la intensidad de las fuentes independientes no son constantes (no es un circuito de corriente continua)



$$\begin{bmatrix} R_1 + L_1D + R_2 + \dfrac{1}{C_2D} & -\dfrac{1}{C_2D} & -R_2 \\ -\dfrac{1}{C_2D} & \dfrac{1}{C_1D} + \dfrac{1}{C_2D} + L_2D & -L_2D \\ -R_2 & -L_2D & R_2 + L_2D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C_1D} i_g(t) \\ -\alpha \cdot u(t) \end{bmatrix}$$

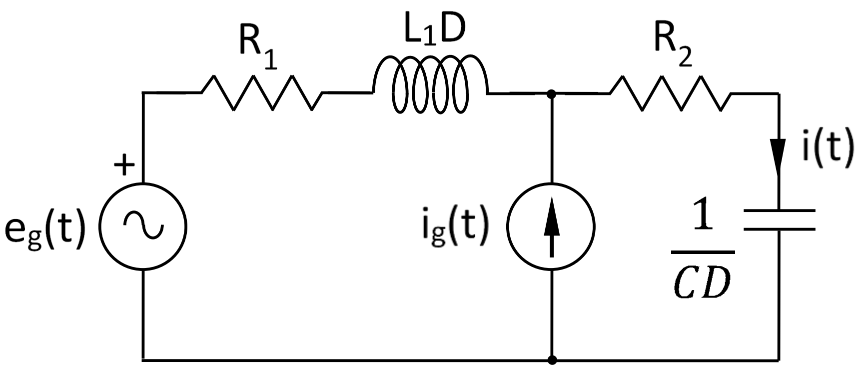
Ec. adicional: $u(t) = L_2D\big(i_2(t) - i_3(t)\big)$

M.4) Fuente transformada agrupando impedancias

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escribir todas las ecuaciones correspondientes al análisis por el método de mallas del siguiente circuito. Calcular i(t).

*Las tensiones y las corrientes **varían** con el **tiempo**.*

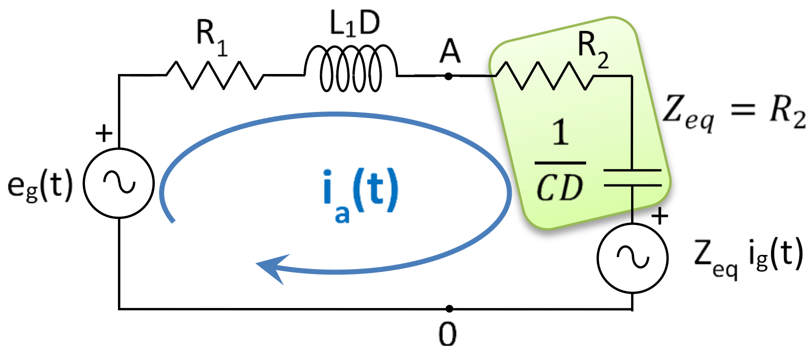


Circuitos con 1 malla: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$\left[R_1 + L_1 D + Z_{eq}\right]\left[i_a(t)\right] = \left[e_g(t) - Z_{eq} i_g(t)\right]$$

Suma de las tensiones en las impedancias (sentido horario)

Suma de las tensiones en las fuentes (sentido anti-horario)



$$Z_{eq} = R_2 + \frac{1}{CD}$$

$$i_a(t) = \frac{e_g(t) - Z_{eq} i_g(t)}{R_1 + L_1 D + Z_{eq}} = \frac{e_g(t) - \left[R_2 + \frac{1}{CD}\right] i_g(t)}{R_1 + L_1 D + R_2 + \frac{1}{CD}}$$

¿Corriente $i(t)$ por el **circuito original** ?

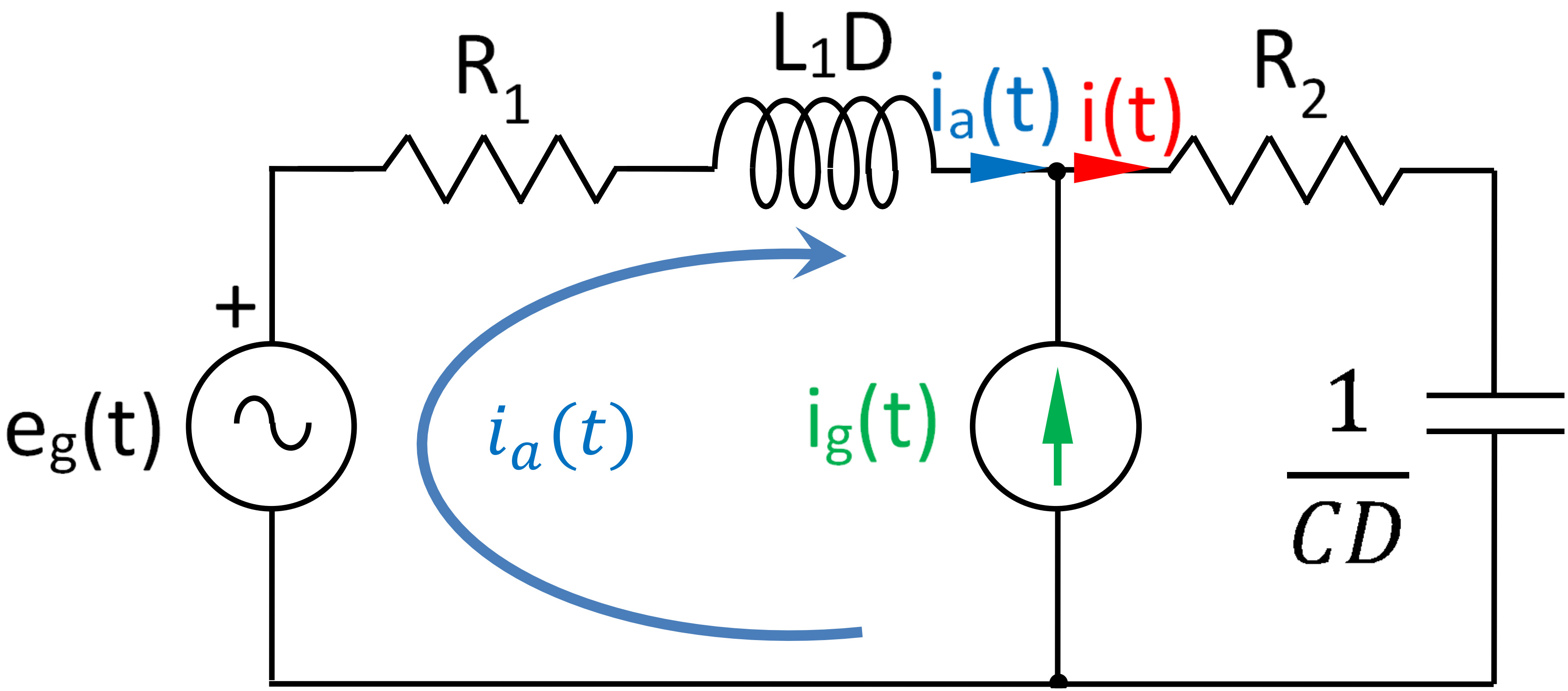
M.4) Vuelta al circuito original

(continuación)

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Corriente por el circuito original:

$$i_a(t) + i_g(t) = i(t)$$

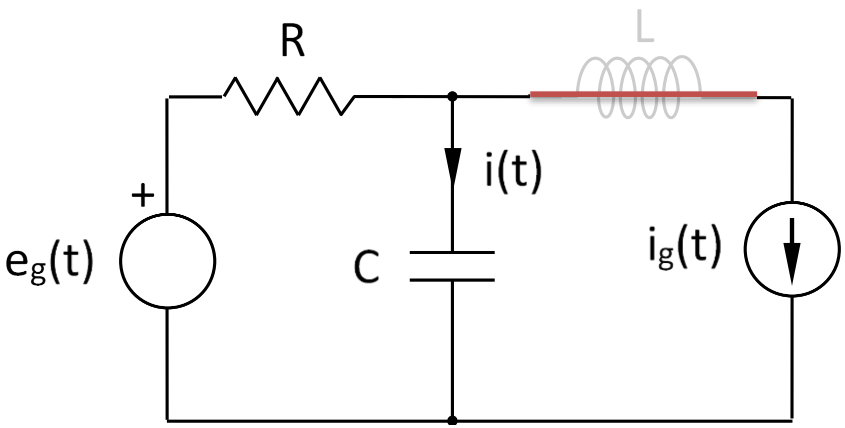


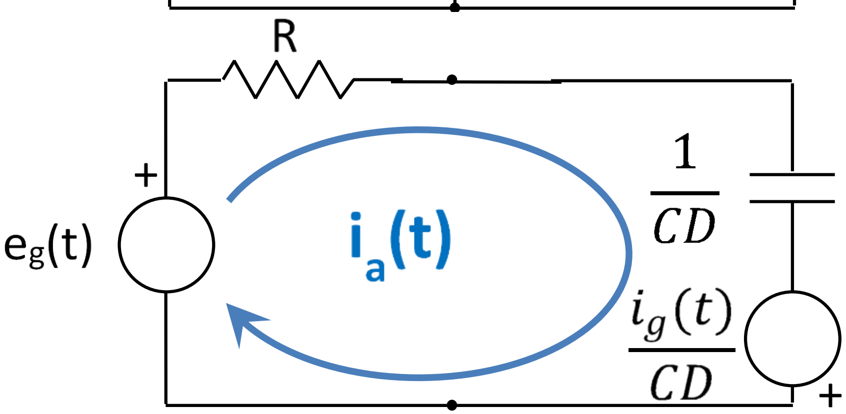
M.5) Resuelto eliminando impedancia en serie con fuente de corriente.

Centro Universitario de la Defensa Zaragoza

Escribir todas las ecuaciones correspondientes al análisis por el método de mallas del siguiente circuito. Calcular i(t).

*Las tensiones y las corrientes **varían** con el **tiempo**.*





Circuitos con 1 malla: Matriz 1x1 (1 ecuación)

$$[R+1/(CD)][i_a(t)] = [e_g(t) + i_g(t)/(CD)]$$

Suma de las tensiones en las impedancias (sentido horario)	Suma de las tensiones en las fuentes (sentido anti-horario)

$$i_a(t) = \frac{e_g(t) + i_g(t)/(CD)}{R+1/(CD)} = \frac{CDe_g(t) + i_g(t)}{CDR+1}$$

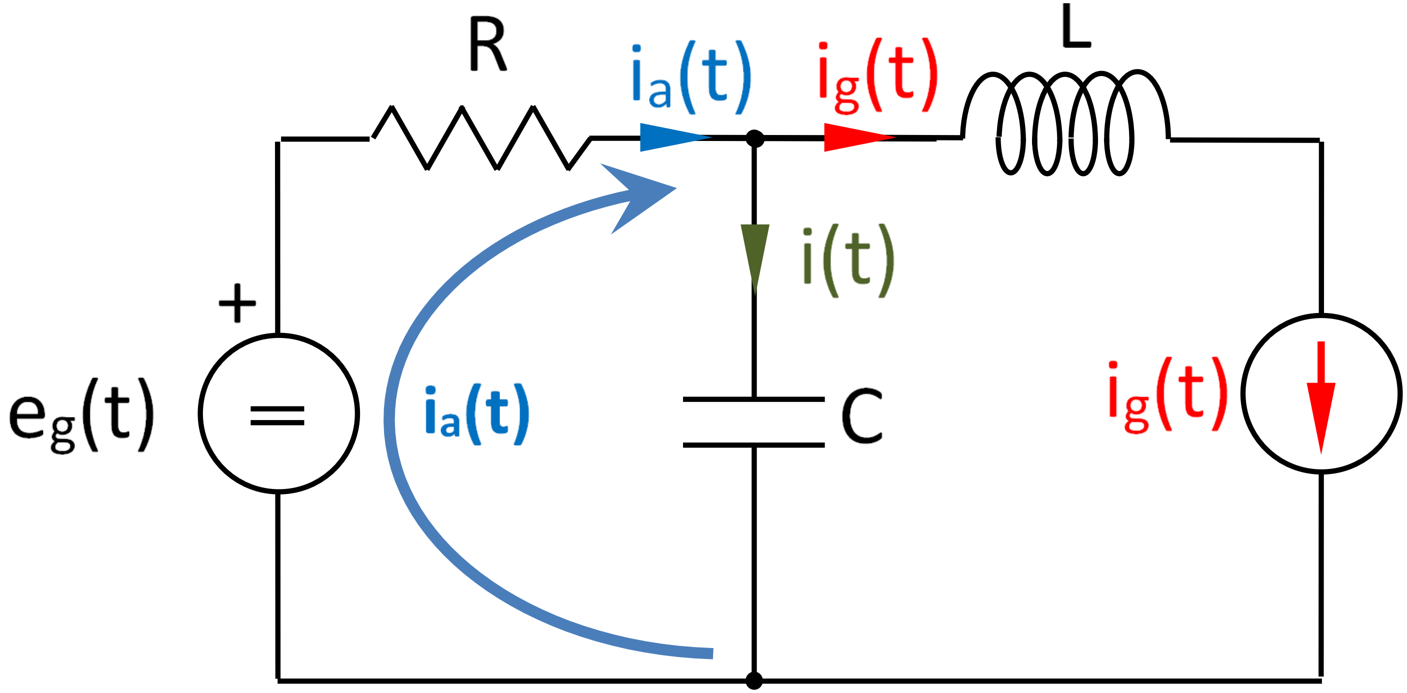
¿Corriente $i(t)$ por el **circuito original** ?

M.5) Vuelta al circuito original

(continuación)

Corriente por el circuito original:

$$i_a(t) = i(t) + i_g(t)$$



$$i(t) = i_a(t) - i_g(t)$$