

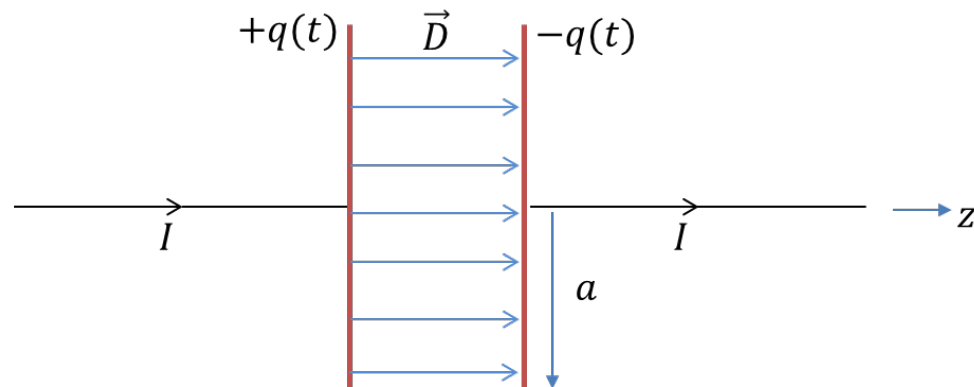
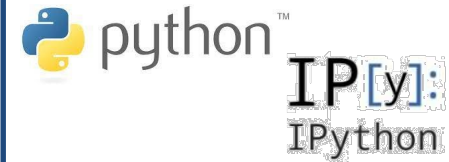
Ejercicio propuesto: condensador en proceso de carga

Enunciado

Solución analítica

Representación gráfica

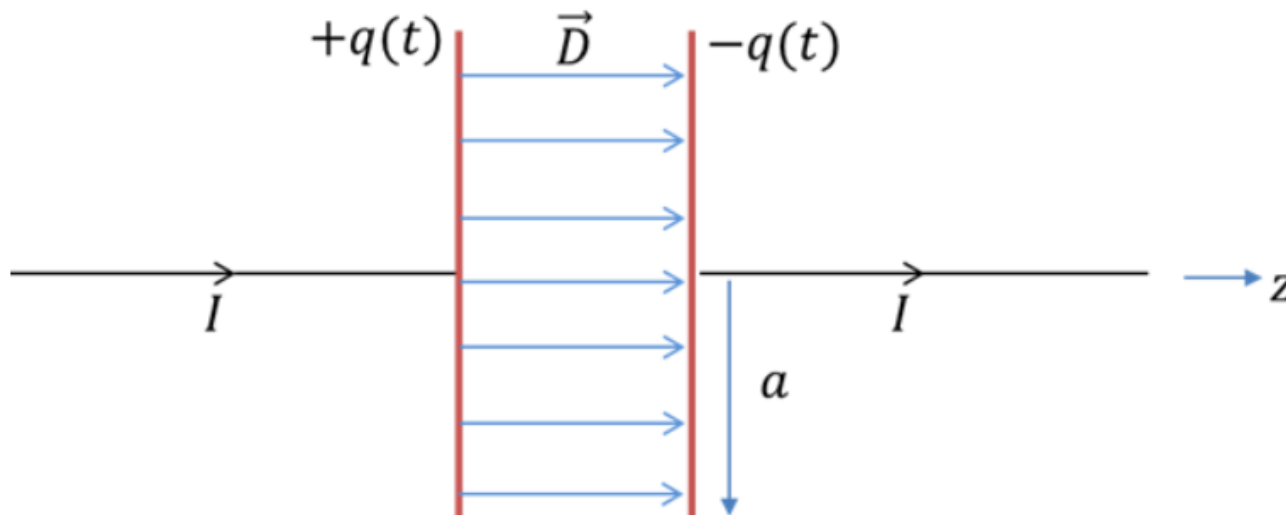
Funciones auxiliares para representación gráfica

Definición de funciones: $H_\varphi(\rho)$, $\mathbf{K} = K(\rho)\hat{\rho}$ y condiciones de contornoRepresentación polar de $H_\varphi(\rho)$ (región 1 y 2).Representación polar de $H_\varphi(\rho)$ (región 3 o 4).Condiciones de contorno: $H_1 - H_3$ vs $H_2 - H_3$, en función de ρ .Corriente superficial de carga $\mathbf{K} = K(\rho)\hat{\rho}$ Innovación docente: cuadernos interactivos *iPython*

▼ Enunciado

En la figura se muestra el perfil de un condensador de placas plano paralelas, circulares y de radio a . El condensador se carga lentamente mediante una corriente I .

- (a) Obtener la corriente de polarización entre las placas del condensador.
- (b) Calcular el campo magnético en todas las regiones del espacio.
- (c) Comprobar que se cumplen las condiciones de contorno para el campo magnético en la separación entre regiones.

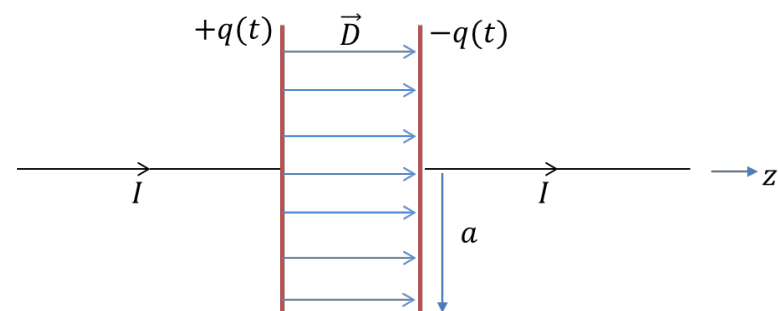


(a) Campo confinado únicamente entre las placas:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{cond}}}{\epsilon_0} \hat{z} = \frac{q}{\epsilon_0 \pi a^2} \hat{z}$$

Desplazamiento eléctrico:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{q}{\pi a^2} \hat{z}$$



Si el condensador se carga a ritmo constante mediante una corriente $I = dq/dt$ y asumiendo que la carga se distribuye sobre la superficie de la placa de forma instantánea (razonable si el ritmo de carga es mucho menor que el tiempo de relajación del conductor).

Entonces la corriente de polarización es:

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$$

Siendo la corriente de polarización:

$$I_{\text{pol}} = \int_A \mathbf{J}_{\text{pol}} \cdot \hat{n} da = \int_A \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \cdot \hat{n} da = I$$

(b) Cálculo de $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

Aproximación:

- $\mathbf{H} = H_\varphi(\rho)\hat{\varphi} \rightarrow$ placas circulares y corriente I a lo largo de la dirección z

Utilizando la ley de Ampère en este caso,

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_A \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \mathbf{n} da = \int_A [\mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{pol}}] \cdot \mathbf{n} da$$

integrando en una trayectoria circular perpendicular de radio ρ con centro en el eje z , se obtiene:

$$H_\varphi(\rho) = \frac{I_{\text{pol,enc}} + I_{\text{cond,enc}}}{2\pi\rho}$$

entonces los resultados son:

Región 3 y 4

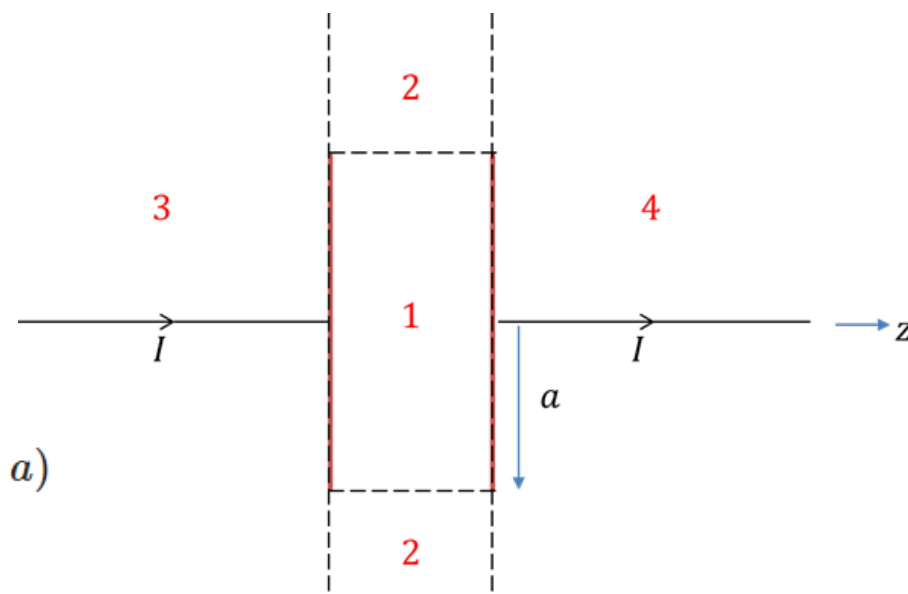
$$I_{\text{pol,enc}} = 0 \text{ y } I_{\text{cond,enc}} = I \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Región 2

$$I_{\text{pol,enc}} = I_{\text{pol}} = I \text{ y } I_{\text{cond}} = 0 \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} (\rho > a)$$

Región 1

$$I_{\text{cond}} = 0 \text{ y } I_{\text{pol,enc}}/I_{\text{pol}} = I_{\text{pol,enc}}/I = \pi\rho^2/\pi a^2 = \rho^2/a^2 \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I\rho}{2\pi a^2} (\rho \leq a)$$



c) Según las condiciones de contorno para el campo magnético

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \circ H_{2t} - H_{1t} = \mathbf{K} \times \hat{n}$$

Aquí la componente tangencial es $H_t = H_\varphi(\rho)$

- Entre las regiones 3 y 2 y 2 y 4 la corriente superficial de carga es cero y por lo tanto el campo magnético es continuo.
- Entre las regiones 1 y 3 (1 y 4) la corriente superficial de carga no es cero.
- Para hacer el cálculo podemos suponer que la carga se distribuye instantáneamente y de forma uniforme en las placas.
- Por simetría \mathbf{K} debe ser radial, $\mathbf{K} = K(\rho)\hat{\rho}$, como se representa en la figura de abajo.

• El flujo de carga (C/s) que entra a través de la superficie delimitada por ρ es

$$\Phi_S = \int K da = 2\pi\rho K$$

• En un instante Δt la carga que entra y se distribuye en las placas debe ser:

◦ por un lado $2\pi\rho K \Delta t$

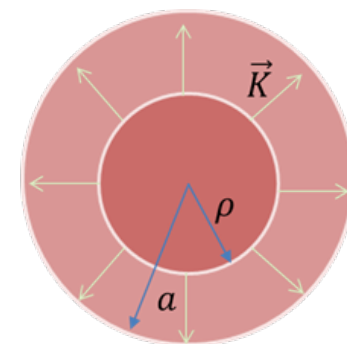
◦ por el otro $\Delta\sigma(\pi a^2 - \pi\rho^2) = \frac{\Delta q}{\pi a^2}(\pi a^2 - \pi\rho^2) = I\Delta t(1 - \rho^2/a^2)$, ya que

$$\Delta q = I\Delta t$$

• De igualar estas expresiones se obtiene que

$$K(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}(1 - \rho^2/a^2)$$

• Como $\hat{\rho} \times \hat{z} = -\hat{\varphi}$ y $|H_1 - H_3| = K(\rho)$ se cumplen las condiciones de contorno



- Definición de funciones: $H_\varphi(\rho)$, $\mathbf{K} = K(\rho)\hat{\rho}$ y condiciones de contorno

```

✓ [155] import numpy as np
0 s     from math import pi
        # Parámetros del ejercicio
        a= 0.1 # metros
        I= 0.1 # A

        # H región 1 y 2
        def H12(r,phi):
            if(np.max(r)<=a):
                return I*r/(2.0*pi*a**2)
            else:
                return I/(2.0*pi*r)

        # H región 3 y 4
        def H34(r,phi):
            return I/(2.0*pi*r)

        # Corriente superficial de carga K
        def K(r,phi):
            return I*(1.0-(r/a)**2)/(2.0*pi*r)

        # Condiciones de contorno entre región 1-3 y 2-3
        def cond_contorno(r,phi):
            return H12(r,phi)-H34(r,phi)
  
```

entonces los resultados son:

Región 3 y 4

$$I_{\text{pol,enc}} = 0 \text{ y } I_{\text{cond,enc}} = I \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Región 2

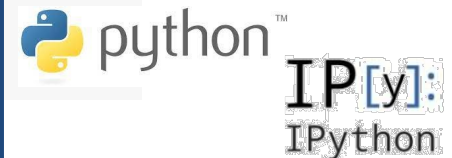
$$I_{\text{pol,enc}} = I_{\text{pol}} = I \text{ y } I_{\text{cond}} = 0 \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} (\rho > a)$$

Región 1

$$I_{\text{cond}} = 0 \text{ y } I_{\text{pol,enc}}/I_{\text{pol}} = I_{\text{pol,enc}}/I = \pi\rho^2/\pi a^2 = \rho^2/a^2 \rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{I\rho}{2\pi a^2} (\rho \leq a)$$

$$K(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} (1 - \rho^2/a^2)$$

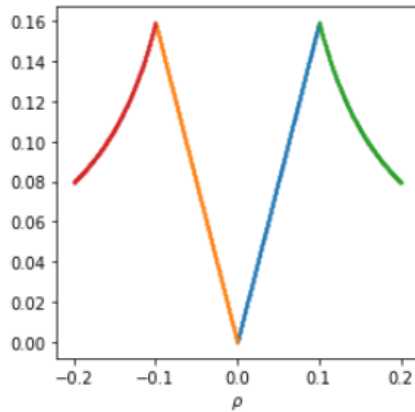
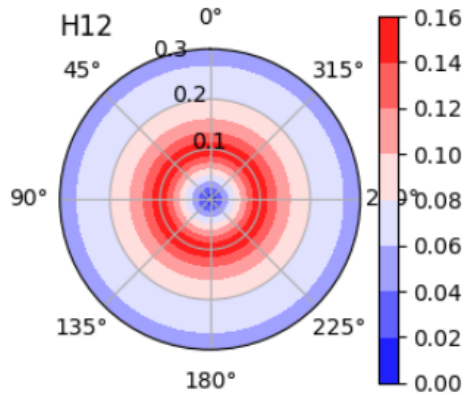
Innovación docente: cuadernos interactivos *iPython*



▼ Representación polar de $H_\varphi(\rho)$ (región 1 y 2).

```
[156] max_field=plot_field_polar(H12,Rcore_ini=0.0,Rcore_fin=a,Rmax=3.0*a)
      plot_field_radial(H12,Rcore_ini=0.0,Rcore_fin=a,Rmax=2.0*a)
```

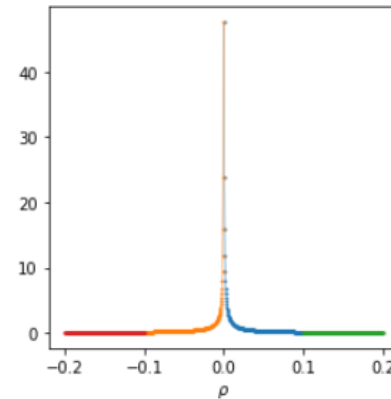
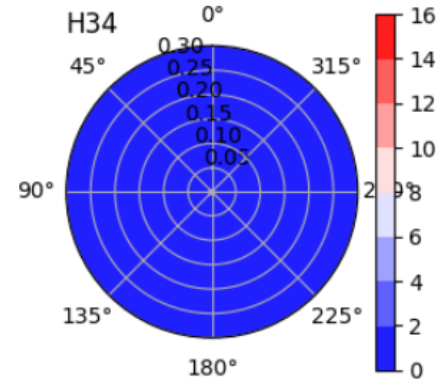
0.15915494309189535
max= 0.15915494309189535



▼ Representación polar de $H_\varphi(\rho)$ (región 3 o 4).

```
[157] max_field=plot_field_polar(H34,Rcore_ini=0.01*a,Rcore_fin=a,Rmax=3.0*a)
      plot_field_radial(H34,Rcore_ini=0.0,Rcore_fin=a,Rmax=2.0*a)
```

15.915494309189533
max= 15.915494309189533



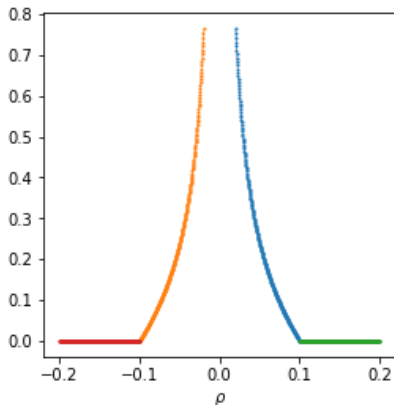
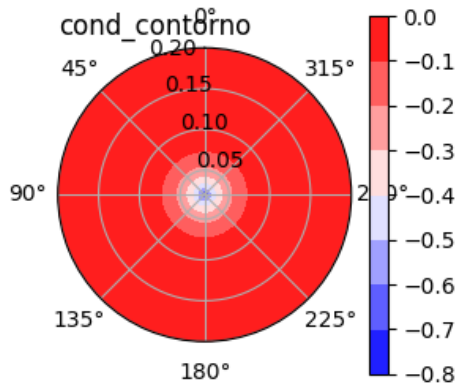
Condiciones de contorno: $H_1 - H_3$ vs $H_2 - H_3$, en función de ρ .

Corriente superficial de carga $\mathbf{K} = K(\rho)\hat{\rho}$

```
[158] plot_field_polar(cond_contorno,Rcore_ini=0.2*a,Rcore_fin=a,Rmax=2.0*a)
plot_field_radial(cond_contorno,Rcore_ini=0.2*a,Rcore_fin=a,Rmax=2.0*a)
```

```
print("H12-H34")
print('rho <= a',H12(r=0.5*a,phi=0.0)-H34(r=0.5*a,phi=0.0))
print('rho > a',H12(r=2.0*a,phi=0.0)-H34(r=2.0*a,phi=0.0))
```

0.0
max= 0.7639437268410976



H12-H34
rho <= a -0.238732414637843
rho > a 0.0

```
[56] plot_field_vector(K,Rcore_ini=0.3*a,Rcore_fin=a)
plot_field_radial(kr,Rcore_ini=0.04*a,Rcore_fin=a,Rmax=1.0*a)
```

