Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

ECUACIONES

CONCEPTOS

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones en las que aparece una o varias incógnitas.

En esta unidad se estudian las ecuaciones con una incógnita que se representa por una letra, generalmente la letra x. En un último apartado se hace una breve referencia a las ecuaciones con dos incógnitas, x e y.

Cuando la igualdad entre las dos expresiones se verifica para cualquier valor numérico de las incógnitas se llama identidad y no se considera una ecuación.

Ejemplo 1:

a) $-2x = 8$ es una ecuación con una incógnita

b) $\sqrt{x} + 3 - \ln x = 3$ es una ecuación con una incógnita

c) $x^2 - 2x = y - 1$ es una ecuación con dos incógnitas

d) La igualdad $3x + 6 = 3(x+2)$ no se considera una ecuación sino una identidad porque se verifica para cualquier valor de la variable x. En concreto, esta igualdad es cierta para cualquier valor de x debido a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Asimismo la igualdad $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es una identidad.

En toda la unidad se trabaja en el conjunto de los números reales.

Una **solución** de una ecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la igualdad.

Ejemplo 2:

a) $x = 9$ es solución de la ecuación $\sqrt{x} = x - 6$, ya que $\sqrt{9} = 9 - 6$

b) $x = -2$ y $x = 5$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$, ya que $(-2)^2 - 3(-2) - 10 = 0$ y $5^2 - 3.5 - 10 = 0$

c) La ecuación $e^x + 7 = 3$ no tiene ninguna solución, ya que e^x es un número positivo para cualquier valor de x

d) $(x, y) = (-1, 3)$ es solución de la ecuación $4x + y = -1$, ya que $4(-1) + 3 = -1$

Resolver una ecuación es calcular el conjunto de todas sus soluciones.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 = 9$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -3$

b) La ecuación $3x + 1 = 16$ tiene por solución $x = 5$

c) La ecuación $2^x = 16$ tiene por solución $x = 4$

d) La ecuación $e^x = 0$ no tiene solución

e) La ecuación $y - e^x + 4 = 0$ tiene por solución el conjunto de puntos $(x, e^x - 4)$ con x cualquier número real

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 4:

a) Las ecuaciones $3x + 1 = 16$ y $3x = 15$ son equivalentes, ya que ambas tienen como única solución $x = 5$

b) Las ecuaciones $x^2 = 9$ y $5x = 15$ no son equivalentes, ya que, aunque $x = 3$ es solución para ambas, la primera ecuación tiene además como solución $x = -3$

A continuación se enumeran algunas operaciones que permiten transformar una ecuación en otra equivalente, con el objetivo de obtener una ecuación más sencilla de resolver que la primera:

- Sumar o restar una misma expresión a los dos miembros de la ecuación.
- Multiplicar o dividir por una misma expresión no nula los dos miembros de la ecuación.

En algunos casos, mediante las dos operaciones anteriores, se puede resolver una ecuación obteniendo ecuaciones equivalentes hasta lograr despejar la incógnita.

Ejemplo 5:

Son ecuaciones equivalentes a la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ las siguientes:

sumando 13 a los dos miembros	$6x = 3x + 15$
restando $3x$ a los dos miembros	$3x = 15$
multiplicando por $\frac{1}{3}$ los dos miembros	$x = 5$

Por tanto, la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ tiene una única solución que es $x = 5$

ECUACIONES POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Las **ecuaciones polinómicas** son aquellas equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es cero. Así, una **ecuación polinómica de grado *n*** se puede escribir de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde a_n, a_{n-1}, ... y a_0 son los coeficientes de la ecuación y $a_n \neq 0$

Ejemplo 6:

a) $4x - 5 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 1

b) $3x^2 - 5x + 8 = 0$ es una ecuación polinómica de grado 2

c) $1 - x^6 = 7 + 2x$ es una ecuación polinómica de grado 6

d) $\frac{x - 1}{8} = \frac{x^2 - 1}{4}$ es una ecuación polinómica de grado 2

e) Las siguientes ecuaciones no son polinómicas: $4x - 5\sqrt{x} = 0$, $1 + e^x = 7$, $\frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{4}$

Ecuaciones polinómicas de primer grado

Una ecuación polinómica de primer grado o lineal es equivalente a una de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$.

Para resolverla se pasan todos los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, por último se despeja la incógnita y se obtiene una única solución:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo 7: Para resolver la ecuación $7x - 18 = 3x$, se realizan los siguientes pasos:

1º) se pasa 18 sumando al segundo miembro $7x = 3x + 18$

2º) se pasa $3x$ restando al primer miembro $4x = 18$

3º) se pasa 4 dividiendo al segundo miembro $x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

Por tanto, la ecuación $7x - 18 = 3x$ tiene una única solución que es $x = \frac{9}{2}$

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Una ecuación polinómica de segundo grado o cuadrática es equivalente a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Se puede demostrar que las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula anterior se le llama **discriminante** de la ecuación. Teniendo en cuenta que para resolver la ecuación es necesario calcular la raíz cuadrada del discriminante se tienen los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución que es doble o de multiplicidad 2 (se puede considerar que la ecuación tiene dos soluciones iguales).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución.

Observar que en esta unidad se considera que se resuelven las ecuaciones en el conjunto de los números reales. Si se hiciera la resolución en el conjunto de los números complejos, la conclusión del apartado c) sería que la ecuación no tiene raíces reales pero sí complejas. (Ver la Unidad Didáctica de Números Complejos)

Ejemplo 8: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.4.9}}{2.4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Por tanto, la única solución es $x = \frac{3}{2}$ que es doble o de multiplicidad 2.

c) $x^2 - 2x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.9}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{4}$ y se concluye que no existe solución ya que el discriminante es negativo.

En la resolución de determinadas ecuaciones polinómicas de grado 2 no merece la pena aplicar la fórmula anterior. En concreto, cuando el coeficiente b o c es cero la resolución es inmediata teniendo en cuenta que:

- Si $b = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + c = 0$ que se resuelve despejando x^2 y tomando raíces cuadradas si es posible

$$ax^2 + c = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-c}{a} \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}},\ \text{si } \frac{-c}{a} \geq 0$$

- Si $c = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + bx = 0$ y se resuelve sacando factor común la incógnita x y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos

$$ax^2 + bx = 0 \;\Rightarrow\; x\,(ax + b) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo 9: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 - 20 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = 4$ y tomado raíces cuadradas $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -2$ y $x = 2$.

b) $3x^2 + 7 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = \frac{-7}{3}$ y como el cuadrado de un número no puede ser negativo se deduce que la ecuación no tiene soluciones.

c) $-3x^2 + 4x = 0$. Sacando factor común la x se tiene $x(-3x + 4) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $-3x + 4 = 0$, es decir $x = \frac{4}{3}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.

Es útil tener en cuenta que si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene como soluciones r_1 y r_2 se puede escribir de las siguientes formas:

- $a\,(x - r_1)\,(x - r_2) = 0$
- $x^2 - sx + p = 0$, siendo s la suma de las soluciones, $s = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, y p el producto de las mismas, $p = r_1\, r_2 = \frac{c}{a}$

Ejemplo 10:

a) Las soluciones de la ecuación $-3x^2 + x + 2 = 0$ son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3).2}}{2(-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-6} = \frac{-1 \pm 5}{-6} = \begin{cases} \frac{-2}{3} \\ 1 \end{cases}$

Por tanto, la ecuación se puede escribir, $-3\left(x - \frac{-2}{3}\right)(x - 1) = 0$, es decir, $-3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) = 0$.

b) La ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ se puede resolver teniendo en cuenta que si r_1 y r_2 son las soluciones de la ecuación se ha de verificar que $r_1 + r_2 = -2$ y $r_1\, r_2 = -15$. Por tanto, es inmediato que las soluciones de la ecuación son $r_1 = -5$ y $r_2 = 3$.

c) La ecuación de segundo grado que verifica que la suma de sus soluciones es 5 y el producto 7 es $x^2 - 5x + 7 = 0$

Ecuaciones polinómicas de cualquier grado

Una ecuación polinómica de grado *n* es equivalente a una de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0$$

Si en una ecuación polinómica el polinomio está factorizado (está expresado como producto de polinomios de grado 1 o de mayor grado pero sin raíces reales), es inmediato el cálculo de sus soluciones teniendo en cuenta que un producto de factores es igual a cero si y sólo si alguno de los factores es nulo. De esta forma, las soluciones de la ecuación se obtendrán resolviendo cada una de las ecuaciones polinómicas obtenidas al igualar cada uno de los factores a cero.

Ejemplo 11: La ecuación $(2x^2 + 5)(x - 3)(1 + x) = 0$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -1$.

En efecto, al estar factorizado el polinomio, las soluciones de la ecuación se calculan resolviendo las siguientes ecuaciones:

$2x^2 + 5 = 0$ que no tiene soluciones

$x - 3 = 0$ cuya solución es $x = 3$

$1 + x = 0$ cuya solución es $x = -1$

Los siguientes resultados permiten, en algunos casos, factorizar un polinomio:

- Si no hay término independiente, es decir $a_0 = 0$, se saca factor común la mayor potencia posible de x
- La diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia
- Si un polinomio de coeficientes enteros es divisible por $x - x_0$, con x_0 un número entero, entonces x_0 es divisor del término independiente a_0
- Un polinomio es divisible por $x - x_0 \Leftrightarrow x_0$ es solución de la ecuación polinómica resultante de igualar ese polinomio a cero

Ejemplo 12 : Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(2x - 3)(1 - x)(x + 6) = 0$

Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\qquad$ $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$ y $x = -6$.

b) $2x^3 + 5x^2 = 0$

Para resolver esta ecuación, al ser el término independiente 0, se saca factor común x^2, quedando $x^2(2x + 5) = 0$. Al estar el polinomio factorizado las soluciones son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ doble $\qquad$ $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$

Por tanto, las soluciones son $x = 0$ doble y $x = \frac{-5}{2}$.

c) $x^4 - 25 = 0$

Teniendo en cuenta que el polinomio $x^4 - 25$ es diferencia de cuadrados (los cuadrados de x^2 y de 5), la ecuación se puede escribir de la forma $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores. Como la ecuación $x^2 + 5 = 0$ no tiene solución, las únicas soluciones de la ecuación inicial son las de $x^2 - 5 = 0$, es decir, $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

d) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

Para factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ se tiene en cuenta que los divisores enteros del término independiente, -2, son 1, -1, 2 y -2. Sustituyendo $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$ en la ecuación se observa que únicamente $x = -2$ es solución. Dividiendo $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ entre $x - (-2) = x + 2$, mediante la Regla de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -1 & -2 \\ -2 & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, el polinomio se puede escribir de la forma $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = (x + 2)(4x^2 - 1)$ y la ecuación inicial se puede expresar como $(x + 2)(4x^2 - 1) = 0$. Así, las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \qquad 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{-1}{2}$.

e) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

Aplicando la Regla de Ruffini para factorizar el polinomio $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & -4 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede expresar de la forma $(x + 1)^2 (x - 3)(x^2 + 1) = 0$. Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ doble} \qquad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad x^2 + 1 = 0 \text{ no tiene solución}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$ doble.

Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación bicuadrada es una ecuación polinómica de grado cuatro equivalente a una de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$.

Una ecuación de este tipo se resuelve transformándola en una ecuación de segundo grado con el cambio de variable $t = x^2$. Sustituyendo en la ecuación inicial se obtiene la ecuación polinómica de grado dos, $at^2 + bt + c = 0$. Resolviendo esta ecuación y considerando que $x = \pm\sqrt{t}$, se obtienen, si existen, las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 13: Resolver la ecuación $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación $t^2 - t - 6 = 0$, de donde $t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = \pm\sqrt{3}$ ya que $\pm\sqrt{-2}$ no son números reales.

ECUACIONES NO POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación no polinómica es, en general, más difícil de resolver que una ecuación polinómica. Por tanto, únicamente se tratan algunos tipos particulares.

Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un cociente de polinomios y el segundo es cero, es decir, $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Ejemplo 14: Son ecuaciones racionales: $\frac{x^2 - 1}{8x^4 - x + 1} = 0$, $\frac{x^3 - 1}{x^8 + 3x} = \frac{x^2 - 1}{4x^5}$

No son ecuaciones racionales: $4x - 5\sqrt{x} = 0$, $3x - 5\cos x + 8 = 0$

La soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación polinómica obtenida al igualar el numerador a cero que además no anulan al polinomio del denominador, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ que no anulan al denominador $Q(x)$.

Ejemplo 15: Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 + 6x + 5 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.5}}{2} = \ = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El denominador de la ecuación inicial, $x + 1$, se anula para la solución $x = -1$, por tanto, la única solución de la ecuación $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$ es $x = -5$.

Se observa que en esta ecuación al factorizar el polinomio del numerador, la ecuación queda $\frac{(x + 1)\,(x + 5)}{x + 1} = 0$ y simplificando el factor $x + 1$ se obtiene la ecuación $x + 5 = 0$ cuya solución es $x = -5$.

b) $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$

Para resolverla, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x\,(x + 2)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - (x^2 + 2x)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$$

Para resolver la ecuación $\frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$2 - 2x = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como $x = 1$ no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

En consecuencia, la solución de la ecuación $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$ es $x = 1$.

Ecuaciones con raíces

Son aquellas en las que la incógnita aparece en el radicando de una o varias raíces.

Para resolver este tipo de ecuaciones se procede como sigue:

- si sólo hay una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja esta raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz, obteniéndose una ecuación sin raíces
- si hay más de una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja una de las raíces en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al índice de dicha raíz. Se repite este proceso las veces que sea necesario, hasta obtener una ecuación sin raíces
- En cualquier caso, hay que tener en cuenta que si el índice de la raíz es un número par entonces la ecuación que se obtiene no tiene porqué ser equivalente a la inicial, ya que pueden aparecer otras soluciones. Por tanto, una vez calculadas las soluciones de esta ecuación sin raíces, se ha de comprobar si realmente son soluciones de la ecuación inicial

Ejemplo 16: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}$

Como únicamente hay una raíz, $\sqrt[3]{x+1}$, para resolverla se pasa la raíz del segundo miembro al primero, quedando

$$2\sqrt[3]{x+1} = x$$

se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$\left(2\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 8(x + 1) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 8x - 8 = 0$$

Para resolver esta ecuación polinómica, se factoriza mediante la regla de Ruffini el polinomio $x^3 - 8x - 8$.

	1	0	-8	-8
-2		-2	4	8
	1	-2	-4	0

Así, la ecuación polinómica se puede escribir de la forma $(x + 2)(x^2 - 2x - 4) = 0$ y sus soluciones son los valores que anulan alguno de los dos factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^3 - 8x - 8 = 0$ son $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{5}$ y $x = 1 - \sqrt{5}$.

Esta ecuación polinómica es equivalente a la inicial ya que el índice de la raíz es impar, por tanto, se puede asegurar que $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{5}$ y $x = 1 - \sqrt{5}$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}$.

b) $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$

En primer lugar, se despeja la raíz en un lado de la igualdad $\quad x - 5 = \sqrt{4x - 24}$

se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\quad (x - 5)^2 = 4x - 24$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $\quad x^2 - 14x + 49 = 0$

Resolviendo esta ecuación polinómica se obtiene que su solución es $x = \dfrac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4.1.49}}{2} = \; = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = 7$ doble.

En este caso se ha de comprobar si las soluciones de la ecuación polinómica lo son también de la ecuación inicial ya que al ser el índice de la raíz par, la ecuación obtenida puede no ser equivalente. Sustituyendo $x = 7$ en $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$ queda $5 = 5$ y, por tanto, se tiene que $x = 7$ es solución de la ecuación inicial.

c) $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$

En primer lugar, se deja la raíz en un lado de la igualdad $\quad \sqrt{x + 1} = x - 1$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad $\quad x + 1 = (x - 1)^2$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $\quad x^2 - 3x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda $x(x - 3) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 3$.

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación inicial se obtiene:

$x = 0$ no es solución de la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$, ya que sustituyendo se obtiene $2 = 0$

$x = 3$ es solución de la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$, ya que sustituyendo se obtiene $6 = 6$

Por tanto, la ecuación $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$ tiene como solución $x = 3$.

d) $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} = 2$

En primer lugar, se despeja una raíz $\quad \sqrt{2x + 9} = 2 + \sqrt{x + 1}$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad $\quad 2x + 9 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1}$

se deja la raíz en un miembro $\quad x + 4 = 4\sqrt{x + 1}$

se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad $\quad x^2 + 8x + 16 = 16x + 16$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica $\quad x^2 - 8x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda $x(x - 8) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 8$.

Sustituyendo estos valores de la incógnita en la ecuación $\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} = 2$ se comprueba que en ambos casos se cumple la igualdad, en consecuencia, las soluciones son $x = 0$ y $x = 8$.

e) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = x$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad, obteniéndose la ecuación $\dfrac{1}{x} = x^2$.

Para resolver la ecuación racional obtenida, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{1}{x} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x^3}{x} = 0$$

Para resolver la ecuación $\dfrac{1 - x^3}{x} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$1 - x^3 = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como $x = 1$ no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = x$ se comprueba que se cumple la igualdad, por tanto, la solución es $x = 1$.

Ecuaciones con funciones elementales sencillas (exponencial y logaritmo)

Teniendo en cuenta que la función exponencial es inversa de la logarítmica y viceversa, en ocasiones es posible resolver ciertas ecuaciones en las que aparece una de estas dos funciones.

Para facilitar esta resolución, se indican a continuación algunas cuestiones a tener en cuenta:

- Es conveniente comenzar a resolver la ecuación despejando en uno de sus miembros un término que contenga una de estas funciones
- Si en una ecuación se aplica la función exponencial o logarítmica a los dos miembros se obtiene una ecuación equivalente, en otras palabras, la función exponencial y logarítmica son inyectivas
- La función exponencial siempre toma valores positivos
- Únicamente se puede calcular el logaritmo de números positivos
- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de las potencias para simplificar la ecuación:

$$e^a\, e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de los logaritmos para simplificar la ecuación:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^b) = b\ln a$$

Ejemplo 17: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\ln x + 1 = 1$

Haciendo operaciones para dejar el término logarítmico en un miembro queda $\ln x = 0$

aplicando la función exponencial que es inversa de la logarítmica se obtiene $e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

Por tanto, la solución de la ecuación $\ln x + 1 = 1$ es $x = 1$

b) $e^{2x-3} - 3 = -2$

Haciendo operaciones para dejar el término exponencial en un miembro queda $e^{2x-3} = 1$

tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación $\ln(e^{2x-3}) = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{2x-3} - 3 = -2$ es $x = \frac{3}{2}$

c) $e^{3x+4} = -1$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función exponencial toma siempre valores positivos.

d) $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es inyectiva se obtiene la ecuación polinómica:

$$x^2 - 6 = -x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de x en la ecuación original se obtiene que la única solución de la ecuación $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$ es $x = -3$, ya que los términos $\ln(x^2 - 6)$ y $\ln(-x)$ no existen para $x = 2$.

e) $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$

Esta ecuación es equivalente a $e^{5x+5} = e^{-x-1}$ y teniendo en cuenta que la función exponencial es inyectiva, se obtiene:

$$5x + 5 = -x - 1 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$ es $x = -1$.

ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de una ecuación con dos incógnitas, x e y, es $F(x, y) = 0$, siendo F una función.

Ejemplo 18: Son ecuaciones con dos incógnitas las siguientes:

$$y - x + 3 = 0,\ \ x + \ln y = 4,\ \ x^2 - 5x - y = 3 - 4x^3,\ \ e^{x+2} = y - 2,\ \ x^2 - 5x - y = 0,\ \ x^2 + y^2 - xy = 5$$

En esta unidad principalmente se consideran aquellas ecuaciones en las que se pueda despejar una incógnita en función de la otra, es decir, aquellas que sean equivalentes a una de la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$, siendo f y g funciones de una variable.

La solución de la ecuación $y = f(x)$ es el conjunto de puntos (x, y) para los que se verifica dicha igualdad. Su representación gráfica corresponde a una curva en el plano de ejes cartesianos (análogamente para la ecuación $x = g(y)$).

Algunos tipos de ecuaciones con dos incógnitas a destacar por su sencillez y utilidad son:

- **Ecuaciones lineales**: $ax + by = c$, con $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

  El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una recta en el plano.

- **Ecuaciones cuadráticas**:

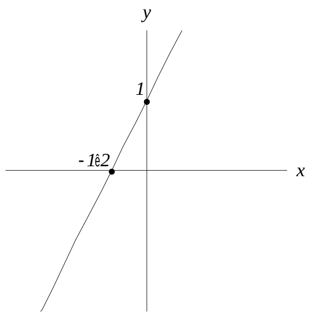
  * $y = ax^2 + bx + c$ (o $x = ay^2 + by + c$), con $a \neq 0$. El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una parábola en el plano.
  * $xy = a$, con $a \neq 0$. El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una hipérbola en el plano.
  * Ecuaciones equivalentes a una de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ con $r > 0$. El conjunto de soluciones de esta ecuación forman la circunferencia de centro el punto (a, b) y radio r.

Ejemplo 19: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x - y + 1 = 0$

Despejando y en función de x queda $y = 2x + 1$.

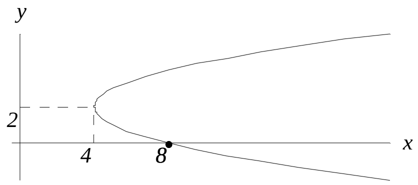
Por tanto, la solución de la ecuación lineal dada está formada por los puntos de la recta $y = 2x + 1$, es decir, los puntos de la forma $(x, 2x + 1)$, cuya representación se muestra en la siguiente figura:



b) $x - y^2 + 4y - 8 = 0$

Despejando x en función de y queda $x = y^2 - 4y + 8$.

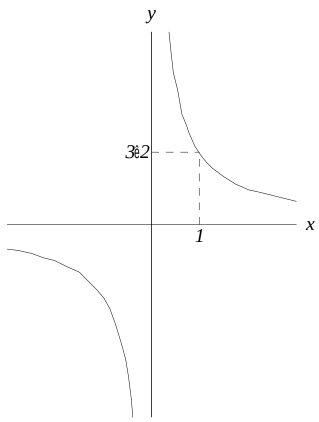
Por tanto, los puntos de la forma $(y^2 - 4y + 8, y)$ constituyen la solución de la ecuación cuadrática dada. Es decir, la solución es la parábola de eje horizontal $x = y^2 - 4y + 8$ representada en la siguiente figura:



c) $2xy - 3 = 0$

La ecuación se puede escribir de la forma $xy = \frac{3}{2}$, expresión que corresponde a una hipérbola.

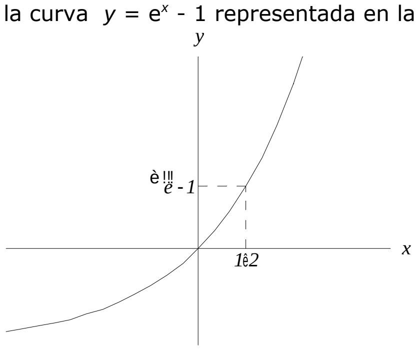
Por tanto, la solución de la ecuación cuadrática dada es la hipérbola $xy = \frac{3}{2}$ representada en la siguiente figura:



d) $y - e^x + 1 = 0$

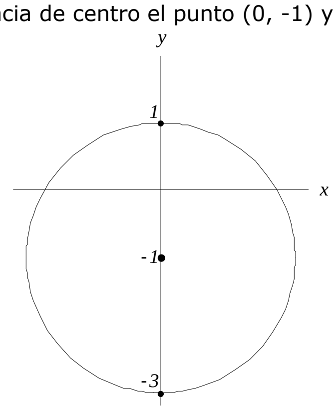
Despejando y en función de x queda $y = e^x - 1$.

Por tanto, la solución de esta ecuación es la curva $y = e^x - 1$ representada en la siguiente figura:



e) $x^2 + (y+1)^2 = 4$

La solución de esta ecuación es la circunferencia de centro el punto (0, -1) y radio 2 representada en la siguiente figura:



f) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

En primer lugar se intenta escribir la ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, para determinar el centro (a, b) y el radio r de la circunferencia.

Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar dos cuadrados perfectos:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = (x^2 - 3x) + (y^2 - 4y) = \left(x^2 - 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + (y^2 - 2.2y + (2)^2 - (2)^2) =$$

$$= \left(x^2 - 2\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + (y^2 - 2.2y + 4) - 4$$

Por tanto, la ecuación inicial se puede poner de la forma $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$ y su solución es la circunferencia de centro el punto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y radio $\frac{5}{2}$ representada en la siguiente figura