SISTEMAS DE ECUACIONES

CONCEPTOS

Un **sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas** es un conjunto de *m* ecuaciones que se pueden escribir de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{siendo } f_1, f_2, \dots, f_m \text{ funciones.}$$

En esta unidad, se trata fundamentalmente los sistemas de ecuaciones polinómicas, es decir, sistemas donde $f_1, f_2, \dots, f_m$ son polinomios. Si dichos polinomios son de grado 1, se dice que el sistema es lineal y en caso contrario, se dice que el sistema es no lineal.

Ejemplo 1: Son sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 7y + z = 0 \end{cases} \text{(sistema lineal)}, \quad \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ 3x + y^2 = 3 \end{cases} \text{(sistema no lineal)}, \quad \begin{cases} x^2 + y = e^z \\ 3x + y^2 + z = 0 \end{cases} \text{(sistema no polinómico)}$$

Resolver un sistema consiste en calcular el conjunto *S* (conjunto de soluciones) formado por los valores de las incógnitas que verifican al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema. Así, *S* es la intersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las ecuaciones que forman dicho sistema.

Para que la exposición resulte más sencilla, en el siguiente apartado se plantean sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas desarrollando los distintos métodos de resolución, y posteriormente se generalizan a mayor número de ecuaciones y de incógnitas.

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Se considera un sistema formado por dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

Método de resolución gráfica

Se basa en la representación gráfica en el plano de los conjuntos de soluciones S_1 y S_2 de cada una de las ecuaciones que componen el sistema, para después buscar los puntos comunes a ellos, es decir, $S_1 \cap S_2$.

En el caso de que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2: Resolver gráficamente el sistema $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

En primer lugar se representa los conjuntos soluciones de cada una de las ecuaciones. En este caso, como el sistema es lineal estos conjuntos S_1 y S_2 son rectas del plano.

Para dibujar la recta S_1 basta conocer dos puntos por los que pasa:

Si tomamos $x = 0$ y sustituimos en la primera ecuación obtenemos $y = -1$.

Si tomamos $x = 1$ y sustituimos en la primera ecuación obtenemos $y = 0$.

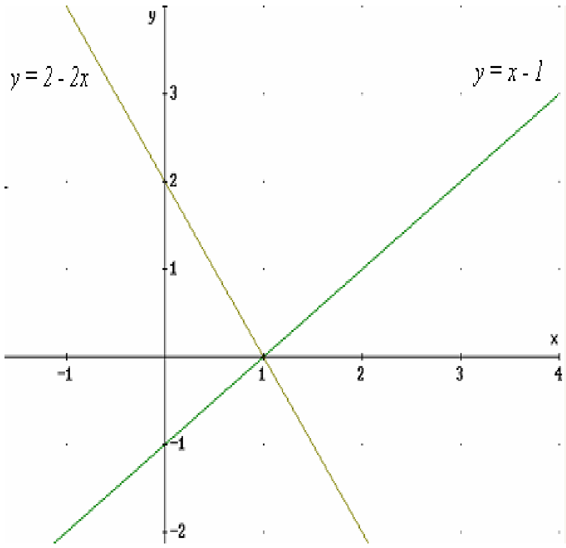
Luego la recta solución de la primera ecuación es la que une los puntos (0, -1) y (1, 0).

Análogamente procedemos para calcular la recta solución de la segunda ecuación:

Si tomamos $x = 0$ y sustituimos en la segunda ecuación obtenemos $y = 2$.

Si tomamos $x = 1$ y sustituimos en la segunda ecuación obtenemos $y = 0$.

Dibujando ambas rectas se observa que el único punto en el que se cortan es el (1, 0), que es la solución del sistema.



El inconveniente de este método es que en algunos casos no se ve claramente cuales son las coordenadas del punto o puntos de intersección. Por ello recurriremos a otros métodos más analíticos.

Método de igualación

Consiste en despejar de las dos ecuaciones del sistema la misma incógnita e igualar las expresiones obtenidas. Como resultado de ello se obtiene una ecuación con una incógnita que se ha de resolver. Las soluciones de esta ecuación se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener los valores de las otras incógnitas.

Ejemplo 3: Resolver el sistema no lineal $\begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ 6x + y = -5 \end{cases}$

Despejando la variable y de las dos ecuaciones queda $\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = -5 - 6x \end{cases}$

Igualando estas dos expresiones se obtiene $2x^2 - 1 = -5 - 6x$

Pasando todos los sumandos al primer miembro queda $2x^2 + 6x + 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \dfrac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de x en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda, se obtiene:

$x = -1 \Rightarrow y = -5 + 6 = 1$ $\qquad$ $x = -2 \Rightarrow y = -5 + 12 = 7$

Luego las soluciones del sistema son (-1, 1) y (-2, 7).

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra. De esta forma se obtiene una ecuación con una incógnita que una vez resuelta nos proporciona los valores de dicha incógnita. Sustituyendo estos valores en la expresión obtenida al despejar la otra incógnita, permite encontrar la solución buscada.

Ejemplo 4: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 6y + 3 = 0 \\ x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$

Para buscar su solución por el método de sustitución se elige una incógnita para despejarla, en este caso lo más sencillo es despejar x de la segunda ecuación quedando $x = 1 - 5y$.

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación se obtiene $2(1-5y) - 6y + 3 = 0$, es decir, $-16y + 5 = 0$.

Despejando y se obtiene $y = \frac{5}{16}$.

Al sustituir este valor en $x = 1 - 5y$ queda $x = 1 - 5\frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$.

Luego la solución del sistema es $x = -\frac{9}{16}$, $y = \frac{5}{16}$.

Método de reducción

Consiste en sustituir una de las ecuaciones del sistema $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ por la ecuación $tf(x,y) + sg(x,y) = 0$ con *t, s* números reales no nulos. El nuevo sistema obtenido es equivalente al inicial y por ello con igual solución.

Teniendo en cuenta lo anterior, el método de reducción se basa en elegir *t* y *s* de forma que la ecuación $tf(x,y) + sg(x,y) = 0$ permita o bien calcular los valores de una de las incógnitas, o bien obtener una relación sencilla entre las dos incógnitas.

Ejemplo 5: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

Para obtener una ecuación sin la incógnita x se multiplica la primera ecuación por 3, la segunda por -2 y se suman quedando

$$\begin{array}{r} 6x - 15y - 3 = 0 \\ \underline{-6x - 4y - 16 = 0} \\ -19y - 19 = 0 \end{array}$$

La nueva ecuación obtenida es $-19y - 19 = 0$ y sustituyendo la segunda ecuación por ella se obtiene el sistema $\begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ -19y - 19 = 0 \end{cases}$ que es equivalente al inicial.

Despejando y de la segunda ecuación obtenemos $y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación queda $2x + 5 - 1 = 0$ y por lo tanto $x = -2$. Luego la solución del sistema es (-2, -1).

Ejemplo 6: Resolver el sistema $\begin{cases} -8x + 8y + x^3 = 0 \\ 8x - 8y + y^3 = 0 \end{cases}$

Para obtener una relación más sencilla entre las incógnitas sumamos las dos ecuaciones quedando $y^3 + x^3 = 0$. El sistema $\begin{cases} -8x + 8y + x^3 = 0 \\ y^3 + x^3 = 0 \end{cases}$ es equivalente al dado y para resolverlo despejamos y^3 de la segunda ecuación obteniéndose $y^3 = -x^3$, y por lo tanto, $y = -x$.

Al sustituir este resultado en la primera ecuación se obtiene $-16x + x^3 = 0$, es decir, $x(-16 + x^2) = 0$.

Al resolver esta ecuación se obtiene $x = 0$ y $(-16 + x^2) = 0$, por lo tanto, $x = 0$, $x = \sqrt{16} = 4$ y $x = -\sqrt{16} = -4$.

Hallando los correspondientes valores de y se obtienen las soluciones del sistema que son (0, 0), (4, -4), (-4, 4).

SISTEMAS DE *M* ECUACIONES CON *N* INCÓGNITAS

Los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas del apartado anterior se pueden extender a sistemas con un mayor número de ecuaciones y de incógnitas, procediendo de forma similar. A continuación se plantean algunos ejemplos.

Ejemplo 7: Resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$ por el método de igualación.

Para ello, se despeja una variable, por ejemplo y, de las tres ecuaciones del sistema quedando $\begin{cases} y = 1 - x - z \\ y = 3x + z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$

Igualando dos a dos se obtiene $\begin{cases} 1 - x - z = 3x + z - 2 \\ 1 - x - z = z - 1 \\ 3x + z - 2 = z - 1 \end{cases}$

De esta manera se ha reducido el número de incógnitas del sistema a dos y escribiendo las incógnitas en un miembro y los términos independientes en otro, queda el sistema $\begin{cases} 4x + 2z = 3 \\ x + 2z = 2 \\ 3x = 1 \end{cases}$

Despejando x de la tercera ecuación se obtiene $x = \frac{1}{3}$ y sustituyendo en la primera queda $\frac{4}{3} + 2z = 3$, luego $z = \frac{3 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{5}{6}$.

Además, es necesario comprobar que los valores $x = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{5}{6}$ también verifican la segunda ecuación, ya que en caso contrario el sistema no tendría solución. En efecto, en este caso se verifica la igualdad ya que $\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} = 2$.

Para hallar y basta sustituir estos resultados en cualquiera de las ecuaciones en las que aparece despejada, por ejemplo en la tercera, $y = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$.

Por tanto, la solución del sistema es $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{6}$, $z = \frac{5}{6}$.

Ejemplo 8: Resolver el sistema no lineal $\begin{cases} y - x^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ por el método de sustitución.

Para resolver este sistema por el método de sustitución se elige una variable que se pueda despejar fácilmente, por ejemplo la y de la primera ecuación, quedando $y = 1 + x^2$, y se sustituye en el resto de ecuaciones obteniéndose un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el sistema inicial $\begin{cases} x + 1 + x^2 + z - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x^2 + x + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

Despejando otra de las variables, por ejemplo la z de la segunda ecuación se obtiene $z = 2x$.

Sustituyendo en la primera queda $x^2 + x + 2x = 0$, es decir, $x^2 + 3x = 0$.

Resolviendo esta última ecuación se obtiene $x = 0$, $x = -3$.

Para cada uno de los anteriores valores de x, hallamos los respectivos valores de y y de z sustituyendo en las correspondientes igualdades:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 + 0^2 = 1 , \ z = 2.0 = 0$$
$$x = -3 \Rightarrow y = 1 + (-3)^2 = 10 , \ z = 2.(-3) = -6$$

Por tanto, las soluciones del sistema son (0, 1, 0) y (-3, 10, -6).

Ejemplo 9: Resolver el sistema no polinómico $\begin{cases} y + z = 6 \\ e^x + y = 5 \\ z + e^x = 3 \end{cases}$ por el método de reducción.

Restando la segunda y la tercera ecuación se obtiene $y - z = 2$.

Uniendo este resultado con la primera ecuación nos da el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} y + z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

Sumando sus dos ecuaciones se tiene $2y = 8$, es decir, $y = 4$.

Sustituyendo este valor en una cualquiera de las ecuaciones del sistema $\begin{cases} y + z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases}$, por ejemplo en $y - z = 2$, se obtiene $z = 2$.

Para hallar x se sustituyen estos valores en una de las ecuaciones del sistema inicial en la que aparece esta incógnita, por ejemplo en $e^x + y = 5$, quedando $e^x = 1$, de donde se deduce $x = 0$.

Por tanto la solución del sistema es $x = 0$, $y = 4$, $z = 2$.