MATRICES

CONCEPTO

Se llama **matriz** de orden (dimensión) $m \times n$ a un conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Se representa por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ y de forma abreviada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ o $A = (a_{ij})$, siendo a_{ij} el elemento que se encuentra en la fila i y en la columna j.

Dos matrices son **iguales** si son del mismo orden y los elementos situados en el mismo lugar coinciden.

TIPOS DE MATRICES

• *Según el orden*

- **Matriz rectangular**: si el número de filas y el de columnas no coincide, es decir, $m \neq n$.

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz rectangular de orden 3×2

- **Matriz cuadrada** de orden n: si el número de filas y el de columnas coincide, es decir, $m = n$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forman la **diagonal principal** de A.

Ejemplo 2: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2 y su diagonal principal está formada por los elementos 3 y -7.

- **Matriz fila**: si sólo tiene una fila, es decir, $m = 1$.

Ejemplo 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- **Matriz columna**: si sólo tiene una columna, es decir, $n = 1$.

Ejemplo 4: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix}$

• *Según sus elementos*

- **Matriz nula**: si todos los elementos son 0. Se representa por $O_{m \times n}$ o simplemente por O.

Ejemplo 5: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz escalonada**: si al principio de cada fila (columna) hay al menos un elemento nulo más que en la fila (columna) anterior.

Ejemplo 6: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por filas y $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada por columnas.

- **Matriz triangular superior**: si es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son 0.

Ejemplo 7: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

- **Matriz triangular inferior**: si es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son 0.

Ejemplo 8: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

- **Matriz diagonal**: si es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están en la diagonal principal son 0.

Ejemplo 9: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

- **Matriz escalar**: si es una matriz diagonal en la que todos los elementos que están en la diagonal principal coinciden.

Ejemplo 10: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar.

- **Matriz identidad o matriz unidad**: si es una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. La matriz identidad de orden n se representa por I_n.

Ejemplo 11: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.

OPERACIONES CON MATRICES. PROPIEDADES

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden $m\times n$, la **matriz suma *A* + *B***, es otra matriz de orden $m\times n$ que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición.
Así, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ejemplo 12: $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 4+(-4) & 2+5 \\ 0+(-7) & -2+3 & \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -7 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Propiedades

1. *Asociativa*: $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. *Elemento neutro*: es la matriz nula O, ya que $A + O = O + A = A$

3. *Elemento simétrico*: el elemento simétrico de A es su matriz opuesta $-A = (-a_{ij})$ ya que se verifica $A + (-A) = (-A) + A = O$

4. *Conmutativa*: $A + B = B + A$

Producto de un número real por una matriz

Dados una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y un número real t, la **matriz producto *t.A***, es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por t. Así, $t.A = (t\ a_{ij})$.

Ejemplo 13: $5 . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-1) & 5.3 \\ 5.4 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades

1. $t.(A + B) = t.A + t.B$

2. $(t + s).A = t.A + s.A$

3. $1.A = A$

4. $t.(s.A) = (t\ s).A$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ de orden $p \times n$, la **matriz producto *AB***, es otra matriz de orden $m \times n$ en la que el elemento situado en la fila i y en la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matiz B de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

Ejemplo14: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3+(-1)(-1) & 2.1+(-1)2 \\ 0.3+3(-1) & 0.1+3.2 \\ -4.3+6(-1) & -4.1+6.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$

Observaciones

1. Para calcular AB es necesario que se verifique: nº de columnas de A = nº de filas de B

2. nº de filas de AB = nº de filas de A nº de columnas de AB = nº de columnas de B

Propiedades

1. *Asociativa*: $(AB)C = A(BC)$

2. *Distributiva del producto respecto a la suma*: $(A + B)C = AC + BC$; $A(B + C) = AB + AC$

3. Si A es una matriz de orden $m \times n$ se verifica: $I_m\, A = A$ y $A\, I_n = A$

El producto de matrices *no verifica la propiedad conmutativa*.

Dada una matriz cuadrada A de orden n se dice que es **regular (inversible)** o que tiene **matriz inversa** si existe otra matriz del mismo orden, llamada $\boldsymbol{A^{-1}}$, verificando $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ejemplo 15: La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2+3.1 & -1.3+3.1 \\ 1.2+(-2).1 & 1.3+(-2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)+3.1 & 2.3+3(-2) \\ 1(-1)+1.1 & 1.3+1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. La matriz inversa de una matriz, si existe, es única

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(t\,.\,A)^{-1} = t^{-1}\,.\,A^{-1}$, con t un número real distinto de cero

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Trasposición de matrices

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, la **matriz traspuesta $\boldsymbol{A^t}$**, es una matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas y las columnas de A.

Ejemplo 16: La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$.

Propiedades

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$

2. $(s\,.\,A)^t = s\,.\,A^t$

3. $(AB)^t = B^t A^t$

4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

OPERACIONES ELEMENTALES. RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama **operación elemental** realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes:

a) cambiar entre sí dos filas (columnas).

Se puede representar por $F_i \leftrightarrow F_j$, siendo F_i y F_j dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_j$, siendo C_i y C_j dos columnas de la matriz)

b) multiplicar una fila (columna) por un número real distinto de cero.

Se puede representar por $F_i \to t\, F_i$ ($C_i \to t\, C_i$)

c) sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real.

Se puede representar por $F_i \to F_i + t\, F_j$ ($C_i \to C_i + t\, C_j$)

Dos matrices A y B son **equivalentes** si una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales. Se puede representar por $\boldsymbol{A \approx B}$.

Ejemplo 17:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_2 \to -3C_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Cualquier matriz mediante operaciones elementales, bien por filas o por columnas, se puede convertir en una matriz escalonada equivalente. En este resultado se basa las dos aplicaciones siguientes.

Cálculo del rango de una matriz

El **rango** de una matriz A es el número de filas (columnas) no nulas de cualquier matriz escalonada por filas (columnas) equivalente a A. Se representa por **rg *A***.

Ejemplo 18: Se calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz escalonada por filas que se ha obtenido tiene dos filas no nulas, se tiene que rg $A = 2$.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS

Para obtener la matriz inversa de A se considera la matriz $(A|I_n)$ y se realizan aquellas operaciones elementales por filas que consigan transformar la matriz A en la matriz I_n, de esta forma la matriz

I_n se habrá transformado en A^{-1}. Es decir, se han de realizar operaciones elementales por filas de forma que $(A|I_n) \approx \ldots \approx (I_n|A^{-1})$.

También es posible obtener la matriz inversa de A mediante operaciones elementales por columnas de forma que $\left(\frac{A}{I_n}\right) \approx \ldots \approx \left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right)$.

Ejemplo 19: Se calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to -F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Los objetivos de las operaciones elementales realizadas son:

1ª equivalencia: se obtienen ceros por debajo de la diagonal principal (se triangulariza superiormente).

2ª equivalencia: se obtienen ceros por encima de la diagonal principal (se triangulariza inferiormente).

3ª equivalencia: se obtienen unos en la diagonal principal.

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.