Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL

CONCEPTOS BÁSICOS

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ en el que la función es continua, se sabe que cuando x toma valores infinitamente próximos a x_o, $f(x)$ se aproxima a $f(x_o)$, pero la continuidad no informa de cómo se realiza esta aproximación, por ejemplo, creciendo, decreciendo… El concepto de derivada que a continuación se define proporciona esta información.

Se llama **incremento de la variable independiente** x al valor $\Delta x = x - x_o$. Este valor da una medida de la proximidad entre x y x_o, de forma que $x \to x_o$ es equivalente a $\Delta x \to 0$.

Se llama **incremento de la variable dependiente** y al valor $\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x) - f(x_o)$. Este valor da una medida de la proximidad entre $f(x)$ y $f(x_o)$.

Se llama **cociente incremental** al valor $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$. Este cociente da una medida de la proporción en que se encuentra los incrementos definidos anteriormente.

Si se considera puntos infinitamente próximos a x_o hay que calcular el límite del cociente incremental cuando $x \to x_o$, lo que nos lleva a la definición de derivada en el punto x_o.

Se llama **derivada de *f* en el punto x_o**, al número real, si existe, dado por:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Utilizando incrementos este límite se puede escribir de la forma $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$ teniendo en cuenta que $x = x_o + \Delta x$.

Este concepto se representa habitualmente por $\boldsymbol{f'(x_o)}$, $\boldsymbol{\dfrac{df(x_o)}{dx}}$ o $\boldsymbol{Df(x_o)}$.

Si existe $f'(x_o)$ se dice que f es **derivable en el punto x_o**.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = 2x^2 + x - 1$, se calcula $f'(-1)$ como sigue:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -3$$

Como la definición de derivada viene dada por un límite, se pueden definir los siguientes conceptos:

- Se llama **derivada lateral por la derecha de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^+) = \displaystyle\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.
- Se llama **derivada lateral por la izquierda de *f* en x_o** al número real, si existe, dado por $f'(x_o^-) = \displaystyle\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

En el caso de que $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$ se tiene que f es derivable en x_o y $f'(x_o) = f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$.

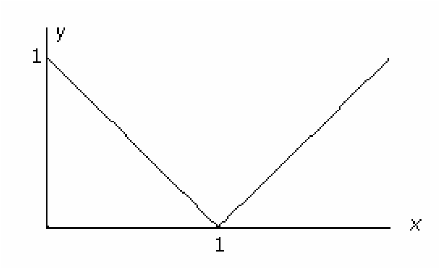
Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ para estudiar su derivabilidad en x = 1, se calculan sus derivadas laterales ya que la definición de *f* es distinta a la derecha e izquierda de *x* = 1:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

Como $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, la función no es derivable en *x* = 1.

Al representar la función se observa que en *x* = 1 la gráfica presenta un pico debido a que sus derivadas laterales no coinciden.

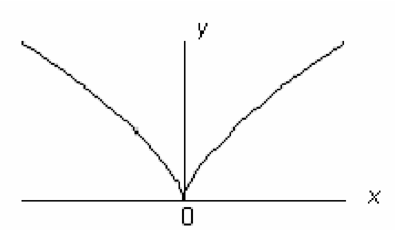


Ejemplo 3: Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, veamos si es derivable en *x* = 0 calculando sus derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Al no existir las derivadas laterales la función no es derivable en *x* = 0. Como los límites anteriores son distintos la gráfica presenta en *x* = 0 un punto de pico.



Una condición necesaria para que la función *f* sea derivable en un punto x_o es que sea continua en x_o , es decir:

$$f \text{ derivable en } x_o \in D \quad \Rightarrow \quad f \text{ continua en } x_o$$

Notar que el reciproco no tiene porqué ser cierto, es decir, que hay funciones que son continuas en un punto y sin embargo, no son derivables en él. Normalmente esta propiedad se aplica de la siguiente forma, si una función no es continua en un punto, tampoco será derivable en dicho punto.

Ejemplo 4: Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad y derivabilidad en *x* = 1.

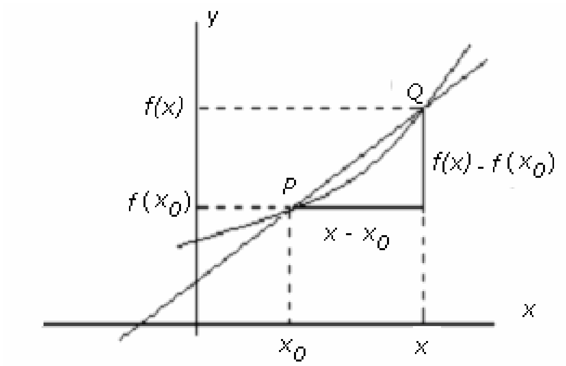
Para estudiar la continuidad hay que calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Como la definición de *f* cambia antes y después del punto $x = 1$, es necesario hallar los límites laterales, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 2$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Al ser distintos los límites laterales se concluye que *f* no es continua en $x = 1$, por tanto, *f* no es derivable en $x = 1$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

A continuación se obtiene la interpretación geométrica del concepto de derivada de una función en un punto, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

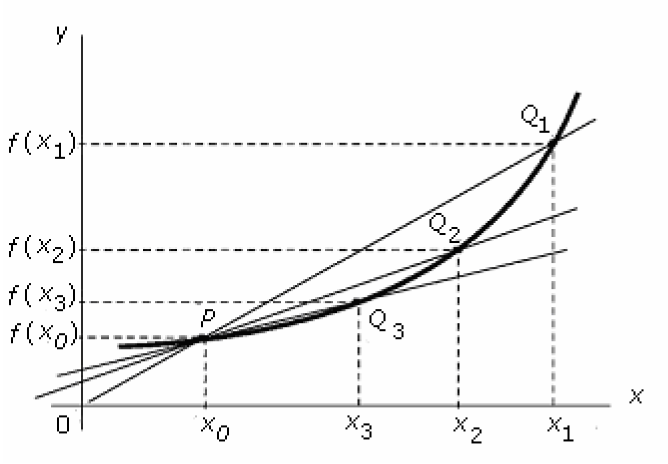
Si dibujamos la gráfica de $y = f(x)$ podemos observar en la siguiente figura que el cociente incremental $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ a la curva $y = f(x)$, que pasa por los puntos $P = (x_0, f(x_0))$ y $Q = (x, f(x))$, es decir, $m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Repitiendo este proceso con sucesivos puntos $Q_1, Q_2, ..., Q_i, ...$ cada vez más próximos al punto $P=(x_0, f(x_0))$ se deduce que:

- la recta tangente a la curva en el punto *P* es la recta límite de una series de rectas secantes a dicha curva que pasan por el punto *P* y otros puntos $Q_1, Q_2, Q_3...$ que van aproximándose a *P*.

- la pendiente de la recta tangente será el límite, si existe, de las pendientes de las rectas secantes a la curva que pasan por los puntos $\overline{PQ_1}$, $\overline{PQ_2}$,..., cuando Q_i está cada vez más próximo a *P*.



Cuando $x \to x_o$, es decir, $Q_i \to P$, si existe $\lim\limits_{Q_i \to P} m_{\overline{PQ_i}} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ nos da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

Por tanto, teniendo en cuenta que $f\,'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, se concluye que la derivada de *f* en el punto x_o es la pendiente a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en *P*.

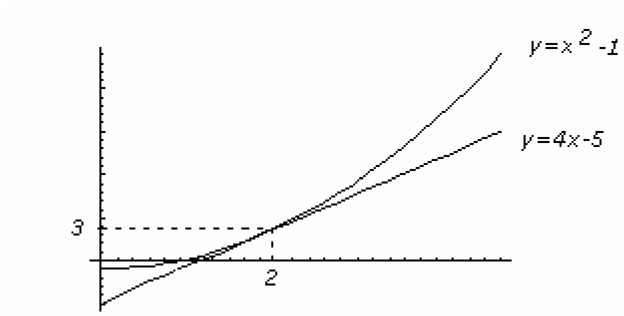
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_o, conocida su pendiente, se puede escribir de la forma:

$$y - f(x_o) = f\,'(x_o)(x - x_o)$$

Ejemplo 5: Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $x = 2$.

La pendiente es $f\,'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f\,'(2)(x - 2)$, es decir, $y - 3 = 4(x - 2)$, y operando queda $y = 4x - 5$.



FUNCIÓN DERIVADA. PROPIEDADES

Si una función $f(x)$ tiene derivada en todos los puntos de un conjunto $A \subseteq D$, se dice que f es derivable en *A*. En este caso, se puede definir una nueva función se denota por $f\,'$, $\dfrac{df}{dx}$ o *Df* y se llama **función derivada de *f*** dada por $f\,': A \to$ Ñ con $f\,'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes **reglas de derivación** que indican como obtener la función derivada de las funciones elementales más utilizadas.

$f(x) = c$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = 0$
$f(x) = x^a$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = a^x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ con a > 0	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propiedades

1. Si *f* y *g* son dos funciones derivables entonces *f* + *g* también lo es y $(f+g)'(x) = f\,'(x) + g\,'(x)$.
2. Si *f* es una función derivable y *t* un número real cualquiera entonces *t.f* también lo es y $(t.\,f)'(x) = t\ f\,'(x)$
3. Si *f* y *g* son dos funciones derivables, entonces, *f.g* también lo es y $(f.\,g)'(x) = f\,'(x)g(x) + f(x)g\,'(x)$.
4. Si *f* y *g* son dos funciones derivables con $g(x) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ también lo es y $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f\,'(x)g(x) - f(x)g\,'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
5. Si *f* es derivable en *x* y *g* lo es en *f*(*x*) entonces $g \circ f$ es derivable en *x* y $(g \circ f)'(x) = g\,'(f(x))\ f\,'(x)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *Regla de la cadena*.
6. Si *f* es una función inyectiva y derivable en *x* con $f\,'(x) \neq 0$ entonces la función inversa f^{-1} es derivable en $f(x)$ y $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f\,'(x)}$.

Aplicando estas propiedades y las reglas de derivación se puede obtener fácilmente la función derivada de las funciones más habituales.

Ejemplo 6: Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + \text{sen}x$, derivando cada sumando se obtiene, $f'(x) = 2x + \cos x$

b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$, escribiendo la función de la forma $f(x) = x^3 - x^{-2} + x^{\frac{2}{3}}$ y derivando cada sumando queda

$$f'(x) = 3x^2 - (-2)x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

c) $f(x) = x^3e^{2x}$, aplicando la regla de derivación del producto queda, $f'(x) = 3x^2e^{2x} + x^3 2e^{2x} = 3x^2e^{2x} + 2x^3e^{2x}$.

d) $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{-x + 2}$, aplicando la regla de derivación del cociente queda

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(-x + 2) - (x^3 - x + 1)(-1)}{(-x + 2)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{(-x + 2)^2}$$

e) $f(x) = \ln\frac{x + 1}{x - 1}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{-2}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = e^{\text{sen}3x}$, aplicando la regla de la cadena queda, $f'(x) = 3\cos 3x\ e^{\text{sen}3x}$

Ejemplo 7: Hallar la función derivada de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para cualquier valor de $x < 2$, aplicando la reglas de derivación se tiene $f'(x) = \frac{-1}{(x - 2)^2}$.

Para cualquier valor de $x > 2$, derivando el polinomio se tiene $f'(x) = 2x$.

Para $x = 2$, veamos en primer lugar si la función es continua calculando los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x^2 - 4\right) = 0 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

como estos límites no coinciden la función no es continua en $x = 2$ y por lo tanto no es derivable en este punto.

Así, la función derivada de f es $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-2)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Una vez definida la función f' se puede plantear si esta función tiene derivada. Así para aquellos puntos en los que f' tiene derivada, se define la **función derivada segunda** de f que se denota por f'', $\frac{d^2f}{dx^2}$ o D^2f dada por $f''(x) = (f')'(x)$.

Reiterando este proceso se pueden definir las derivadas sucesivas de f: función derivada tercera, cuarta, …, **función derivada *n*-ésima**, que las denotaremos por f''', $f^{(4)}$,… , $f^{(n)}$, respectivamente.

Ejemplo 8: Hallar la función derivada n-ésima de $f(x) = e^{3x}$.

Se calcula en primer lugar la función derivada obteniéndose $f'(x) = 3\ e^{3x}$.

La función derivada segunda de f se halla derivando la función $f'(x)$ quedando $f''(x) = 3^2\ e^{3x}$.

La función derivada tercera de f se halla derivando la función $f''(x)$ quedando $f'''(x) = 3^3\ e^{3x}$.

Reiterando el proceso y generalizando los resultados obtenidos se tiene que la función derivada n-ésima de f es $f^{(n)}(x) = 3^n\ e^{3x}$.

REGLA DE L' HÔPITAL

Su aplicación permite resolver algunas indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

Regla de l' Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_o verificando:

a) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_o$ del intervalo

c) Existe $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces, existe $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observaciones:

1. La regla de L'Hôpital también se puede aplicar si $x \to \pm\infty$.
2. La regla de L'Hôpital además de resolver indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$ también se puede aplicar para resolver indeterminaciones del tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
3. Si al calcular $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nos volvemos a encontrar en las condiciones establecidas por esta regla se puede volver aplicar de nuevo, y así sucesivamente las veces que consideremos oportunas para la consecución del límite buscado.
4. Para resolver el resto de indeterminaciones no se puede aplicar directamente esta regla. En estos casos se han de transformar en una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y después aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 9: Utilizando la regla de L'Hôpital se pueden calcular fácilmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty$

NOTA: Las indeterminaciones que aparecen en el cálculo del límite se indican entre corchetes.

Ejemplo 10: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = [0.(-\infty)] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{-\infty}{+\infty}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{sen}x}\right) = [+\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}x - x}{x\text{sen}x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\text{sen}x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{(L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\text{sen}x}{\cos x + \cos x - x\text{sen}x} = \dfrac{0}{2} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\ln x} = \left[1^{-\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln x\,(1+x^2-1)} = e^{[(-\infty).0]} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]} \underset{(L'Hôpital)}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{-2}} = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{x}} = \left[(+\infty)^0\right] = e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+2)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x^2+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{x}} = e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]} \underset{(L'Hôpital)}{=}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+2}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+2}} = e^0 = 1$