FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

CONCEPTOS BÁSICOS

Se llama **función real de variable real** a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, es decir, a cualquier correspondencia que asocia a cada elemento de D un único número real.

Habitualmente, la notación que se usa para representar una función es $y = f(x)$, donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y f la aplicación que indica como se obtiene el valor de y conocido el valor de x.

Se llama **dominio de definición de *f*** al conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$. Se denota $D(f)$, o simplemente D. Es decir, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } f(x)\}$.

En algunos casos, el dominio de la función no viene dado a priori sino que hay que calcularlo mediante la definición de f. Además, en los modelos económicos para determinar el dominio no sólo hay que considerar la existencia matemática de $f(x)$, sino también que tenga sentido en el contexto económico considerado tanto x como $f(x)$.

Ejemplo 1:

a) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$ es una función real de variable real cuyo dominio es $D = [2, +\infty)$.

b) $y = \dfrac{1}{x-2}$ es una función con $D = \mathbb{R} - \{2\}$ ya que asocia a todo número real distinto de 2 un único elemento de $\mathbb{R}$.

c) La correspondencia dada por $y^2 = x$ no es una función, ya que a cada número real positivo x no nulo le asocia dos valores reales distintos, por ejemplo, para $x = 4$, el valor de la variable y puede ser 2 o -2.

d) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ es $D = (0, +\infty)$ ya que para que exista $\sqrt{x}$, x debe de ser mayor o igual que 0, y además como está en el denominador no puede ser 0.

e) El coste C por día de una empresa es función de su producción diaria q según la relación $C = 500 + 15q$. Si la empresa tiene una capacidad límite de producir 5000 unidades al día, el dominio de esta función es $D = \{ q \mid 0 \le q \le 5000 \}$.

Observar que desde el punto de vista matemático, el dominio de esta función sería $\mathbb{R}$, sin embargo por el contexto económico el dominio se restringe al calculado.

Se llama **rango** o **imagen de *f*** al conjunto de números reales que toma la variable y siendo $y = f(x)$ y x perteneciente al dominio de f. Se denota $\text{Im}(f)$.

Es decir, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in D \text{ con } y = f(x)\}$.

Ejemplo 2:

a) Dada $f(x) = \sqrt{x-1}$, para que exista $f(x)$ se debe cumplir que $x - 1 \ge 0$, ya que no existe la raíz cuadrada de números negativos. Por tanto, se debe cumplir $x \ge 1$ y por ello $D = [1, +\infty)$.

Además, se verifica que $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$.

b) La función $C = 500 + 15q$, estudiada en el ejemplo 1 apartado e), cuyo dominio es $D = \{ q \mid 0 \le q \le 5000 \}$, tiene como imagen $\text{Im}(f) = \{ C \mid 500 \le C \le 75500 \}$.

c) Dada $f(x) = x^5 + x - 3$, al estar definida por un polinomio existe para cualquier número real, luego D = R. Además, se verifica que Im(f) = R.

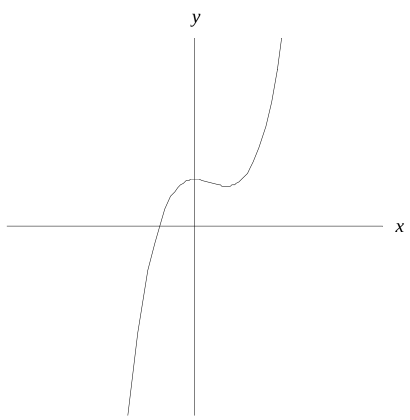
d) Dada $f(x) = x^2 + 3$, se cumple que su dominio es D = R y su imagen Im(f) = [3, +∞).

Se llama **gráfica de *f*** al conjunto de todos los pares de números reales que tienen como primera componente cualquier valor x del dominio de f y como segunda su imagen $f(x)$. Se denota Gr(f). Es decir, Gr(f) = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D,\ y = f(x)\}$.

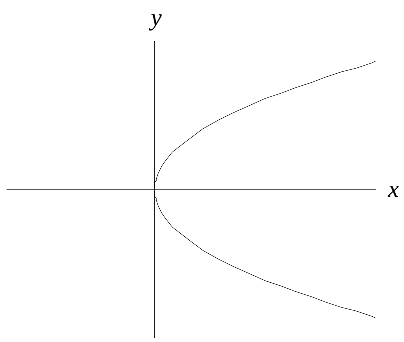
Notar que la gráfica de f es una curva en $\mathbb{R}^2$ pero no todas curvas del plano son gráficas de funciones. La gráfica de una función tiene la propiedad de que una recta vertical que pase por cualquier punto del eje OX la corta a lo sumo una vez, en caso contrario, significaría que un mismo número tendría más de una imagen por lo que no sería aplicación, y por tanto tampoco función.

Ejemplo 3:

a) La gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ es:



La curva representada a continuación dada por los puntos que verifican $y^2 = x$ no corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$.



Tipos de funciones

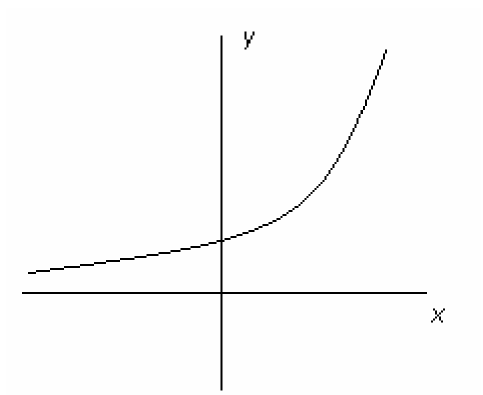
- Una función $f(x)$ se dice:

Función **creciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

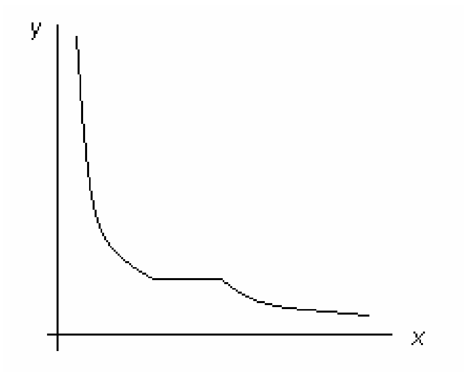
Función **estrictamente creciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$.

Función **decreciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Función **estrictamente decreciente** en un intervalo $I \subseteq D$ si para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) > f(x_2)$.



Función estrictamente creciente en R



Función decreciente, pero no estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$

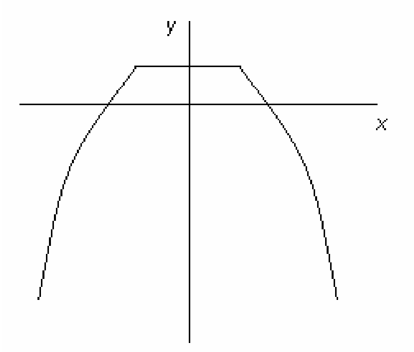
- Una función $f(x)$ se dice:

Función **cóncava** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ nunca se sitúa por encima de la gráfica.

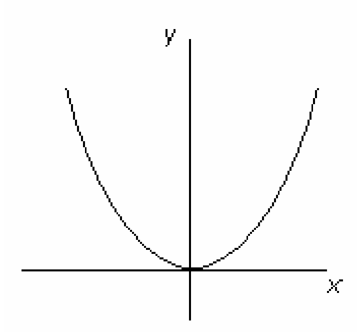
Función **estrictamente cóncava** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se sitúa por debajo de la gráfica.

Función **convexa** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ nunca se sitúa por debajo de la gráfica.

Función **estrictamente convexa** en un intervalo $I \subseteq D$, si dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se sitúa por encima de la gráfica.



Función cóncava pero no estrictamente cóncava en R



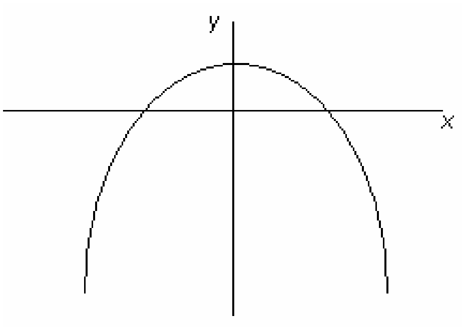
Función estrictamente convexa en R

- Una función $f(x)$ se dice:

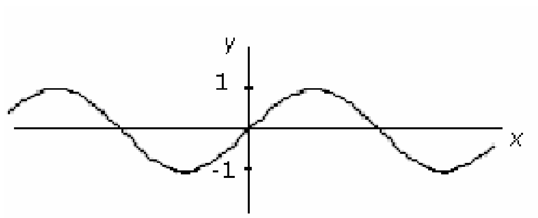
  Función **acotada superiormente** si existe un número M cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x) \leq M$.

  Función **acotada inferiormente** si existe un número m cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x) \geq m$.

  Función **acotada** si está acotada inferior y superiormente. Es decir, si existe un número $K > 0$ tal que para cualquier valor x de D, $|f(x)| \leq K$, o equivalentemente, $-K \leq f(x) \leq K$.



Función acotada superiormente y no acotada inferiormente en R



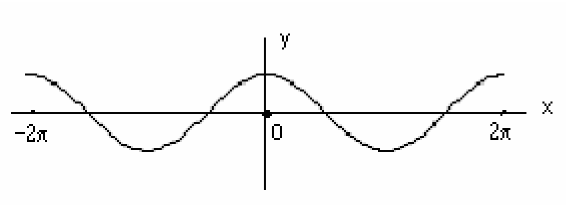
Función acotada superiormente por 1 y acotada inferiormente por -1

- Una función $f(x)$ se dice:

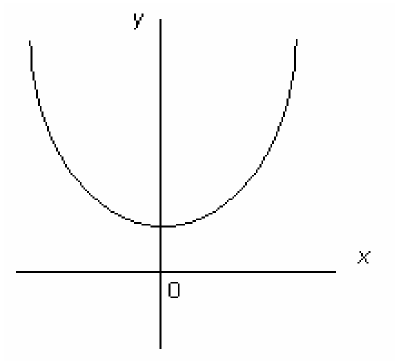
  Función **par** si para cualquier valor x de D se cumple $f(-x) = f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del eje OY.

  Función **impar** si para cualquier valor x de D se cumple $f(-x) = -f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen.

  Función **periódica** si existe un número $M > 0$ cumpliendo que para cualquier valor x de D se verifica $f(x+M) = f(x)$.

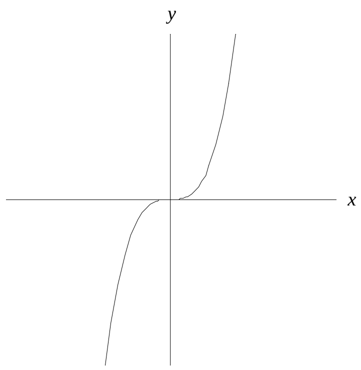


Función periódica de periodo 2π



Función par

Ejemplo 4: Observando la gráfica de la función $f(x) = x^3$ que se muestra a continuación, se tiene que $f(x)$ es estrictamente creciente en R, estrictamente cóncava en $(-\infty, 0)$, estrictamente convexa en $(0, +\infty)$, no está acotada superior ni inferiormente y es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.



Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real con dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente. Se definen las funciones:

- Suma de f y g como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ siendo $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$
- Producto de f por un escalar t como $(t.f)(x) = t\, f(x)$ siendo $D(t.f) = D(f)$
- Producto de f y g como $(f.g)(x) = f(x)\, g(x)$ siendo $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$
- Cociente de f y g como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ siendo $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}$
- Composición de g y f como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ siendo $D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$
- Inversa de f: Esta función sólo se puede definir en el caso de que $y = f(x)$ sea inyectiva, se denota f^{-1} y se define como $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ siendo $D(f^{-1})= \text{Im } f$.
  Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 5: Dadas las funciones: $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 1$, $h(x) = \frac{1}{x}$ vamos a realizar las siguientes operaciones:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x - 1$

$(5.\,h)(x) = 5\ h(x) = \dfrac{5}{x}$

$(g\,.\,h)(x) = g(x)\ h(x) = \dfrac{3x-1}{x}$

$\left(\dfrac{f}{h}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{x^2}{1/x} = x^3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^2$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 - 1$

b) La función $g(x) = 3x - 1$ es inyectiva, para calcular su función inversa hay que operar de la siguiente forma:

Intercambiando las variables en $y = 3x - 1$, queda $x = 3y - 1$ y despejando la y tenemos que $y = \dfrac{x+1}{3}$, luego $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

FUNCIONES ELEMENTALES

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se ven con detalle algunas de las más utilizadas.

Funciones Polinómicas

Una función polinómica de **grado *n*** es de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}$ $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Funciones Racionales

Son funciones de la forma $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

El dominio esta formado por todos los números reales que no son raíces del polinomio del denominador.

Funciones Irracionales

Son funciones de la forma $f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ donde $R(x)$ es una función racional y n un número natural mayor que 1.

Si n es impar el dominio de esta función es igual al dominio de $R(x)$. Si n es par el dominio de esta función está formado por todos los números reales para los que $R(x) \geq 0$.

Ejemplo 6:

a) La función $f(x) = x^5 + 7x^3 - 4$ es polinómica de grado 5 y su dominio es $\mathbb{R}$.

b) La función $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+1}$ es racional y su dominio es $\mathbb{R}$, ya que, $x^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor x.

c) La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es irracional y como el índice de la raíz es par ($n = 2$), para calcular su dominio hay que estudiar cuando $x^2 - 1 \geq 0$. Para resolver esta inecuación (Ver unidad 2), se factoriza el polinomio quedando $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ y se estudia su signo en la tabla siguiente

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
$x+1$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
x^2-1	+	-	+

Por lo tanto, el dominio es (-∞, -1] ∪ [1, +∞), ya que se han de incluir 1 y -1 puesto que cumplen la desigualdad por ser ésta no estricta.

Funciones Exponenciales

Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$.

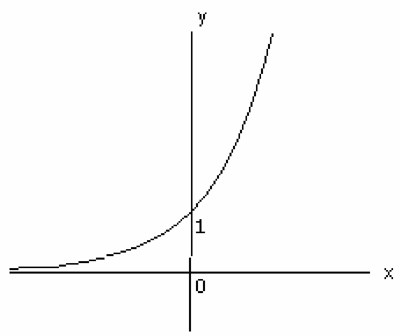
El dominio de estas funciones es R y su imagen (0, +∞).

A continuación se enumeran algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (Ver unidad 1):

$a^0 = 1$ $\qquad a^{x+y} = a^x a^y$ $\qquad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\qquad (a^x)^y = a^{xy}$

$(a\ b)^x = a^x\ b^x$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\qquad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\qquad a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura, de ella se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente convexa y acotada inferiormente en R.



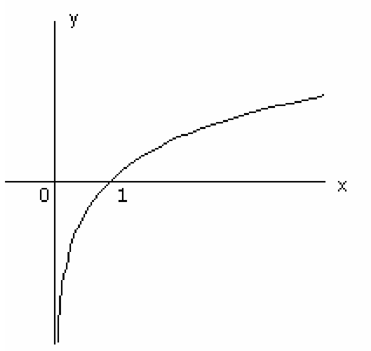
Funciones Logarítmicas

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

El dominio de estas funciones es (0, +∞) y su imagen R.

La función $f(x) = \log_a x$ es la función inversa de la función exponencial a^x con $a > 0$.

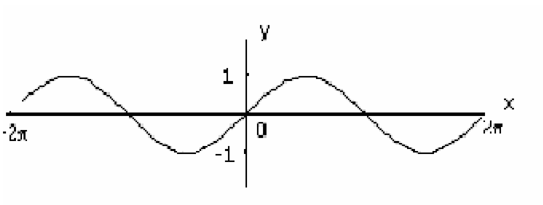
La función logarítmica más utilizada es la que viene dada por el logaritmo neperiano, es decir, la que tiene por base el número e, que es la función inversa de $f(x) = e^x$. Se representa por $f(x) = \ln x$ y su gráfica se muestra en la siguiente figura de la que se deduce que es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y no acotada superior ni inferiormente.



Algunas funciones Trigonométricas

La **función seno** viene dada por $f(x) = \text{sen}x$

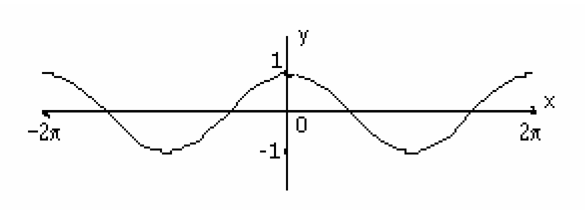
Su dominio es R, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π e impar.

La **función coseno** viene dada por $f(x) = \cos x$

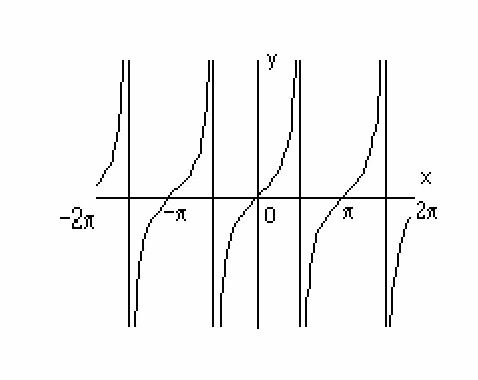
Su dominio es R, su imagen [-1, 1] y su gráfica es la siguiente:



Como se observa en el dibujo anterior, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1, es periódica de periodo 2π y par.

La **función tangente** viene dada por $f(x) = \text{tg}x$

Como $\text{tg}x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$, su dominio es D = R - $\left\{ (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$, su imagen R y su gráfica es la siguiente:

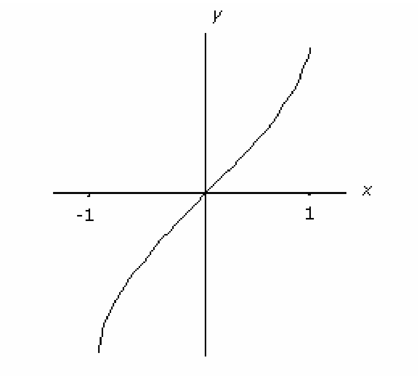


Como se observa en el dibujo anterior, no está acotada superior ni inferiormente , es periódica de periodo π e impar.

Las funciones inversas de las anteriores son:

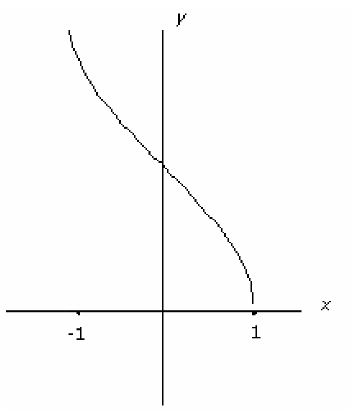
La **función arco seno** es la inversa de la función seno y se denota $f(x) = \text{arcsen}x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



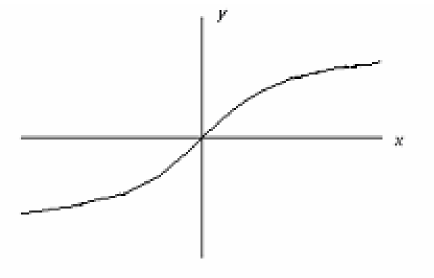
La **función arco coseno** es la inversa del coseno y se denota $f(x) = \arccos x$.

Su dominio es [-1, 1] y su gráfica



La **función arco tangente** es la inversa de la tangente y se denota $f(x) = \text{arctg}x$.

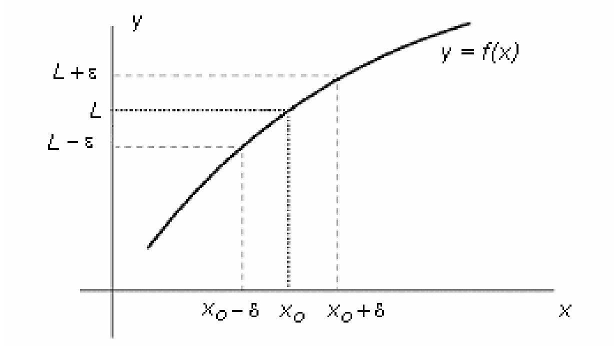
Su dominio es R y su gráfica



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva se puede definir el límite de una función en un punto como el valor al que se aproxima la función cuando la variable independiente se acerca al punto. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición:

Se dice que el **límite de *f* cuando *x* tiende a x_0** es el número real *L*, y se representa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ que fijemos, se puede encontrar algún $\delta > 0$ verificando que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < |x - x_0| < \delta$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Notar que para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos cercanos a x_0 que sean del dominio de *f*, aunque no se necesita que *f* esté definida en x_0.

Ejemplo 7: Aplicando la definición se va a comprobar que $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$.

Tomando un valor cualquiera $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que si se cumple $0 < |x - 2| < \delta$, se verifique $|(4x - 5) - 3| < \varepsilon$.

Realizando operaciones en la última desigualdad con objeto de encontrar una relación entre δ y ε queda:

$$|(4x - 5) - 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |4x - 8| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 4|x - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

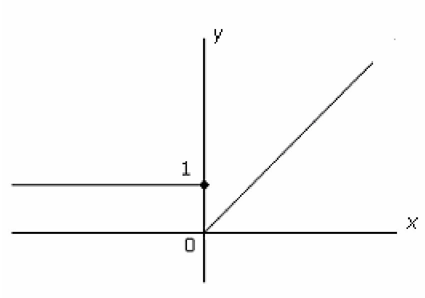
Como se ha de cumplir que $0 < |x - 2| < \delta$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ se verifica la definición de límite.

Al estudiar el valor al que tiende una función cuando *x* se aproxima a un punto x_0, a veces es conveniente considerar por separado los valores próximos a x_0 que sean menores y los que sean mayores que él. Esto da lugar a los **límites laterales** que se definen a continuación.

- Se dice que L_1 es el **límite por la derecha de *f*** y se representa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$, si la función se aproxima a este valor al acercarse *x* a x_0, siendo $x > x_0$. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x - x_0 < \delta$ se verifica $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

- Se dice que L_2 es el **límite por la izquierda de *f*** y se representa $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = L_2$, si la función se aproxima a este valor al acercarse x a x_o, siendo $x < x_o$. Es decir**,** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ que cumpla $0 < x_o - x < \delta$ se verifica $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ejemplo 8: La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cuya gráfica es



cumple que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ según se ve en el dibujo.

Cuando tiene sentido calcular los dos límites laterales se verifica la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Una consecuencia inmediata de esta equivalencia es que si los límites laterales cuando $x \to x_o$ son distintos, el límite de la función cuando $x \to x_o$ no existe.

Ejemplo 9:

a) En la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ del ejemplo 8, como sus límites laterales cuando $x \to 0$ son distintos, se concluye que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Dada $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, para calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del punto $x = 3$, han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 = 9$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 3x = 9$.

Como los dos límites laterales coinciden, entonces existe el límite de la función y se verifica que:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x - 2} = 0$

Observar que en este caso no tiene sentido considerar valores menores que 2 ya que D = [2, +∞), por tanto, no tiene sentido plantearse el límite por la izquierda cuando $x \to 2$ y el límite calculado coincide con el límite por la derecha.

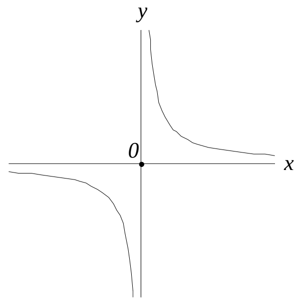
La definición de límite se puede extender para elementos infinitos teniendo en cuenta lo siguiente:

- Por $x \to +\infty$, se entiende que se toman valores de x positivos tan grandes como se quiera.
- Por $x \to -\infty$, se entiende que se toman valores de x negativos tan pequeños como se quiera.
- Diremos que el límite es $+\infty$ si la función toma valores positivos tan grandes como se quiera.

- Diremos que el límite es -∞ si la función toma valores negativos tan pequeños como se quiera.

Ejemplo 10:

a) Calcular los límites laterales cuando $x \to 0$ de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica se muestra a continuación.

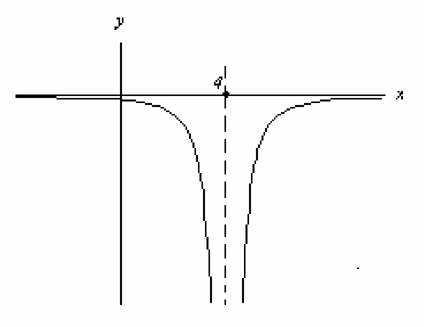


Si los valores de x se aproximan a 0 por la derecha el valor de la función crece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Si se acerca por la izquierda a 0, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

En este caso el límite de la función cuando $x \to 0$ no existe, ya que los límites laterales no coinciden.

b) Calcular los límites laterales cuando $x \to 4$ la función $f(x) = \frac{-3}{(x-4)^2}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



Si *x* se acerca a 4 por la derecha, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \to 4^+} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

Si *x* se acerca al 4 por la izquierda, la función decrece indefinidamente, es decir, $\lim_{x \to 4^-} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$.

En este caso, $\lim_{x \to 4} \frac{-3}{(x-4)^2} = -\infty$, ya que ambos límites laterales coinciden y toman el valor -∞.

c) Calcular el límite cuando $x \to 1$ de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Como $f(x)$ está definida de forma diferente antes y después del 1, para determinar el límite de la función han de hallarse sus límites laterales quedando: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$.

Al ser distintos estos límites se concluye que no existe el límite de *f* cuando $x \to 1$.

Propiedades de los límites

1. El límite de una función, si existe, es único.

2. $\lim_{x \to x_o} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x)$, excepto si $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_o} g(x) = -\infty$ o viceversa.

3. $\lim_{x \to x_o} (t.\,f)(x) = t \lim_{x \to x_o} f(x)$, siendo t un número real cualquiera.

4. $\lim_{x \to x_o} (f.\,g)(x) = \lim_{x \to x_o} f(x) \lim_{x \to x_o} g(x)$, excepto si $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$ o viceversa.

5. $\lim_{x \to x_o} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_o} f(x)}{\lim_{x \to x_o} g(x)}$ si $\lim_{x \to x_o} g(x) \neq 0$, excepto si:

   $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = 0$ o $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$

6. $\lim_{x \to x_o} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x \to x_o} f(x))^{\lim_{x \to x_o} g(x)}$, excepto si: $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = 0$ o

   $\lim_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0$ o $\lim_{x \to x_o} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty$

7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_o y $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to x_o} (f.g)(x) = 0$

Ejemplo 11: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(x^2 + e^x\right) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} e^x = 0^2 + e^0 = 0 + 1 = 1$

b) $\lim_{x \to 1} 5x \ln x = 5 \lim_{x \to 1} x. \lim_{x \to 1} \ln x = 5.1.\ln 1 = 5.0 = 0$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3+2}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 3} x^3 + 2}{\lim_{x \to 3} x - 1} = \frac{29}{2}$

d) $\lim_{x \to 0} (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} = \left(\lim_{x \to 0} (x^2-1)\right)^{-\frac{2}{3}} = (-1)^{-\frac{2}{3}} = ((-1)^2)^{-\frac{1}{3}} = 1$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3+3} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} (x^3+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

f) $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, ya que, $\lim_{x \to 0} x = 0$ y la función seno es una función acotada.

En los casos en los que la aplicación directa de estas propiedades no permite calcular el límite (ver las excepciones que aparecen en las propiedades de los límites), se dice que hay una **indeterminación** y es necesario calcular el límite de otra manera.

Utilizando notación simbólica las indeterminaciones son:

$$+\infty - \infty,\ 0.(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0^0,\ (\pm\infty)^0,\ 1^{\pm\infty}$$

Ejemplo 12: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve factorizando los polinomios con objeto de simplificar el factor $x - 3$ común al numerador y al denominador, ya que $x = 3$ anula a ambos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, es decir, por $1+\sqrt{x-1}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{1-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2} -(1+\sqrt{x-1}) = -2$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+5}{2x^4-3} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^4, ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+5}{2x^4-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3}{x^4}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3-3x}{x^2+1} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por x^3, ya que es la potencia de mayor exponente que aparece en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-3x}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2-0}{0^-} = -\infty$$

Notar que las indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ocasionadas por cocientes de polinomios se resuelven fácilmente generalizando lo realizado en los apartados c) y d) del ejemplo anterior obteniéndose:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_o} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n \\ \pm\infty & \text{si } m < n \end{cases}$$

Ejemplo 13: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^5+5x+1}{x^4-1} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+5}{2x^4-3} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es 0

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$, es una indeterminación, y aplicando lo anterior se tiene que el valor de este límite es $\dfrac{3}{5}$

Las indeterminaciones 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ se pueden transformar en una del tipo $0.(\pm\infty)$ tomando logaritmos neperianos. Además, la indeterminación $1^{\pm\infty}$ se puede resolver aplicando que si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\pm\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)(f(x)-1)}$

Ejemplo 14: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x+3}{9x-1}\right)^{2x^2} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{+\infty} = 0$ ya que $\dfrac{8}{9}<1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{5x^2-1}\right)^{x} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{+\infty} = +\infty$ ya que $\dfrac{5}{4}>1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$ ya que $\dfrac{5}{3}>1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{4x^2+1} = 1^{+\infty}$ es una indeterminación que se puede resolver como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{4x^2+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2+1)\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2(4x^2+1)}{2x^2+5}} = e^{-4}$$

A veces, algunas de estas indeterminaciones se resuelven usando los llamados infinitésimos equivalentes que son funciones cuyo límite vale 0 y que se pueden sustituir una por otra si están multiplicando o dividiendo dentro de un límite sin que éste se modifique. Algunos infinitésimos equivalentes cuando $f(x)\to 0$ son:

$$\mathrm{sen} f(x) \approx f(x) \qquad \mathrm{arcsen} f(x) \approx f(x)$$
$$\mathrm{tg} f(x) \approx f(x) \qquad \mathrm{arctg} f(x) \approx f(x)$$
$$\ln(1+f(x)) \approx f(x) \qquad e^{f(x)}-1 \approx f(x)$$
$$1-\cos f(x) \approx \frac{(f(x))^2}{2}$$

Ejemplo 15: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{x} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x-1)^2}{\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{0}{0}$. Esta indeterminación se puede resolver por infinitésimos equivalentes de la forma siguiente,

$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)^2}{\mathrm{tg}^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{4x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{4} = 0$$

Otra equivalencia útil para resolver límites es:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o \;\approx\; a_n x^n \quad \text{cuando } x\to\pm\infty$$

Ejemplo 16: Calcular los siguientes límites utilizando la equivalencia anterior:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^5+2}{x^2-3x+1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se resuelve fácilmente utilizando la equivalencia anterior, quedando

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^5+2}{x^2-3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^5}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -3x^3 = -3(-\infty) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^3+2)}{\ln x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación se puede resolver de esta manera:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+2)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Gráficamente el que una función $f(x)$ sea continua en un punto x_o, significa que no se rompe su gráfica en el punto (x_o, $f(x_o)$), es decir, se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel en las proximidades de dicho punto.

Intuitivamente la continuidad de $f(x)$ en x_o quiere decir que variaciones pequeñas de la variable x cuando está próxima a x_o, le corresponden variaciones pequeñas de $f(x)$.

A continuación se formaliza el concepto de función continua.

Una función real $f(x)$ es **continua** en x_o si se cumple $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Se dice que f es función continua en un subconjunto *A* si lo es en todos los puntos de *A*.

Ejemplo 17: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

Se calculan los límites laterales ya que la función tiene distinta definición por la derecha y por la izquierda del punto:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} 2x+3 = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 5x^2 = 5 \text{, luego } \lim_{x\to1} f(x) = 5.$$

Además, como $f(1) = 5$ y coincide con $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, se cumple que f es continua en el punto $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

Se calcula $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \left(2x^2-1\right) = 1$ y como $f(1) = 0$, se cumple que $\lim\limits_{x\to1} f(x) \ne f(1)$ y por tanto, f no es continua en el punto $x = 1$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^4}$ en el punto $x = 3$

En este caso no existe $f(3)$, ya que 3 anula el denominador, por tanto, f no es continua en el punto $x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en el punto $x = 0$.

Como $e^{-1/x}$ tiene distinto límite según x tienda a 0 por la derecha o por la izquierda, para obtener $\lim_{x\to 0} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$ se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = \frac{2}{1+e^{-\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = \frac{2}{1+e^{+\infty}} = \frac{2}{1+\infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$

Como estos límites no coinciden, entonces no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, y por ello, f no es continua en $x = 0$.

Tipos de discontinuidades de una función

Si f no es continua en un punto x_o se dice que es **discontinua** en dicho punto. Esto puede producirse por varias causas, dando lugar a distintos tipos de discontinuidades que se enumeran a continuación.

- **Discontinuidad evitable**: si existe $\lim_{x\to x_o} f(x) \in \mathbb{R}$. En este caso, al ser discontinua o bien $x_o \notin D$, o bien $\lim_{x\to x_o} f(x) \neq f(x_o)$.

  Este tipo de discontinuidad permite redefinir la función de forma continua de la manera siguiente:

$$\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_o \\ \lim_{x\to x_o} f(x) & \text{si } x = x_o \end{cases}$$

- **Discontinuidad no evitable**, si no existe $\lim_{x\to x_o} f(x) \in \mathbb{R}$. Esta situación se puede producir por las siguientes razones:

  - existe $\lim_{x\to x_o^+} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_o^-} f(x) \in \mathbb{R}$ pero son distintos.
  - existe $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to x_o^-} f(x) = \pm\infty$.
  - no existe $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$ o no existe $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$.

Ejemplo 18:

a) La función $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$ ya que no existe $f(0)$ y $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$ (se ha aplicado el infinitésimo equivalente $\text{sen}x \sim x \quad \text{si} \quad x \to 0$).

Por tanto, esta función se puede redefinir para que sea continua de la forma siguiente: $f(x)=\begin{cases} \frac{\text{sen}x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad no evitable en $x = 2$, puesto que sus límites laterales, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$, son distintos.

c) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ presenta una discontinuidad no evitable en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ no es un número real.

d) La función $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$ presenta una discontinuidad no evitable en 0, ya que no existe $\lim_{x\to 0} \text{sen}\frac{1}{x}$

Propiedades de las funciones continuas

1. Si *f* es continua en x_o y $f(x_o) \neq 0$, entonces, existe un entorno de x_o en el cual *f* tiene el mismo signo que $f(x_o)$.

2. Si *f* es continua en x_o, entonces, existe un entorno de x_o en el cual *f* está acotada.

3. Todas las funciones elementales definidas anteriormente (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas …) son continuas en sus dominios de definición.

4. Si *f* y *g* son dos funciones continuas en x_o, se verifica:

$f \pm g$, $f.g$, $t.f$ con t número real y $\dfrac{f}{g}$ con $g(x_o) \neq 0$ son funciones continuas en x_o

5. Si *f* es continua en x_o y *g* es continua en $f(x_o)$, entonces, $g \circ f$ es continua en x_o.

Ejemplo 19: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $(-\infty, 0)$ la función es continua por ser polinómica.

En $(0, +\infty)$ la función es continua por ser una función exponencial.

En x = 0, es necesario calcular los límites laterales por estar $f(x)$ definida de distinta manera por la derecha e izquierda del punto; así, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x+1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{2x} = 1$ y por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Además, $f(0) = 1$ coincide con el valor del límite hallado, luego, *f* es continua en 0.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En $(-\infty, 1)$ la función es continua por ser una función racional con denominador no nulo.

En $(1, +\infty)$ la función es continua por ser una función exponencial.

En x = 1 se tiene: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, como no coinciden los límites laterales no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y por tanto, *f* es discontinua no evitable.

c) $f(x) = \ln(x+2)$

La función es continua en su dominio por ser una función logarítmica.

Para calcular su dominio hay que tener en cuenta que el logaritmo sólo se puede calcular de expresiones positivas, luego, $x+2 > 0$, es decir, $x > -2$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(-2, +\infty)$.