Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE INECUACIONES

1. Resolver las inecuaciones: **a)** $3 - 2x \geq 8 - 7x$ **b)** $\dfrac{6 - 2x}{5} > \dfrac{1 - x}{10}$

Solución

a) Para resolver la inecuación, se pasan los términos con x al primer miembro y los independientes al segundo quedando $5x \geq 5$.

Multiplicando por $\frac{1}{5}$, para despejar la x, se obtiene $x \geq 1$.

Por tanto, las soluciones son los números del conjunto $[1, +\infty)$.

b) Se eliminan los denominadores de la inecuación, multiplicando por 10, $12 - 4x > 1 - x$

se pasan los términos con x al primer miembro y los independientes al segundo, $-3x > -11$

se divide por -3 cambiándose la desigualdad de sentido al ser -3 un número negativo, $x < \dfrac{11}{3}$.

Por tanto, las soluciones son los números del conjunto $\left(-\infty, \dfrac{11}{3}\right)$.

2. Resolver las inecuaciones: **a)** $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$ **b)** $3x^2 + 4 < x^4 + 3x^3 + 3x$

Solución

a) Al ser una inecuación polinómica de *segundo grado*, se agrupan todos los términos en un miembro, por ejemplo, si se pasan al primero queda $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

Como las raíces del polinomio $-2x^2 + 3x + 5$ son $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)5}}{2(-2)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$,

la inecuación se puede escribir de la forma $-2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \leq 0$, y multiplicando por -1 se obtiene $2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \geq 0$.

En la siguiente tabla se estudia el signo de los factores, en los intervalos determinados por las raíces, para obtener el signo del polinomio.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$x + 1$	-	+	+
$x - \frac{5}{2}$	-	-	+
$2(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$	+	-	+

Así los puntos del conjunto $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ son solución de la inecuación. Además, como los extremos de los intervalos también son solución, por ser la desigualdad no estricta, se tiene que el conjunto de soluciones es $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Se pasan todos términos al segundo miembro quedando $0 < x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.
Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0} \\ -4 & & -4 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda de la forma $0 < (x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$.
Como el último factor es siempre positivo, para determinar el signo del polinomio, basta considerar el signo de los dos primeros factores, como se muestra en la tabla siguiente.

Signo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 4$	-	+	+
$(x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

3. Resolver la inecuación $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} > \dfrac{x^2 - 2}{x}$

Solución

Observar que si se multiplica en cruz, la desigualdad podría cambiar de sentido dependiendo del signo de los denominadores. Por ello es mejor realizar las siguientes operaciones, con el objeto de agrupar en un miembro todos los términos.

Se pasa restando el segundo miembro al primero, $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \dfrac{x^2 - 2}{x} > 0$.

Realizando operaciones en el primer miembro de la inecuación queda

$$\frac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2}{x(x + 1)} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2 - (x^2 - 2)\,(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)}$$

y factorizando el numerador se obtiene $\dfrac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)} = \dfrac{x\,(6 - x^2)}{x\,(x + 1)} = \dfrac{x\,(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x\,(x + 1)}$.

Teniendo en cuenta que x no puede ser cero, ya que este valor anula los denominadores de la inecuación inicial, se puede simplificar x en la expresión anterior obteniéndose la siguiente inecuación equivalente a la inicial, $\frac{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)}{x+1} > 0$. Para resolverla, se analiza el signo de cada factor como se muestra en la siguiente tabla.

Signo	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, -1)$	$(-1, 0) \cup (0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, +\infty)$
$\sqrt{6} + x$	-	+	+	+
$\sqrt{6} - x$	+	+	+	-
$x + 1$	-	-	+	+
$\frac{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)}{x+1}$	+	-	+	-

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \sqrt{6}\right)$.

4. Resolver las inecuaciones: **a)** $2^{1-x^2} \le \frac{1}{8}$ **b)** $3.10^{x+2} + 13.\ 10^{x} - 10^{x+3} > 229$

Solución

a) Para resolver esta inecuación, aprovecharemos que $\frac{1}{8}$ se puede escribir como una potencia de 2, así la inecuación queda $2^{1-x^2} \le 2^{-3}$

Tomando logaritmos en base 2 y teniendo en cuenta que esta función es creciente se tiene:

$$2^{1-x^2} \le 2^{-3} \iff \log_2 2^{1-x^2} \le \log_2 2^{-3} \iff 1 - x^2 \le -3$$

Pasando el segundo miembro al primero queda $4 - x^2 \le 0$ y factorizando $(2 + x)(2 - x) \le 0$, inecuación cuyo signo se analiza en la siguiente tabla.

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$2 + x$	-	+	+
$2 - x$	+	+	-
$(2 + x)(2 - x)$	-	+	-

Como la desigualdad no es estricta, los extremos de los intervalos también son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

b) En primer lugar, se saca 10^x factor común en el primer miembro, $10^x\,(3.10^2 + 13 - 10^3) > 229$

Realizando operaciones se obtiene, $10^x\,(-687) > 229$

Dividiendo por -687 cambia el sentido de la desigualdad, ya que es negativo, quedando $10^x < \frac{-1}{3}$

Como, cualquiera que sea el número real x, la expresión 10^x toma valores positivos se deduce que la inecuación no tiene solución.

5. Resolver las inecuaciones: **a)** $yx - x \geq 1 + 2y$ **b)** $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$

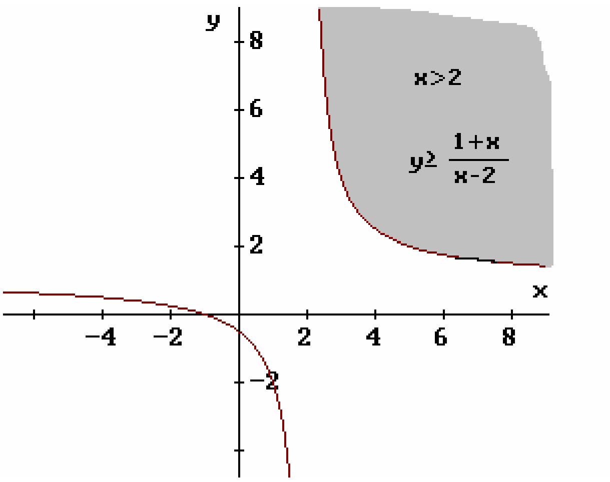
Solución

a) En primer lugar, para despejar la incógnita y, se pasan al primer miembro los términos en los que aparece esa incógnita y el resto se pasan al segundo, quedando $yx - 2y \geq 1 + x$.

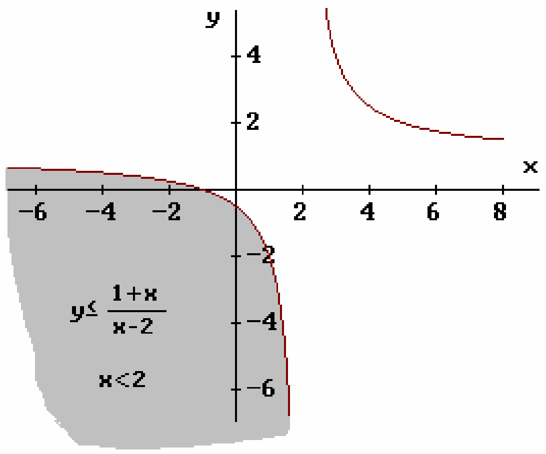
Se saca y factor común, obteniéndose $y(x - 2) \geq 1 + x$.

A continuación, se resuelve esta inecuación considerando tres casos según el signo de $x - 2$:

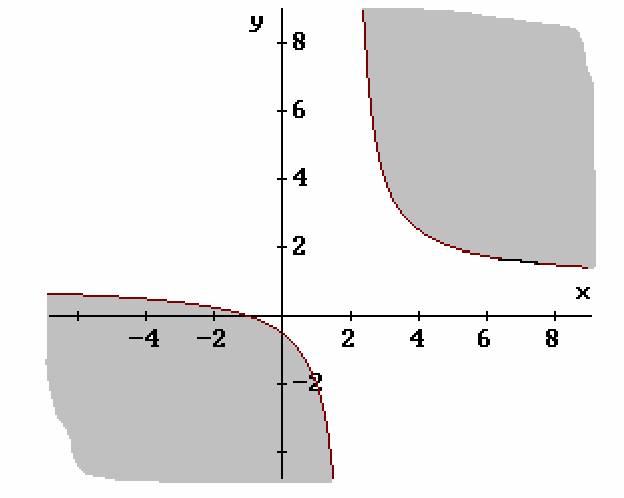
- Si $x = 2$ la inecuación queda $0 \geq 3$, desigualdad que es falsa para cualquier valor de y, por tanto, en este caso no existe solución.
- Si $x > 2$ entonces $x - 2 > 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \geq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura y corresponde al conjunto de puntos del plano (x, y) situados a la derecha de la recta $x = 2$ y por encima o en la curva $y = \dfrac{1 + x}{x - 2}$



- Si $x < 2$ entonces $x - 2 < 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \leq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura



La solución de la inecuación inicial es la unión de las soluciones obtenidas en cada uno de los casos anteriores y corresponde a la región representada en la siguiente figura

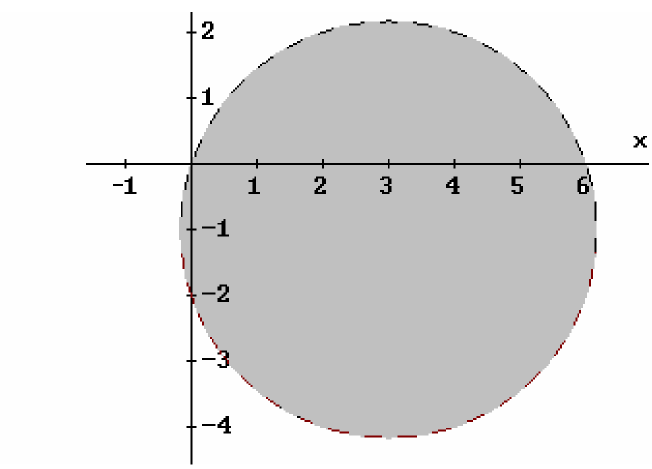


b) En primer lugar se considera la igualdad, $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Al ser una ecuación polinómica de segundo grado, tanto en x como en y, veamos si corresponde a una circunferencia. Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de obtener una expresión de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow \left((x - 3)^2 - 9\right) + \left((y + 1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Esta última ecuación corresponde a la circunferencia de centro (3, -1) y radio $\sqrt{10}$, que se representa en la figura. Para determinar qué región corresponde a la solución de la inecuación, se elige un punto que no esté en la circunferencia, por ejemplo (1, 0) (está dentro de la circunferencia) y se sustituye en la inecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$ quedando $-5 < 0$. Al ser verdadera esta desigualdad, la solución son los puntos de la región interior a la circunferencia y aparecen sombreados en la siguiente figura.



6. Resolver las inecuaciones: **a)** $e^{2y} < x + 1$ **b)** $\sqrt[3]{x} \le 1 + y$

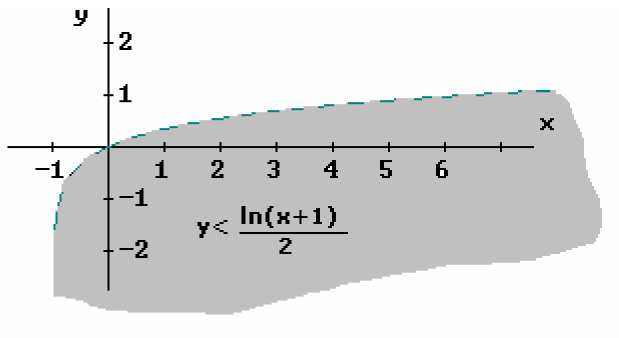
Solución

a) Para poder despejar y, se toman logaritmos neperianos, por ser el logaritmo la función inversa de la exponencial. Teniendo en cuenta, que además la función logarimo es estríctamente creciente se tiene: $e^{2y} < x + 1 \Leftrightarrow \ln e^{2y} < \ln(x + 1) \Leftrightarrow 2y < \ln(x + 1) \Leftrightarrow y < \frac{\ln(x+1)}{2}$.

A continuación se representa la curva definida por la igualdad $y = \frac{\ln(x+1)}{2}$.

Para determinar qué región corresponde a la solución, se elige un punto que no esté en la curva, por ejemplo (0, 1) y se sustituye en la inecuación $y < \frac{\ln(x+1)}{2}$ quedando $1 < 0$. Al ser falsa esta desigualdad, se sigue que los puntos de esta región no son solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es la región sombreada en la siguiente figura sin incluir el borde.



b) Para resolver $\sqrt[3]{x} \le 1 + y$, en primer lugar, se despeja la incógnita y quedando $\sqrt[3]{x} - 1 \le y$. A continuación se representa la curva definida por la igualdad $y = \sqrt[3]{x} - 1$.

Para determinar qué región corresponde a la solución, se elige un punto que no esté en la curva, por ejemplo (0, 0) y se sustituye en la inecuación quedando $-1 \le 0$. Al ser verdadera esta desigualdad, se sigue que los puntos de esta región son solución de la inecuación.

Por tanto, la solución es el conjunto de puntos sombreados en la siguiente figura incluídos los de la curva $y = \sqrt[3]{x} - 1$.