Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE INECUACIONES

1. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} -x^2+5x-4 \geq 0 \\ 3x^2-4x+8 < 3(x-1)^2 \end{cases}$

Solución

Se comienza resolviendo cada inecuación por separado y después se halla la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la primera inecuación se factoriza el polinomio $-x^2+5x-4$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $-(x-1)(x-4) \geq 0$, es decir, $(x-1)(x-4) \leq 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que intervienen en la inecuación en los intervalos determinados las raíces del polinomio.

Signo	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
x - 1	-	+	+
x - 4	-	-	+
$(x-1)(x-4)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos, 1 y 4, son solución de la inecuación. Por tanto, la solución de la primera inecuación es $S_1 = [1, 4]$.

Para resolver la inecuación $3x^2-4x+8 < 3(x-1)^2$ se realizan las siguientes operaciones:

$$3x^2-4x+8 < 3(x-1)^2 \iff 3x^2-4x+8 < 3x^2-6x+3 \iff 2x < -5 \iff x < -\frac{5}{2}$$

Así, la solución de la segunda inecuación es $S_2 = \left(-\infty\ ,\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 = [1, 4] \cap \left(-\infty\ ,\ -\dfrac{5}{2}\right) = \varnothing$, es decir no tiene solución.

2. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-4} \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-5} < 0 \end{cases}$

Solución

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\frac{x^2-3x+2}{x-4} \geq 0$ se factoriza el polinomio x^2-3x+2, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $\frac{(x-1)(x-2)}{x-4} \geq 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que intervienen en la ecuación en los intervalos determinados por sus raíces.

Signo	(-∞, 1)	(1, 2)	(2, 4)	(4, +∞)
x - 1	-	+	+	+
x - 2	-	-	+	+
x - 4	-	-	-	+
$\frac{(x-1)(x-2)}{x-4}$	-	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos, 1 y 2, son solución de la inecuación, pero no lo es 4 ya que anula el denominador.

Por tanto, la solución de la primera inecuación es $S_1 = [1, 2] \cup (4, +\infty)$.

La inecuación $\frac{x+1}{x-5} < 0$ se resuelve estudiando el signo del numerador y denominador en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 5)	(5, +∞)
x + 1	-	+	+
x - 5	-	-	+
$\frac{x+1}{x-5}$	+	-	+

Como la desigualdad es estricta x = 1 no verifica la inecuación y x = 5 tampoco ya que anula el denominador. Así, la solución de la segunda inecuación es $S_2 = (-1, 5)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es

$$S = S_1 \cap S_2 = \left([1, 2] \cup (4, +\infty)\right) \cap (-1, 5) = [1, 2] \cup (4, 5).$$

3. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2^{3x} \leq 4.2^{x^2} \\ \frac{4-x^2}{(x-1)^2} > 0 \end{cases}$

Solución

Comenzaremos resolviendo la primera inecuación $2^{3x} \leq 4.2^{x^2}$, para lo cual escribiremos $4 = 2^2$ y realizaremos las siguientes operaciones propias de la función exponencial

$$2^{3x} \leq 4.2^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} \leq 2^2.2^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} \leq 2^{x^2+2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2-3x+2$$

La inecuación $0 \leq x^2 - 3x + 2$ se puede escribir, factorizando el polinomio, de la forma $0 \leq (x-1)(x-2)$ cuya solución se obtiene a partir de la siguiente tabla:

Signo	(-∞, 1)	(1, 2)	(2, +∞)
x - 1	-	+	+
x - 2	-	-	+
$(x-1)(x-2)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos son solución de la inecuación, por ser la desigualdad no estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Para resolver la segunda inecuación $\dfrac{4-x^2}{(x-1)^2} > 0$, se factoriza el polinomio del numerador quedando $\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x-1)^2} > 0$. Teniendo en cuenta que $(x-1)^2 \geq 0$, y que para que no se anule el denominador ha de ser $x \neq 1$, el signo de la fracción únicamente depende del numerador y se determina en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -2)	(-2, 1) ∪ (1, 2)	(2, +∞)
2 - x	+	+	-
2 + x	-	+	+
(2 − x)(2 + x)	-	+	-

La solución de esta inecuación es $S_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \big((-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\big) \cap \big((-2, 1) \cup (1, 2)\big) = (-2, 1).$$

4. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} > 0 \\ x^3 - 1 \leq 3x(x-1) \\ 0 \leq \sqrt{x+1} \end{cases}$

Solución

Se resuelve la primera inecuación $\dfrac{2x-1}{x} > 0$, para lo que se estudia el signo del numerador y denominador en los intervalos dados por los puntos que los anulan, $\dfrac{1}{2}$ y 0, respectivamente.

Signo	(-∞, 0)	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
2x - 1	-	-	+
x	-	+	+
$\dfrac{2x-1}{x}$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos no verifican de la inecuación. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

La segunda inecuación, $x^3 - 1 \leq 3x(x-1)$, es equivalente a $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq 0$, es decir, $(x-1)^3 \leq 0$ que se cumple si $x - 1 \leq 0$, por lo tanto la solución es $S_2 = (-\infty, 1]$.

La tercera inecuación, $0 \leq \sqrt{x+1}$, se verifica siempre que exista la raíz cuadrada, es decir, si $x + 1 \geq 0$, por lo tanto la solución es $S_3 = [-1, +\infty)$.

En consecuencia, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \cap (-\infty, 1] \cap [-1, +\infty) = [-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

5. Resolver el sistema $\begin{cases} x^2 - 4 \leq -y^2 + 2y - 1 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases}$ y representar gráficamente su solución.

Solución

Para resolver la primera inecuación se realizan las siguientes operaciones con objeto de completar cuadrados:

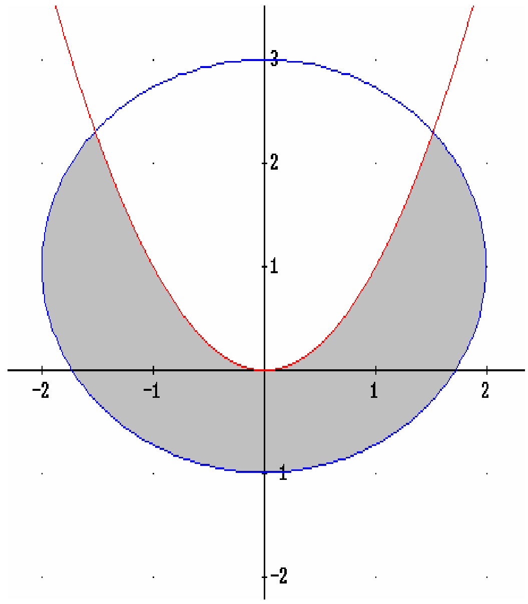
$$x^2 - 4 \leq -y^2 + 2y - 1 \iff x^2 + y^2 - 2y \leq 3 \iff x^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 3 \iff x^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Para representar gráficamente la solución de esta inecuación dibujamos la curva $x^2 + (y-1)^2 = 4$ que es la circunferencia de centro (0, 1) y radio 2 y se considera la región donde se verifica $x^2 + (y-1)^2 \leq 4$ para lo cual basta elegir un punto que no esté en la circunferencia y comprobar si la verifica o no dicha desigualdad (por ejemplo $x = 0$, $y = 0$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 \leq 4$). Por tanto, la solución es el conjunto de puntos de la circunferencia y de su interior. (Ver figura)

Para resolver la segunda inecuación $y - x^2 \leq 0$, despejamos y obteniéndose $y \leq x^2$.

La curva $y = x^2$ es la parábola de vértice (0, 0) y de eje OY que pasa por el punto (1, 1). Para determinar la región donde se verifica $y \leq x^2$ basta elegir un punto que no esté en la parábola y comprobar si verifica o no la inecuación (por ejemplo $x = 2$, $y = 1$ es un punto que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $1 < 4$). Por tanto, la solución está formada por el conjunto de puntos que están en la parábola y debajo de ella. (Ver figura)

La solución del sistema es la intersección de las dos regiones solución de cada una de las inecuaciones y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:



6. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} y-1>e^x \\ 7y-8>4\ (2y-3) \\ -4(x+2)\le 0 \end{cases}$

Solución

En primer lugar se resuelve la primera inecuación, para ello se despeja *y* obteniéndose $y>e^x+1$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación dibujamos $y=e^x+1$ que es la curva que se indica en el dibujo, y se consideran los puntos que verifican $y>e^x+1$, para lo cual basta comprobar la desigualdad con un punto cualquiera que no esté en la curva (por ejemplo x = 0, y = 1 es un punto que no cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene 1 > 2). Por tanto, la solución es la región que no contiene al punto (0, 1). (Ver figura)

Para resolver la segunda inecuación se despeja *y* realizando las operaciones que siguen:

$$7y-8>4(2y-3) \quad \Leftrightarrow \quad 7y-8>8y-12 \quad \Leftrightarrow \quad -y>-4 \quad \Leftrightarrow \quad y<4$$

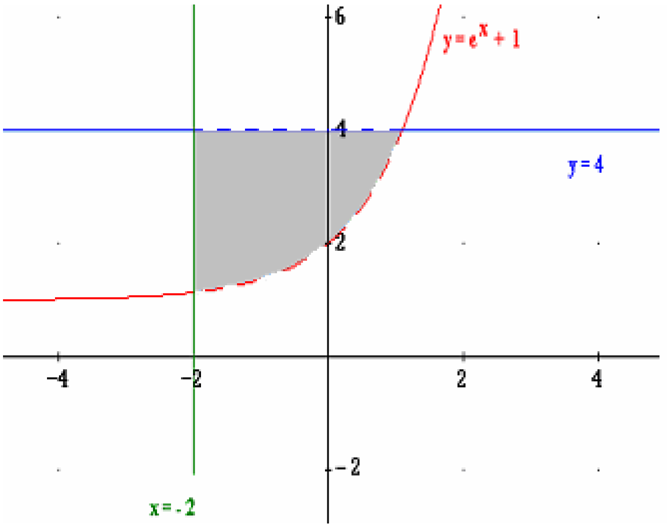
Dibujamos y = 4 que es la recta horizontal que pasa por (0, 4) y se considera la región donde se verifica $y<4$, que es el semiplano situado por debajo de la recta y = 4. (Ver figura)

Para resolver la tercera inecuación se despeja *x* operando como sigue:

$$-4(x+2)\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge -2$$

Dibujamos x = -2 que es la recta vertical que pasa por (-2, 0) y se considera la región donde se verifica $x \ge -2$, que es el semiplano situado a la derecha de la recta x = -2 incluida dicha recta. (Ver figura)

La solución del sistema es la intersección de las tres regiones anteriores y se muestra sombreada en el siguiente dibujo:


y = e^x + 1
y = 4
x = -2
6
4
2
-2
-4
-2
2
4