EJERCICIOS RESUELTOS DE CÓNICAS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:
a) el centro en el punto (2, 5) y el radio es igual a 7.
b) un diámetro con extremos los puntos (8, -2) y (2, 6).

Solución

a) La ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$.

Así, la ecuación de la circunferencia pedida es $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

Realizando operaciones queda $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$.

b) El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro de extremos (8, -2) y (2, 6), es decir, $\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$ = (5, 2)

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo al (8, -2), es decir, $r = d((8, -2), (5, 2)) = \sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y realizando operaciones

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

2. Calcular el centro y el radio de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$.

Solución

Escribiendo la ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ se obtiene que el centro es (a, b) y el radio r.

Pasando el término independiente de la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$ al segundo miembro y dividiendo por 2 queda $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}$.

Agrupando términos hasta obtener cuadrados perfectos queda:

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{37}{8}$$

Por tanto, el centro es el punto $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ y el radio es igual a $\sqrt{\frac{37}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37}{2}}$

3. Decir la posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ respecto de las circunferencias:
a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$
c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

Solución

Si la recta corta a la circunferencia en dos, uno o ningún punto será respectivamente secante, tangente o exterior a dicha circunferencia.

Como los puntos de corte pertenecen tanto a la recta como a la circunferencia, para calcularlos hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

a) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 2x + 3(3 - 2x) + 2 = 0 \iff x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 2x + 9 - 6x + 2 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 20x + 20 = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0$$

La única solución es $x = 2$, y sustituyendo en $y = 3 - 2x$, se obtiene $y = -1$.

Así, la recta corta a la circunferencia en un único punto, el (2, -1), y por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 3x + 4(3 - 2x) - 3 = 0 \iff x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 3x + 12 - 8x - 3 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 23x + 18 = 0 \iff x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 360}}{10} = \frac{23 \pm 13}{10} = \begin{cases} \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \\ \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

Al haber dos soluciones, hay dos puntos de corte y, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

c) Sustituyendo la ecuación de la recta $y = 3 - 2x$ en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$2x^2 + 2(3 - 2x)^2 + 3x + 5(3 - 2x) - 5 = 0 \iff 2x^2 + 2(9 - 12x + 4x^2) + 3x + 15 - 10x - 5 = 0 \iff$$

$$\iff 2x^2 + 18 - 24x + 8x^2 - 7x + 10 = 0 \iff 10x^2 - 31x + 28 = 0 \iff x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 1120}}{20}$$

Al no existir solución, por ser el discriminante negativo, no hay puntos de corte y, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

4. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta $x + y + 4 = 0$.

Solución

La ecuación de cualquier recta paralela a $x + y + 4 = 0$ se puede escribir de la forma $x + y + k = 0$. Para que sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, el sistema formado por ambas ecuaciones deberá tener una única solución.

Sustituyendo $y = -k - x$ en la ecuación de la circunferencia y realizando operaciones se tiene:

$$x^2 + (-k - x)^2 - 12x + 10(-k - x) - 11 = 0 \iff x^2 + k^2 + 2kx + x^2 - 12x - 10k - 10x - 11 = 0 \iff$$

$$\iff 2x^2 + (2k - 22)\,x + k^2 - 10k - 11 = 0$$

Para que esta ecuación de segundo grado tenga una única solución es necesario que su discriminante sea nulo, es decir, $(2k - 22)^2 - 4\cdot 2\,(k^2 - 10k - 11) = 0$.

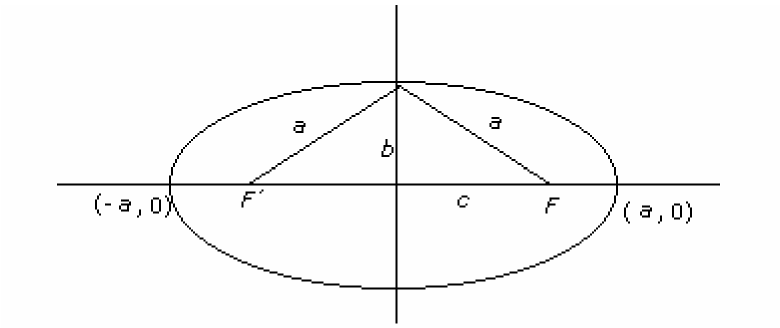
Realizando operaciones se obtiene la ecuación $k^2 + 2k - 143 = 0$ que tiene por soluciones:

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2} = \begin{cases} 11 \\ -13 \end{cases}$$

Por tanto, las rectas pedidas son $x + y + 11 = 0$ y $x + y - 13 = 0$.

5. Hallar la ecuación reducida de la elipse que verifica:
a) pasa por (25, 0) y la distancia semifocal es 7.
b) pasa por (4, 1) y por (0, 3).

Solución



La ecuación reducida de una elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ siendo c la distancia semifocal, a el semieje mayor, b el semieje menor y $b^2 = a^2 - c^2$.

a) El punto (25, 0) de la elipse es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto, $a = 25$.
Al ser la distancia semifocal $c = 7$, se tiene que $b^2 = a^2 - c^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$.

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$.

b) El punto (0, 3) de la elipse es el punto de corte con el eje de ordenadas, por tanto, $b = 3$. Así la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Imponiendo que ha de pasar por (4, 1) se tiene $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{9} = 1$ y despejando a^2 se tiene, $a^2 = 18$.

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

6. Hallar la ecuación reducida de la hipérbola con focos en (7, 0) y (-7, 0) y que pasa por el punto (4, 0)

Solución

La ecuación reducida de la hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

El punto (4, 0) de la hipérbola es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto, $a = 4$. Al ser la distancia semifocal $c = 7$, se tiene que $b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$.

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$.

7. Hallar la ecuación que verifican los puntos del plano que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $x = -4$.

Solución

Los puntos buscados forman una parábola de foco el punto $F = (3, 0)$ y directriz la recta $x = -4$.

Como el punto y la recta no están a la misma distancia del origen es necesario partir de la igualdad $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$, es decir, $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = x + 4$. Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene: $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow y^2 = 14x + 7$

NOTA: Este ejercicio también se puede resolver sin considerar "a priori" que la ecuación corresponde a una parábola, de la siguiente forma:

Los puntos (x, y) que están a la misma distancia de (3, 0) que de la recta r de ecuación $x = -4$ verifican $d((x, y), (3, 0)) = d((x, y), r)$, es decir, $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = x + 4$.

Realizando operaciones, se obtiene $y^2 = 14x + 7$, ecuación que corresponde a una parábola de eje horizontal.

8. Hallar las ecuaciones de las parábolas que verifican:

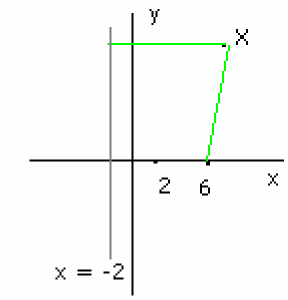
a) su directriz es $y = -6$ y su foco (0, 6).

b) su vértice (2, 0) y su foco (6, 0).

Solución

a) Como el foco y la directriz están a la misma distancia del origen se puede utilizar la ecuación reducida que, al ser la directriz horizontal, es de la forma $x^2 = 2py$ con $p = 2\cdot 6 = 12$. Por tanto, su ecuación es $x^2 = 24y$.

b)



Como el vértice no coincide con el origen de coordenadas se parte de igualdad: $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$.

Para calcular la directriz hay que tener en cuenta que la distancia de vértice, $V = (2, 0)$, al foco, $F = (6, 0)$, es de 4 unidades. Como la distancia de vértice a la directriz es la misma que la del vértice al foco, se concluye que la directriz es la recta $x = -2$.

Teniendo en cuenta la igualdad $d(X, F) = d(X, \text{recta directriz})$, se tiene, $\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = x + 2$.

Elevando al cuadrado y realizando operaciones, se obtiene:

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 16x - 32$$

9. Clasificar las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:
a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$
c) $x^2 + 4y^2 = 100$
d) $8x^2 - 3y^2 = 120$
e) $y^2 = 36x$
f) $y = x^2 - 2x + 3$
g) $x = -3y^2 + y + 5$

Solución

a) Para comprobar si la ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ corresponde a una circunferencia, se forman cuadrados perfectos para determinar su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

En efecto, la ecuación corresponde a una circunferencia de centro (-1, -3) y radio 3.

b) La ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$ puede corresponder a una circunferencia, veamos si es así dividiéndola primero por 2 y formando luego cuadrados perfectos.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + \frac{19}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 2y\right) + \frac{19}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + \frac{19}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{-15}{2}$$

Esta ecuación no corresponde a ninguna cónica, es más, no existe ningún punto del plano que la verifique, ya que la suma de cuadrados no puede ser igual a un número negativo.

c) Como la ecuación $x^2 + 4y^2 = 100$ tiene los coeficientes de x^2 y de y^2 distintos, pero del mismo signo, puede corresponder a la ecuación reducida de una elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 100 quedando $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, que corresponde a la ecuación reducida de una elipse de semiejes 10 y 5.

d) Como la ecuación $8x^2 - 3y^2 = 120$ tiene los coeficientes de x^2 y de y^2 distintos y de signo contrario, puede corresponder a la ecuación reducida de una hipérbola, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Para comprobarlo, se divide la ecuación por 120 quedando $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{40} = 1$.

En efecto, la ecuación corresponde a la ecuación reducida de una hipérbola.

e) La ecuación $y^2 = 36x$ corresponde a la ecuación reducida de una parábola del tipo $y^2 = 2px$, con $p = 18$.

Por tanto, corresponde a una parábola de foco el punto $F = (9, 0)$ y directriz la recta vertical $x = -9$.

f) La ecuación $y = x^2 - 2x + 3$ corresponde a una parábola de eje vertical $x = \frac{2}{2} = 1$ y ramas hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

g) La ecuación $x = -3y^2 + y + 5$ corresponde a una parábola de eje horizontal $y = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$ y ramas hacia la izquierda, ya que el coeficiente de y^2 es negativo.