

EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO DE SISTEMAS LINEALES

1. Una empresa textil fabrica pantalones de tres marcas distintas A, B, C. Para ello utiliza tres tipos diferentes de tela: de algodón (a), de poliéster (p) y de elastano (e). La tabla de producción por unidad es:

	(a)	(p)	(e)
A	2	6	8
B	4	9	4
C	8	3	2

Sabiendo que la cantidad de tela disponible es: 160 unidades de algodón, 240 u. de poliéster y 220 u. de elastano, hallar la cantidad de pantalones que podemos fabricar de cada marca agotando la totalidad de las telas.

Solución

Sean x , y , z las unidades producidas de pantalones de las marcas A, B, C respectivamente.

Teniendo en cuenta la tabla de producción por unidad y la disponibilidad de cada tipo de tela, se

$$\text{obtiene el sistema } \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 8z = 160 \\ 6x + 9y + 3z = 240 \\ 8x + 4y + 2z = 220 \end{array} \right\}$$

La solución de este sistema, si existe, dará la cantidad de pantalones de cada marca que se pueden obtener con la cantidad de tela disponible. Veamos si existe esta solución, para lo cual estudiaremos los rangos de A y (A/B) .

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 160 \\ 6 & 9 & 3 & 240 \\ 8 & 4 & 2 & 220 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 160 \\ 0 & -3 & -21 & -240 \\ 0 & -12 & -30 & -420 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 4F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 160 \\ 0 & -3 & -21 & -240 \\ 0 & 0 & 54 & 540 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}(A/B) = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible determinado.}$$

$$\text{Para obtener la solución se resuelve el sistema } \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 8z = 160 \\ -3y - 21z = -240 \\ 54z = 540 \end{array} \right\} \text{despejando y sustituyendo se}$$

obtiene:

$$54z = 540 \Rightarrow z = \frac{540}{54} = 10$$

$$-3y - 21z = -240 \Rightarrow 3y = 240 - 21z = 240 - 21 \cdot 10 = 240 - 210 = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{3} = 10$$

$$2x + 4y + 8z = 160 \Rightarrow 2x = 160 - 4y - 8z = 160 - 4 \cdot 10 - 8 \cdot 10 = 160 - 40 - 80 = 40$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{2} = 20$$

Por tanto, se producen 20 unidades de pantalones de la marca A, 10 de la marca B y 10 de la marca C.

2. Para cocinar una barra de pan se necesitan 8 unidades de harina y ninguna de azúcar, para una tarta, 6 unidades de harina y 2 de azúcar y para un bizcocho 7 de harina y 1 de azúcar. Si tenemos 100 unidades de harina y 4 de azúcar.

a) ¿Cuántas barras de pan, tartas y bizcochos podemos elaborar de forma que gastemos toda la harina y azúcar disponible?

b) Sabiendo que el precio de la barra de pan normal es 2 unidades monetarias, el de una tarta, 7 u.m. y el de un bizcocho 5 u.m. ¿Hay alguna combinación que cueste 37 u.m.?

Solución

a) Sean x , el número de barras de pan producidas; y , el número de tartas producidas; z , el número de bizcochos elaborados. La información del problema se resume en la siguiente tabla.

	Pan	Tarta	Bizcocho	Totales
Harina	8	6	7	100
Azúcar	0	2	1	4

dando lugar al sistema
$$\left. \begin{array}{l} 8x + 6y + 7z = 100 \\ 2y + z = 4 \end{array} \right\}$$

Para discutir este sistema escribimos $(A|B)$ que en este caso es una matriz escalonada.

$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 7 & 100 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}(A|B) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado y su solución se obtiene despejando } z \text{ de la segunda ecuación y sustituyéndola en la primera.}$

$$2y + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 2y$$

$$8x + 6y + 7z = 100 \Rightarrow 8x = 100 - 6y - 7z = 100 - 6y - 28 + 14y = 72 + 8y$$

Las soluciones son $x = 72 + 8y$, $z = 4 - 2y$

Observar que el número de barras de pan producidas (x) y el de bizcochos (z) están en función del número de tartas (y).

b) En este caso se añade al sistema anterior una tercera ecuación asociada al gasto.

El gasto producido al comprar x barras de pan, y tartas, z bizcochos es $G = 2x + 7y + 5z$.

Para que el gasto sea de 37 u.m. ha de verificarse la ecuación $2x + 7y + 5z = 37$ que unida al

$$\text{sistema anterior nos da } \left. \begin{array}{l} 8x + 6y + 7z = 100 \\ 2y + z = 4 \\ 2x + 7y + 5z = 37 \end{array} \right\}$$

Como el número de ecuaciones de este sistema coincide con el número de incógnitas y además

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \text{ el sistema es un sistema de Cramer y lo resolvemos por la regla de}$$

Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 37 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{80}{8} = 10, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 100 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 37 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 & 100 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 37 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

Por tanto, realizando un gasto de 37 u.m. se pueden producir 10 barras de pan, una tarta y 2 bizcochos.