EJERCICIOS DE CARÁCTER ECONÓMICO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1. En un mercado monopolístico, la función de demanda es $q = 50 - p$ y la función de costes $C(q) = q^2 + 6q + 20$:

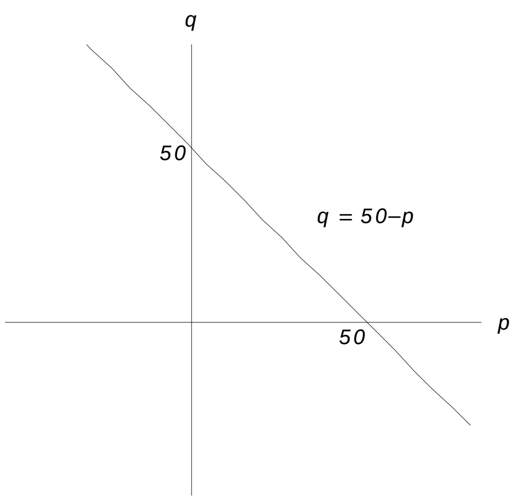
a) Representar gráficamente las funciones de demanda y de costes.

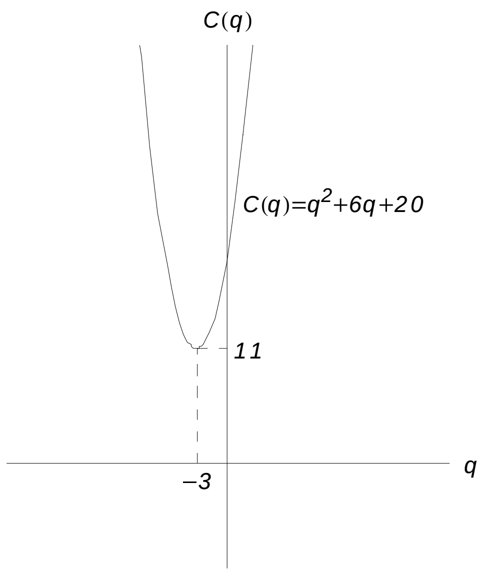
b) Determinar el beneficio máximo del monopolista.

Solución

a) La gráfica de la función $q = 50 - p$ es una recta; para determinarla basta calcular las coordenadas de dos puntos, por ejemplo, los puntos de corte con los ejes: (0, 50) y (50, 0).

La gráfica de $C(q) = q^2 + 6q + 20$ es una parábola con mínimo en el punto (-3, 11).





Observar que las representaciones anteriores se han realizado sin tener en cuenta el carácter económico de las funciones por lo que se ha considerado R como dominio.

Sin embargo, teniendo en cuenta que el precio, *p*, y la producción, *q*, han de ser variables no negativas, las gráficas de las funciones de demanda y de costes corresponden a la parte de la curva representada en el primer cuadrante.

b) La función beneficio viene dada por la diferencia entre ingresos y costes.

Para obtener los ingresos, $I(q) = pq$, despejamos p de la función de demanda, $p = 50 - q$ y se sustituye en $I(q)$, quedando $I(q) = pq = (50 - q)q = 50q - q^2$. Por tanto, la función beneficio es:

$$B(q) = I(q) - C(q) = = 50q - q^2 - q^2 - 6q - 20 = 44q - 2q^2 - 20$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $44 - 4q = 0$, que tiene por solución $q = 11$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que: $B''(q) = -4$ y $B''(11) = -4 < 0$

Por tanto, el máximo beneficio se obtiene al producir $q = 11$ unidades y es $B(11) = 222$.

2. La función de costes a corto plazo de una empresa es: $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$, siendo q la cantidad producida.

a) Suponiendo que es un empresario competitivo, determinar la cantidad producida por el empresario y el beneficio que obtendrá si el precio de equilibrio del mercado es 42.

b) Suponiendo que es un empresario monopolista, determinar la cantidad producida por el empresario y el beneficio que obtendrá si la demanda del mercado que abastece es $q = 390 - p$.

Solución

La función beneficio viene dada por la diferencia entre ingresos y costes:

$$B(q) = pq - C(q) = pq - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12$$

a) Sustituyendo en $B(q)$ el precio de equilibrio, $p = 42$, se tiene

$$B(q) = 42q - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12 = -4q^3 + 6q^2 + 24q - 12.$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $-12q^2 + 12q + 24 = 0$ o equivalentemente, $q^2 - q - 2 = 0$.

Resolviendo la ecuación queda $q = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$, luego la única solución con sentido económico es $q = 2$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que:

$$B''(q) = -24q + 12 \quad \text{y} \quad B''(2) = -24.2 + 12 = -36 < 0$$

Por tanto, para obtener el máximo beneficio se necesita producir $q = 2$ unidades y dicho beneficio máximo es $B(2) = 28$.

b) De la función de demanda, $q = 390 - p$, se obtiene el precio $p = 390 - q$ y sustituyendo en $B(q)$ se tiene

$$B(q) = (390 - q)\,q - 4q^3 + 6q^2 - 18q - 12 = -4q^3 + 5q^2 + 372q - 12.$$

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes:

Condición necesaria: $B'(q) = 0$, es decir, $-12q^2 + 10q + 372 = 0$ que equivale a $6q^2 - 5q - 186 = 0$.

Resolviendo la ecuación queda $q = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 4464}}{12} = \dfrac{5 \pm 67}{12} = \begin{cases} -\dfrac{31}{6} \\ 6 \end{cases}$, luego la única solución con sentido económico es $q = 6$.

Condición suficiente: $B''(q) < 0$, que se cumple ya que:

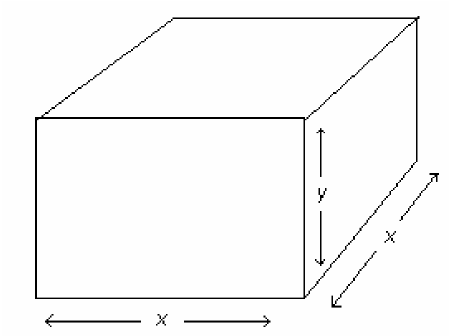
$$B''(q) = -24q + 10 \quad \text{y} \quad B''(6) = -24.6 + 10 = -134 < 0$$

Por tanto, para obtener el máximo beneficio se necesita producir $q = 6$ unidades y dicho beneficio máximo es $B(q) = -4.6^3 + 5.6^2 + 372.6 - 12 = 1536$.

3. Una empresa desea construir contenedores de almacenamiento con base cuadrada que tengan $27\,\text{m}^3$ de espacio en su interior. El material para su fabricación cuesta 2 u.m. por m^2.

Determinar las dimensiones de un contenedor para que el coste del material sea mínimo.

Solución



La cantidad de material necesario para construir un contenedor viene dado por la suma de las superficies de todas sus caras.

El área del suelo que es cuadrado es x^2 y coincide con la del techo. El área de cada una de las paredes es xy. Por tanto, la superficie del contenedor es $2x^2 + 4xy$.

Teniendo en cuenta que el volumen del contenedor es 27, se tiene $x^2y = 27$, de donde despejando y queda $y = \frac{27}{x^2}$. Sustituyendo en la superficie calculada se obtiene $2x^2 + 4x\frac{27}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}$.

En consecuencia, el coste de material usado en la fabricación viene dado por la función:

$$C(x) = 2\left(2x^2 + \frac{108}{x}\right) = 4x^2 + \frac{216}{x}$$

Hay que buscar el valor de x que minimice la función $C(x)$, para lo que se aplica la condición necesaria y suficiente de mínimo.

Condición necesaria: $C'(x) = 0$, es decir, $C'(x) = 8x - \frac{216}{x^2} = 0$ y resolviéndo la ecuación queda

$$\frac{8x^3 - 216}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^3 - 216 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Condición suficiente: $C''(x) > 0$, condición que se cumple en este caso ya que $C''(x) = 8 + \frac{432}{x^3}$ y $C''(3) = 24 > 0$.

Por tanto, el coste del material será mínimo cuando el lado de la base sea de $x = 3$ m. y la altura del contenedor $y = 3$ m., de lo que se concluye que el contenedor debe de ser cúbico.

4. Un mayorista de vinos vende lotes de 20 botellas de vino de reserva del 92 al precio de 90 euros por botella. Con el fin de vender mayor cantidad a un determinado cliente le hace la siguiente oferta: por cada botella adicional al lote de 20 inicialmente propuesto, se le reduce en 3 euros el precio de cada botella adquirida.

Hallar el número de botellas que debe vender a dicho cliente para que obtenga un ingreso máximo.

Solución

Sea x = número de botellas adicionales.

El número de botellas vendidas es $20+x$ y el precio de cada botella, $90-3x$ y por tanto la función ingreso obtenido es $I(x)=(20+x)(90-3x)=1800+30x-3x^2$.

Para maximizar esta función aplicamos las condiciones necesarias y suficientes como sigue:

$$I'(x)=30-6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 30-6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{30}{6}=5$$

$$I''(x)=-6 \quad \Rightarrow \quad I''(5)=-6<0$$

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá vender 5 botellas adicionales al lote inicial, es decir, 25 botellas a un precio de 90 - 3.5 = 75 euros cada una.

El ingreso obtenido con esta venta es de $I(5)=1800+150-75=1875$ euros.