Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

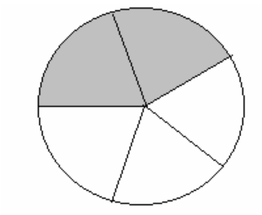
FRACCIONES

CONCEPTOS

Las fracciones surgen como respuesta a la necesidad de cuantificar numéricamente una cantidad no entera.

La **fracción** $\frac{a}{b}$ representa la cantidad que se obtiene al dividir la unidad en *b* partes iguales y considerar *a*. Al número *a* se le llama **numerador** y a *b* **denominador**.

Ejemplo 1: Para representar $\frac{2}{5}$ se divide la unidad en 5 partes iguales y se toman 2. Así, si se considera como unidad un círculo, se tiene que $\frac{2}{5}$ corresponde a la parte señalada en la figura.



Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma cantidad. Una forma de comprobarlo es ver si coinciden los productos del numerador de una por el denominador de la otra, es decir,

$$\frac{a}{b} \text{ es equivalente a } \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a.d = b.c$$

Ejemplo 2: La fración $\frac{3}{4}$ es equivalente a $\frac{15}{20}$, ya que 3.20 = 4.15

Simplificar una fracción es obtener otra equivalente a ella que tenga en el numerador y denominador números más pequeños. Una forma de simplificar una fracción es dividir numerador y denominador por el mismo número.

Ejemplo 3: a) $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$ (dividiendo por 100) b) $\frac{24}{66} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$ (dividiendo por 2 y luego por 3)

Fracción irreducible es aquella cuyo numerador y denominador son números primos entre sí.

Ejemplo 4: La fración $\frac{31}{4}$ es irreducible, pero no lo son $\frac{15}{20}$ y $\frac{-33}{12}$.

Toda fracción es equivalente a una fracción irreducible y una forma de obtenerla es descomponer numerador y denominador en producto de factores primos para luego simplificar.

Ejemplo 5: $\frac{840}{90} = \frac{2^3.3.5.7}{2.3^2.5} = \frac{2^2.7}{3} = \frac{28}{3}$

Relación entre las fracciones y los números decimales

- Toda fracción se puede escribir en forma decimal, para ello basta efectuar la división no entera del numerador entre el denominador. (Ver Unidad didáctica 4 de Números Reales y Números Complejos)

Ejemplo 6: Se tiene $\frac{3}{4} = 0´75$, $\frac{-4}{3} = -1´\hat{3}$ y $\frac{1}{6} = 0´1\hat{6}$

- En determinados casos, los números decimales se pueden escribir en forma de fracción como se indica a continuación:
  - Si es un número decimal exacto, en el numerador se pone el número sin la coma decimal y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras hay en la parte decimal.

    Ejemplo 7: $1´27 = \frac{127}{100}$
  - Si es un número decimal periódico puro su fracción correspondiente tiene:
    a) Por numerador la diferencia entre el número formado por la parte entera y el periodo menos el número formado por la parte entera
    b) Por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo.

    Ejemplo 8: $7´\widehat{16} = \frac{716-7}{99} = \frac{709}{99}$
  - Si es un número decimal periódico mixto su fracción correspondiente tiene:
    a) Por numerador el número formado por todas las cifras del número decimal menos el mismo número sin las cifras del periodo
    b) Por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo seguido de tantos ceros como cifras decimales hay en el anteperiodo.

    Ejemplo 9: $2´5\widehat{103} = \frac{25103-25}{9990} = \frac{25078}{9990}$

OPERACIONES

Suma y Resta

Si las fracciones tienen el mismo denominador su suma (resta) es una fracción que tiene el mismo denominador y su numerador es igual a la suma (resta) de los numeradores, es decir,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Si las fracciones no tienen el mismo denominador antes de realizar la suma (resta) es necesario reducirlas a común denominador. Para ello se consideran fracciones equivalentes a las iniciales que tengan por denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo 10:

a) $\frac{5}{19} - \frac{7}{19} = \frac{5-7}{19} = \frac{-2}{19}$

b) $\frac{55}{24} - \frac{21}{10} + \frac{5}{12} = \frac{55}{2^3.3} - \frac{21}{2.5} + \frac{5}{2^2.3} = \frac{55.5}{2^3.3.5} - \frac{21.2^2.3}{2.5.2^2.3} + \frac{5.2.5}{2^2.3.2.5} = \frac{275-252+50}{2^3.3.5} = \frac{73}{120}$

Como los denominadores son distintos, en primer lugar se calcula su mínimo común múltiplo, para ello se descomponen en producto de factores primos ($24 = 2^3.3$, $10 = 2.5$, $12 = 2^2.3$) y se toman los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente, así m.c.m.(24, 10, 12) = $2^3.3.5$. A continuación se multiplica el numerador y el denominador de cada fracción por los factores que le faltan a su denominador para ser el denominador común.

Multiplicación

La multiplicación o producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador el producto de los denominadores, es decir, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Ejemplo 11: $\frac{2}{5}\cdot\frac{-7}{5} = \frac{2(-7)}{5.5} = \frac{-14}{25}$ $\qquad$ $\frac{7}{24}\cdot\frac{44}{35} = \frac{7.\,44}{24.35} = \frac{308}{840}$

La fracción **inversa** de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, ya que su producto es igual a la unidad.

Ejemplo 12: La fracción inversa de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$ ya que $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$

División

La división o cociente de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y cuyo denominador es el producto del numerador de la segunda por el denominador de la primera, es decir, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$

Otra forma de dividir fracciones es multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo 13: $\frac{5}{40} : \frac{4}{35} = \frac{5.35}{40.4} = \frac{175}{160}$ (observar que lo que se hace es multiplicar en cruz)

RECUERDA: En una expresión aritmética primero se efectúan los productos y divisiones, empezando por la izquierda, y luego las sumas y restas, utilizándose los paréntesis si se desea romper esta jerarquía.

Ejemplo 14: $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$ no es lo mismo que $\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} : \frac{8}{15} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$\frac{1}{15} + \frac{1}{3} : \frac{5}{7} = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ no es lo mismo que $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3}\right) : \frac{5}{7} = \left(\frac{1}{15} + \frac{5}{15}\right) : \frac{5}{7} = \frac{6}{15} : \frac{5}{7} = \frac{42}{75} = \frac{14}{25}$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

En este apartado se estudian las **fracciones algebraicas** que son aquellas en las que el numerador y denominador son polinomios.

Las mismas reglas que se siguen para realizar operaciones con fracciones son válidas para las operaciones con fracciones algebraicas, ahora bien para obtener el mínimo común múltiplo, cuando esto sea necesario, la descomposición de un polinomio en producto de factores resulta algo más complicada que en el caso de números enteros. A continuación, se recuerdan algunos resultados sobre polinomios que son útiles para dicha descomposición.

- El número a es raíz o cero del polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(x) = (x - a).\ Q(x)$, siendo $Q(x)$ otro polinomio.
- Si el número entero a es raíz o cero del polinomio $P(x)$ entonces el término independiente de $P(x)$ es múltiplo de a. Por ello se buscan las raíces enteras de un polinomio entre los divisores del término independiente.

Ejemplo 15: Factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x$

- Se saca x factor común $P(x) = x\,(x^3 + x^2 - x + 2)$
- Sustituyendo los divisores del término independiente de $Q(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ (que son 1, -1, 2, -2) en $Q(x)$ se comprueba si alguno de ellos es raíz de dicho polinomio

  $Q(1) = 1 + 1 - 1 + 2 = 3 \neq 0$ $\quad Q(-1) = -1 + 1 + 1 + 2 = 3 \neq 0$ $\quad Q(2) = 8 + 4 - 2 + 2 = 12 \neq 0$

  $Q(-2) = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$, por tanto, se puede escribir $Q(x) = (x + 2)\,M(x)$
- Para calcular $M(x)$ se divide $Q(x)$ entre $x + 2$, división que se puede efectuar por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

  Así $M(x) = x^2 - x + 1$, cuyas raíces vienen dadas por $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$. Al ser el discriminante negativo no existen raíces reales de $M(x)$ y en consecuencia $M(x)$ no se puede factorizar.
- Por tanto, $P(x) = x\,(x + 2)\,(x^2 - x + 1)$

A continuación se muestran algunos ejemplos de operaciones con fracciones algebraicas:

Ejemplo 16:

a) $\dfrac{x^2-1}{3x^3-2x+3} - \dfrac{1-5x}{3x^3-2x+3} = \dfrac{x^2-1-1+5x}{3x^3-2x+3} = \dfrac{x^2+5x-2}{3x^3-2x+3}$

En este caso, como los denominadores de ambas fracciones son iguales, basta restar los numeradores.

b) $\dfrac{2x^3+1}{2x^3+3x^2-18x-27} + \dfrac{x+2}{x^2+3x}$

Al ser los denominadores distintos se ha de buscar un denominador común, para ello se factorizan:

$2x^3+3x^2-18x-27 = (2x+3)\,(x+3)\,(x-3)$ $\qquad x^2+3x = x(x+3)$

Así m.c.m.$(2x^3+3x^2-18x-27,\ x^2+3x) = (2x+3)\,(x+3)\,(x-3)x$

Escribiendo las fracciones con el mismo denominador y sumando los numeradores queda:

$$\frac{2x^3+1}{2x^3+3x^2-18x-27} + \frac{x+2}{x^2+3x} = \frac{(2x^3+1)x}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} + \frac{(x+2)(2x+3)(x-3)}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} = \frac{2x^4+x+2x^3+x^2-15x-18}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} =$$
$$= \frac{2x^4+2x^3+x^2-14x-18}{2x^4+3x^3-18x^2-27x}$$

Ejemplo 17:

a) $\dfrac{x}{x-2} \cdot \dfrac{x^2-3}{x+2} = \dfrac{x(x^2-3)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^3-3x}{x^2-4}$

b) $\dfrac{2x^3+x^2}{2x^3+3x^2-18x-27} \cdot \dfrac{3-x}{x^2+3x} = \dfrac{(2x^3+x^2)(3-x)}{(2x^3+3x^2-18x-27)(x^2+3x)} = \dfrac{x^2(2x+1)(3-x)}{(2x+3)(x+3)(x-3)x(x+3)} = \dfrac{-x(2x+1)}{(2x+3)(x+3)^2}$

En este caso, en lugar de realizar los productos en el numerador y en el denominador, estos se factorizan con el objeto de simplificar la fracción.

Ejemplo 18: $\dfrac{5x^3-3x^2}{x^4-x^3+x^2+x-2} : \dfrac{x^3-x^2+2x}{3x+3} = \dfrac{(5x^3-3x^2)(3x+3)}{(x^4-x^3+x^2+x-2)(x^3-x^2+2x)} = \dfrac{x^2(5x-3)\,3\,(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+2)\,x\,(x^2-x+2)} =$

$= \dfrac{3x(5x-3)}{(x-1)(x^2-x+2)^2}$

En la segunda igualdad se ha escrito el resultado de factorizar el numerador y denominador de la fracción, con el objeto de efectuar alguna simplificación.