EJERCICIOS RESUELTOS DE ECUACIONES

1. Determinar si cada una de las siguientes igualdades es una ecuación o una identidad:

a) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **b)** $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9 + 6x$ **c)** $(x - 3)^2 + 5 = x - 4$

Solución

a) Es una identidad, ya que es el desarrollo del cuadrado de la diferencia entre x y 2, verificándose, en consecuencia, para cualquier valor de la incógnita.

b) Es una ecuación y no una identidad ya que la igualdad no se verifica para todos los valores de x; por ejemplo, no se cumple para $x = 1$.

c) Es una ecuación y no una identidad ya que por ejemplo $x = 0$ no verifica la igualdad.

2. Indicar si en los siguientes razonamientos hay algún error.

a) $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x(x - 3) = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$

Solución

a) El razonamiento es correcto. Observar que la segunda implicación se basa en la siguiente propiedad: "Un producto es cero cuando alguno de sus factores es igual a cero".

b) Hay un error en la tercera implicación, ya que para que el producto de dos factores sea 4 no es necesario que uno de ellos sea 4.

3. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $5x + 4 = 13 + 2x$ **b)** $(x + 1)^2 - x = x^2 + x - 4$ **c)** $4x^2 - 13x - 12 = 0$

d) $8x^2 + 25 = (x + 5)^2$ **e)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$

Solución

a) Pasando todos los términos a un lado se obtiene la ecuación equivalente, $3x - 9 = 0$, cuya solución, sin más que despejar la incógnita, es $x = \frac{9}{3} = 3$.
Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 3$.

b) Desarrollando el cuadrado del primer miembro queda, $x^2 + 2x + 1 - x = x^2 + x - 4$, y pasando todos los términos al primer miembro se obtiene, $5 = 0$, que es un absurdo.
Por tanto, la ecuación dada no tiene solución.

c) Aplicando la fórmula que permite obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, se tiene $x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.4.(-12)}}{2.4} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 192}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{13 \pm 19}{8} = \begin{cases} 4 \\ \frac{-3}{4} \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = 4$ y $x = \frac{-3}{4}$.

d) Desarrollando el cuadrado del segundo miembro queda, $8x^2 + 25 = x^2 + 10x + 25$, y pasando todos los términos al primer miembro se obtiene la ecuación equivalente, $7x^2 – 10x = 0$.
Sacando factor común la x queda, $x(7x – 10) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $7x – 10 = 0$, de donde, $x = \frac{10}{7}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{10}{7}$.

e) Aplicando la fórmula que permite obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, se tiene $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.3.4}}{2.3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6}$.
Al ser el discrimínate negativo, se concluye que la ecuación no tiene soluciones.

4. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $x^4 – 4 = 0$ **b)** $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

Solución

a) Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 - 4 = 0$.

Despejando t^2 queda, $t^2 = 4$, de donde, $t = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Así:

- $t = -2 \Rightarrow x^2 = -2$, ecuación que no tiene solución
- $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

b) Haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $2t^2 + 3t + 2 = 0$, que no tiene solución puesto que su discriminante es negativo, $3^2 - 4.2.2 = -7 < 0$.

Por tanto, la ecuación inicial no tiene solución.

5. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ **b)** $2x^4 – x^3 - 3x^2 = 0$

Solución

a) El polinomio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ tiene como raíz $x = -1$ ya que $(-1)^3 + (-1)^2 – 4(-1) – 4 = 0$. Dividiendo, mediante la regla de Ruffini, dicho polinomio por $x – (-1)$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede escribir de la forma $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$ y, teniendo en cuenta que $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, de la forma $(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$. De esta manera, sus soluciones son los valores que anulan uno cualquiera de los factores $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x + 2)$:

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \qquad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \qquad x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$

b) Sacando factor común x^2 al polinomio del primer miembro de la ecuación, ésta se puede escribir de la forma, $x^2(2x^2 - x - 3) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, doble

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ doble, $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ **b)** $\frac{3}{x - 1} = \frac{8x}{2x - 1}$

Solución

a) Las soluciones de la ecuación son los valores de x que anulan el numerador y no anulan el denominador.

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - 5x + 4 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Hay que comprobar si estos valores anulan el denominador, $x^2 + 2x + 1$, de la ecuación inicial. En este caso, no se anula para ninguno de estos valores, por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $x = 1$ y $x = 4$.

b) En primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0.

Pasando todos los términos al primer miembro queda, $\frac{3}{x - 1} - \frac{8x}{2x - 1} = 0$. Restando las fracciones se obtiene, $\frac{3(2x - 1) - 8x(x - 1)}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$, y haciendo operaciones, $\frac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$.

Para resolver la ecuación $\frac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$-8x^2 + 14x - 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-8)(-3)}}{2(-8)} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{100}}{-16} = \dfrac{-14 \pm 10}{-16} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Al no anularse ninguno de los dos denominadores de la ecuación inicial para estos valores, se concluye que las soluciones de dicha ecuación son $x = \dfrac{1}{4}$ y $x = \dfrac{3}{2}$.

7. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ **b)** $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$

Solución

a) Se despeja la única raíz que aparece en la ecuación, quedando

$$2x - 6 = \sqrt{2x}$$

se elevan al cuadrado ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$(2x - 6)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 24x + 36 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 26x + 36 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación polinómica son:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4.4.36}}{2.4} = \frac{26 \pm \sqrt{676-576}}{8} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{26 \pm 10}{8} = \begin{cases} \dfrac{9}{2} \\ 2 \end{cases}$$

En este caso, se ha de comprobar si estas soluciones lo son también de la ecuación inicial ya que al haber elevado al cuadrado, la ecuación obtenida puede no ser equivalente:

- sustituyendo $x = \dfrac{9}{2}$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $4 = 4$, de donde se concluye que $x = \dfrac{9}{2}$ es solución de la ecuación inicial

- sustituyendo $x = 2$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $-1 = 3$, de donde se concluye que $x = 2$ no es solución de la ecuación inicial

En conclusión, la única solución de la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ es $x = \dfrac{9}{2}$.

b) Se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose:

$$\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}\right)^3 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{x} = 8$$

Despejando la raíz en esta última ecuación queda, $\sqrt{x} = 7$ y elevando ambos términos al cuadrado se obtiene $x = 49$.

Sustituyendo $x = 49$ en la ecuación $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$ queda $2 = 2$ y, por tanto, se tiene que $x = 49$ es solución de la ecuación inicial.

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\ln(2x^2-2) - 2\ln(x-1) = 0$ **b)** $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^x = \frac{3}{4}$

Solución

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, la ecuación dada es equivalente a la ecuación $\ln(2x^2-2) = \ln(x-1)^2$.

Al ser la función logaritmo inyectiva, se obtiene la ecuación polinómica equivalente $2x^2 - 2 = (x-1)^2$.

Realizando operaciones, queda

$$2x^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son $x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Los logaritmos de la ecuación inicial, $\ln(2x^2-2) - 2\ln(x-1) = 0$, no están definidos para ninguno de estos valores de x, en consecuencia, se deduce que dicha ecuación no tiene solución.

b) Sacando factor común 2^x en el primer miembro de la ecuación, ésta se puede escribir de la forma, $2^x(2^2-2+1) = \frac{3}{4}$, es decir, $2^x.3 = \frac{3}{4}$.

Despejando 2^x queda, $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$.

Teniendo en cuenta que las funciones exponenciales son inyectivas, se obtiene $x = -2$.

Por tanto, la solución de la ecuación dada es $x = -2$.

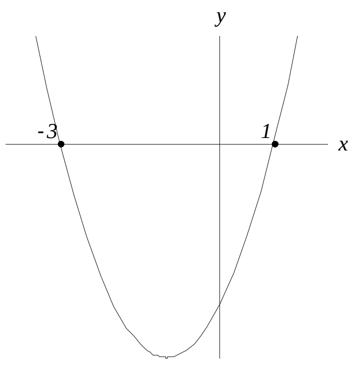
9. Resolver las siguientes ecuaciones con dos incógnitas:

a) $x^2 + 2x – 3 - y = 0$ **b)** $x^2 – 4x + y^2 = 0$

Solución

a) Despejando y en función de x queda $y = x^2 + 2x – 3$.

Así, la solución de la ecuación dada está formada por los puntos de la parábola $y = x^2 + 2x – 3$, es decir, los puntos de la forma $(x, x^2 + 2x – 3)$, cuya representación se muestra en la siguiente figura:



b) En primer lugar, para determinar si la ecuación inicial corresponde a la de una circunferencia de centro (a, b) y radio r, se intenta escribir la ecuación dada de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar dos cuadrados perfectos a partir de la expresión $x^2 - 4x + y^2$:

$$x^2 - 4x + y^2 = (x^2 - 4x) + y^2 = (x - 2)^2 - 4 + y^2$$

Por tanto, la ecuación se puede escribir de la forma, $(x - 2)^2 - 4 + y^2 = 0$, equivalentemente, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. En consecuencia, su solución es la circunferencia de centro el punto (2, 0) y radio 2 representada en la siguiente figura: