Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

INECUACIONES

NOTA IMPORTANTE: El signo de desigualdad de una inecuación puede ser "≤", "≥", "<" o ">". Para las cuestiones teóricas que se desarrollan en esta unidad únicamente se utilizará la desigualdad ">", siendo todas ellas *generalizables* a cualquiera de las otras tres.
En los ejemplos y ejercicios se utilizarán cualquiera de las cuatro desigualdades indistintamente.

CONCEPTOS

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas.

Ejemplo 1: a) $2x < 8$ es una inecuación con una incógnita
b) $x^2 - 2x \leq y - 1$ es una inecuación con dos incógnitas

Una **solución** de una inecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la desigualdad.

Ejemplo 2:
a) El valor $x = -4$ es una solución de la inecuación $3x + 7 < 1$ ya que $3(-4) + 7 = -12 + 7 = -5$ es menor que 1.
b) Los valores $x = 3$ e $y = -5$ son una solución de la inecuación $x - y \geq 2$ ya que $3 - (-5) = 8$ es mayor o igual que 2.
c) La inecuación $x^2 < 0$ no tiene solución. Es imposible encontrar un número real cuyo cuadrado sea negativo, ya que cualquier número real al cuadrado es un número positivo o cero.

Resolver una inecuación es calcular el conjunto formado por todas sus soluciones.

Ejemplo 3: a) La inecuación $x^3 \geq 8$ tiene por solución cualquier número real mayor o igual que 2.
b) La inecuación $3x + 4 \leq 16$ tiene por solución $S = (-\infty, 4]$.

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 4:
a) Las inecuaciones $3x + 4 \leq 16$ y $3x \leq 12$ son equivalentes, ya que ambas tienen por solución $S = (-\infty, 4]$.
b) Las inecuaciones $x^3 \leq 1000$ y $x^3 < 1000$ no son equivalentes, ya que $x = 10$ es solución de la primera inecuación, pero no lo es de la segunda.

Operaciones con desigualdades

Para resolver las inecuaciones, es necesario operar con desigualdades. A continuación, se enumeran propiedades que verifican algunas operaciones y que permiten obtener inecuaciones equivalentes a la inicial.

- Si se suma un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
- Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, la desigualdad se mantiene y si el número es negativo, la desigualdad cambia de sentido.
  $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow c.a > c.b$ $\quad$ $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow c.a < c.b$

- Si ambos miembros de la desigualdad son positivos, al elevarlos al cuadrado la desigualdad se mantiene. $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$
- Si ambos miembros de la desigualdad tienen el mismo signo, los inversos de dichos términos verifican la desigualdad contraria. $a > b > 0$ o $0 > a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

INECUACIONES POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Las **inecuaciones polinómicas** son aquellas equivalentes a una inecuación cuyo primer término es un polinomio y el segundo es cero. Así, una **inecuación polinómica de grado *n*** se puede escribir de la forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 > 0$ donde a_n, a_{n-1}, ... , a_0 son los coeficientes del polinomio y $a_n \neq 0$.

Ejemplo 5:

a) $4x - 5 < x - 8$ es una inecuación polinómica de grado 1

b) $9x^2 - 5x \leq 8$ es una inecuación polinómica de grado 2

c) $1 - x^6 > 7 + 2x$ es una inecuación polinómica de grado 6

d) Las siguientes inecuaciones no son polinómicas: $4x < 5\sqrt{x}$, $3x - 5\text{sen}x \geq 8$, $7 - 9x^2 < \frac{1}{x}$

Inecuaciones polinómicas de primer grado

Estas inecuaciones se pueden escribir de la forma $ax + b > 0$, con $a \neq 0$.
Para resolverlas se pasan todos los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, por último se despeja la incógnita, obteniéndose la solución.

Ejemplo 6: Resolver la inecuación $3x + 7 < 5x - 11$.

Pasando x al segundo miembro y los términos independientes al otro, se obtiene $18 < 2x$

multiplicando por $\frac{1}{2}$ queda $9 < x$

Por tanto, son soluciones de la inecuación los números reales mayores que 9, es decir, el intervalo $(9, +\infty)$.

Inecuaciones polinómicas de segundo grado

Estas inecuaciones se pueden escribir de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, con $a \neq 0$.
Una forma de resolverlas es estudiar el signo del polinomio de segundo grado que se ha obtenido descomponiéndolo en producto de factores.

Ejemplo 7: Resolver la inecuación $3x^2 + 5x > x^2 + 3$

Esta inecuación es equivalente a $2x^2 + 5x - 3 > 0$

Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces, obteniendose $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

Por tanto, la inecuación queda $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0$

El signo de $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$, depende del signo del factor $x - \frac{1}{2}$ y del signo de $x + 3$, que a su vez dependen de que x sea mayor o menor que $\frac{1}{2}$ y que -3 respectivamente. En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de segundo grado.

Signo	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$x - \frac{1}{2}$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Otra forma de resolver la inecuación $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0$ es tener en cuenta que el signo de los dos factores correspondientes a los polinomios ha de ser el mismo. Así:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \text{ y } x + 3 > 0 \\ \text{o} \\ x - \frac{1}{2} < 0 \text{ y } x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \text{ y } x > -3 \\ \text{o} \\ x < \frac{1}{2} \text{ y } x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \text{o} \\ x < -3 \end{cases}$$

Por tanto, el conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Inecuaciones polinómicas de cualquier grado

Son inecuaciones que se pueden escribir de la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 > 0$, con $a_n \neq 0$.

Para su resolución, se procede de forma similar al caso de las inecuaciones polinómicas de segundo grado, es decir, se factoriza el polinomio y se estudia su signo.

Ejemplo 8: Resolver la inecuación $2x^3 - 4x^2 - 7x \leq -x^2 + x + 3$.

La inecuación anterior es equivalente a $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$

Se descompone el polinomio en producto de factores, para ello se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -8 & -3 \\ -1 & & -2 & 5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 6 & 3 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda: $(x + 1)(x - 3)(2x + 1) \leq 0$. En la tabla siguiente se estudia el signo de cada uno de los factores, en los intervalos determinados por las raíces del polinomio, y efectuando el producto se obtiene su signo.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$2x + 1$	-	-	+	+
$(x + 1)(x - 3)(2x + 1)$	-	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{-1}{2}, 3\right]$

INECUACIONES RACIONALES CON UNA INCÓGNITA

Son aquellas equivalentes a una inecuación de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Ejemplo 9: La inecuación $\dfrac{x-2}{x} \geq \dfrac{2x-1}{x+1}$ es una inecuación racional que es equivalente a $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{2x-1}{x+1} \geq 0$ y realizando operaciones se obtiene $\dfrac{-x^2-2}{x\,(x+1)} \geq 0$

NOTA: Es importante observar que la inecuación $\dfrac{x-2}{x} \geq \dfrac{2x-1}{x+1}$ no tiene porqué ser equivalente a la que se obtiene multiplicando en cruz, $(x-2)(x+1) \geq x(2x-1)$, ya que la desigualdad puede cambiar de sentido dependiendo del signo de x y de $x + 1$.

Para resolverlas se pasan a un miembro todos términos para que en el otro quede 0, luego se estudia el signo de la fracción que se ha obtenido, descomponiendo el numerador y denominador en producto de factores y teniendo en cuenta que el denominador no se puede anular.

Ejemplo 10: Resolver la inecuación $\dfrac{2x^3-3x^2-3}{x^2-1} \geq x$

Pasando x al segundo término queda $\dfrac{2x^3-3x^2-3}{x^2-1} - x \geq 0$

y efectuando la diferencia se obtiene $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-1} \geq 0$

Se descompone el numerador en producto de factores dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio cociente que se obtiene en la anterior división es $x^2 + 1$, que no tiene raíces reales. Por tanto, el numerador queda $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^2+1)$

Se factoriza el denominador, teniendo en cuenta que es diferencia de cuadrados, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Así la inecuación inicial se puede escribir $\dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$.

Al ser $x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor de x, el signo de $\dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ se puede determinar estudiando el signo del resto de factores.

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	-	-	-	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
$\dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$	-	+	-	+

Observar que de los extremos de los intervalos, ni -1 ni 1 son solución de la inecuación ya que anulan el denominador, pero sí lo es -3 . Por tanto, la solución es el conjunto $(-1, 1) \cup [3, +\infty)$.

OTROS TIPOS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver inecuaciones en las que aparecen raíces, logaritmos, exponenciales ... se puede proceder, en algunos casos, de manera análoga a lo expuesto en los apartados anteriores, teniendo en cuenta propiedades específicas de las funciones que haya en la inecuación.

A continuación, se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 11:

a) Resolver $\sqrt{7 + x - x^2} + 2 \geq x$

Se despeja la raíz quedando $\sqrt{7 + x - x^2} \geq x - 2$

se elevan ambos miembros de la desigualdad al cuadrado $7 + x - x^2 \geq x^2 - 4x + 4$

se pasan todos los términos al segundo miembro de la desigualdad $0 \geq 2x^2 - 5x - 3$

se factoriza el polinomio, obteniéndose $0 \geq (2x + 1)(x - 3)$

se calcula el signo del polinomio estudiando el signo de ambos factores en la siguiente tabla

Signo	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$2x + 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$(2x + 1)(x - 3)$	+	-	+

Se observa que los puntos del intervalo $\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$ son soluciones de la inecuación $0 \geq (2x + 1)(x - 3)$ y como los extremos del intervalo verifican la desigualdad, se deduce que $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ es la solución de esta última inecuación.

Como en uno de los pasos se ha elevado al cuadrado es necesario comprobar si el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ también es solución de la inecuación inicial, para ello basta hacer la verificación con un punto del intervalo ya $7 + x - x^2$ no tiene ninguna raíz en dicho polinomio.

Así, sustituyendo x = 0 queda $\sqrt{7 + 0 - 0} + 2 \geq 0$, al ser cierta esta desigualdad se sigue que el intervalo $\left[\frac{-1}{2}, 3\right]$ es la solución de la inecuación inicial.

b) Resolver $\frac{e^x}{e^{3x-2}} < e^{-x}$

Se multiplican ambos miembros por la expresión del denominador, que al ser positiva, da lugar a la inecuación equivalente $e^x < e^{-x} e^{3x-2}$

se realizan operaciones $e^x < e^{2x-2}$

al ser la exponencial estrictamente creciente, la inecuación anterior es equivalente a $x < 2x - 2$

se pasa x al segundo miembro y -2 al primero $2 < x$

Por tanto, la solución de la inecuación inicial es $(2, +\infty)$

c) Resolver $\ln(7x - 13) < 0$

Para eliminar el logaritmo del primer miembro se aplica la función exponencial quedando $e^{\ln(7x-13)} < e^0$ o equivalentemente $7x - 13 < 1$.

Despejando x queda $x < 2$.

Por tanto, la solución de la inecuación inicial es $(-\infty, 2)$.

INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de una inecuación con dos incógnitas, x e y, es $F(x, y) > 0$, donde F es una función.

Ejemplo 12: Son inecuaciones con dos incógnitas las siguientes:

$y - x + 3 < 0$ $\quad x + \ln y > 4$ $\quad x^2 - 5x - y \geq 3 - 4x^3$ $\quad e^{x+2} \leq y - 2$

En esta unidad, principalmente se consideran aquellas inecuaciones en las que se pueda despejar una incógnita, es decir, aquellas que sean equivalentes a una de la forma $y > f(x)$ o $x > g(y)$, siendo f y g funciones de una variable.

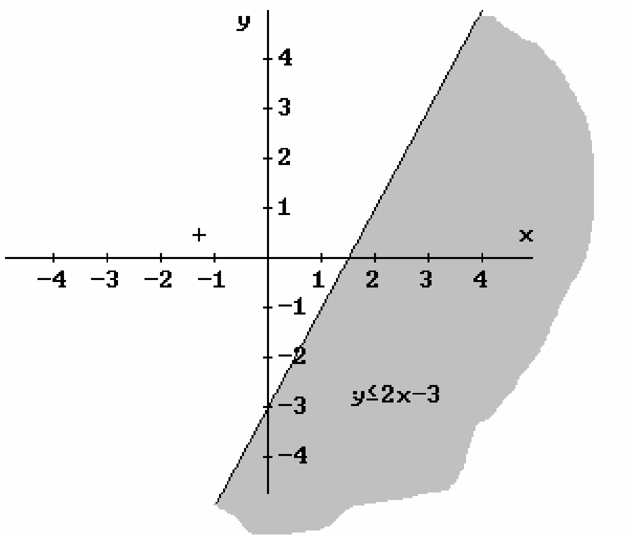
Para resolver la inecuación $y > f(x)$ se representa la curva $y = f(x)$ que determina dos regiones en el plano, una en la que se verifica la desigualdad $y < f(x)$ y otra en la que se cumple $y > f(x)$. La solución de la inecuación es el conjunto de puntos de la región en la que se verifica la desigualdad correspondiente a la inecuación. Análogamente se procede si la inecuación es $x > g(y)$.

Ejemplo 13: Resolver las siguientes inecuaciones:

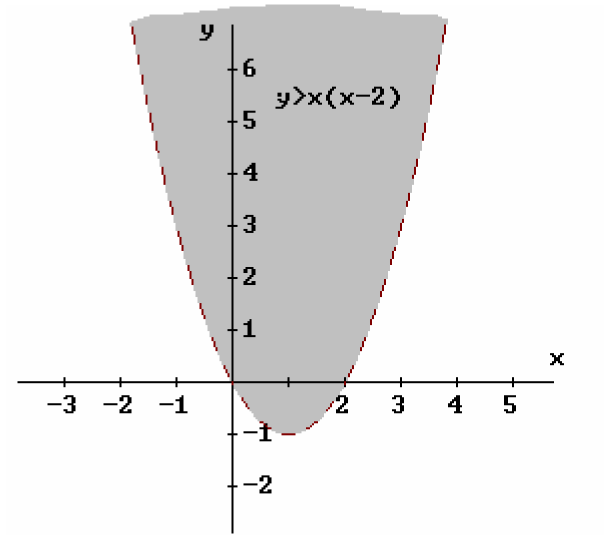
a) $7x - 4 - 3y \geq x + 5$

Se pasa $7x - 4$ al segundo miembro $\qquad - 3y \geq - 6x + 9$
se despeja y, multiplicando por $\frac{-1}{3}$ $\qquad y \leq 2x - 3$

Representando la función $y = 2x - 3$, se obtiene una recta que determina dos semiplanos, uno de los cuáles estará contenido en la solución.
Para determinar este semiplano, se elige un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0, 0), y se sustituye en la última desigualdad $y \leq 2x - 3$, obteniéndose $0 \leq -3$. Al ser esta desigualdad falsa se sigue que los puntos del otro semiplano son solución de la inecuación.
También son solución de la inecuación los puntos de la recta puesto que verifican la inecuación, al ser la desigualdad no estricta.



b) $y > x(x - 2)$
Representando $y = x\,(x - 2)$ se obtiene la parábola que pasa por los puntos (0, 0), (2, 0) y cuyo eje es $x = 1$.
Esta parábola divide al plano en dos regiones, en una de ellas los puntos verifican $y > x\,(x - 2)$ (ésta será la solución) y en la otra $y < x\,(x - 2)$.
Para determinar la región S, solución de la inecuación, basta considerar un punto que no esté en la curva, por ejemplo el punto (1, 3), que sustituido en la inecuación da lugar a $3 > -1$, al ser esta desigualdad cierta la solución es la región a la que pertenece dicho punto, que en este caso corresponde al interior de la parábola.



c) $2x^2 - y^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 2y^2 + 2y$

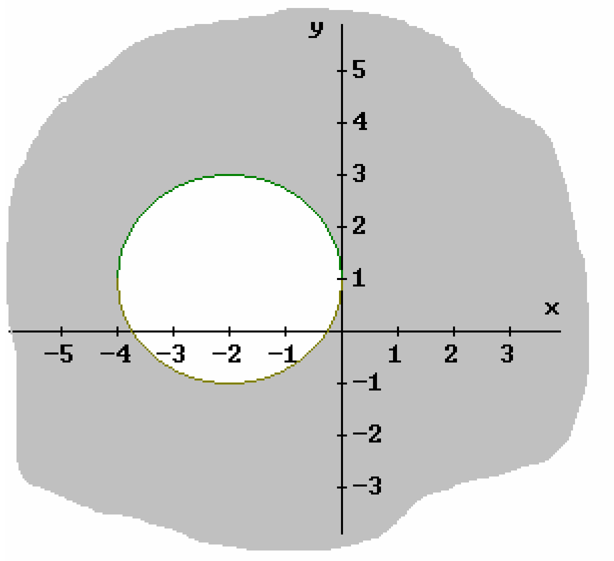
En esta inecuación no se puede despejar ninguna de la dos incógnitas de forma única, por tanto, deberemos proceder de otra manera. En primer lugar se considera la igualdad $2x^2 - y^2 + 4x + 1 = x^2 - 2y^2 + 2y$ o equivalentemente, pasando todos los términos al primer miembro, $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Al ser una ecuación polinómica de segundo grado, tanto en x como en y, veamos si corresponde a una circunferencia de centro (a, b) y radio r, es decir, si se puede escribir de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar los cuadrados perfectos $(x - a)^2$ y $(y - b)^2$.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \iff \left((x+2)^2 - 4\right) + \left((y-1)^2 - 1\right) + 1 = 0 \iff (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Representando $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ se obtiene la circunferencia de centro (-2, 1) y radio 2, que divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior a la circunferencia.

Para determinar la región que corresponde a los puntos solución de la inecuación, basta considerar un punto que no esté en la curva, por ejemplo (1, 1), que sustituido en la inecuación inicial da lugar a $6 \geq 1$. Al ser esta desigualdad cierta, la solución es la región a la que pertenece dicho punto, que en este caso corresponde al exterior de la circunferencia.



d) Resolver la inecuación $y \leq \sqrt{x}$

En primer lugar, hay que tener en cuenta que las soluciones serán puntos del plano (x, y) con $x \geq 0$, ya que en caso contrario no existiría su raíz cuadrada.
Representando $y = \sqrt{x}$ se obtiene la curva de la figura, que divide en dos regiones al semiplano correspondiente a los puntos con $x \geq 0$, en una de ellas los puntos verifican $y < \sqrt{x}$ y en la otra $y > \sqrt{x}$.
Considerando, por ejemplo, el punto (0, 1) y sustituyéndolo en la inecuación se obtiene $1 \leq \sqrt{0}$. Al ser falsa la anterior desigualdad, se deduce que la región que no contiene al punto (0, 1) son solución de la inecuación. Además al ser la desigualdad no estricta, también son solución los puntos de la curva.