EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Resolver por el método de sustitución el sistema $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ y comprobar gráficamente la solución obtenida.

Solución

En primer lugar, despejamos la incógnita *y* de la segunda ecuación quedando $y = 2x + 3$

Se sustituye en la primera ecuación obteniendo $x^2 + 2x + 3 = 2$, que es una ecuación con una incógnita y resolviendo esta ecuación queda:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Sustituyendo este valor de *x* en $y = 2x + 3$, se obtiene y = -2+3 = 1

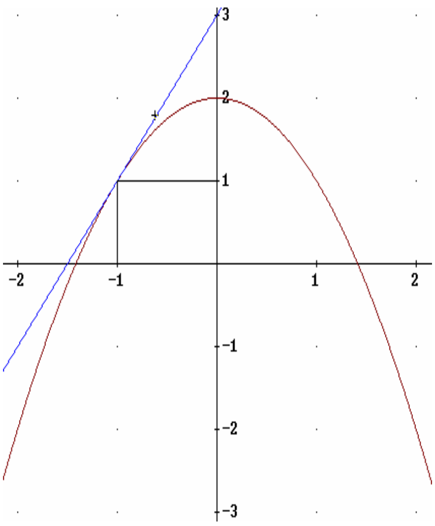
Por tanto, la solución del sistema es (-1, 1).

Para comprobar *gráficamente* la solución se representa los conjuntos de soluciones, S_1 y S_2, de cada una de las ecuaciones.

Para dibujar S_1 despejamos *y* de la primera ecuación obteniendo $y = 2 - x^2$ que es la parábola de eje OY con vértice el punto (0, 2) que se muestra en el dibujo.

Para calcular S_2 despejamos *y* de la segunda ecuación obteniendo la recta $y = 2x + 3$ que pasa por los puntos (0, 3) y (-2, -1).

Dibujando ambas gráficas se observa que el único punto en el que se cortan es el (-1, 1), que es la solución del sistema que se ha obtenido anteriormente por sustitución.



2. Resolver el sistema $\begin{cases} 5\ e^x + y^2 = 5 \\ e^x - y = 1 \end{cases}$ por el método de reducción.

Solución

Para obtener una ecuación sin la incógnita *x* se multiplica la segunda ecuación por -5 quedando el sistema $\begin{cases} 5\ e^x + y^2 = 5 \\ -5e^x + 5y = -5 \end{cases}$ y sumando las dos ecuaciones queda $y^2 + 5y = 0$

Sustituyendo la primera ecuación del sistema dado por $y^2 + 5y = 0$ se obtiene el sistema equivalente $\begin{cases} y^2 + 5y = 0 \\ e^x - y = 1 \end{cases}$

Sacando factor común *y* de la primera ecuación obtenemos $y(y+5) = 0$ de donde, $y = 0$, $y = -5$

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación queda:

$y = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ $y = -5 \Rightarrow e^x + 5 = 1 \Rightarrow e^x = -4$, ecuación que no tiene solución

Luego la solución del sistema es (0, 0).

3. Resolver el sistema $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$ por el método de igualación

Solución

Se despeja una de las incógnitas, por ejemplo la *y*, de las dos ecuaciones quedando $\begin{cases} y = 3 + 2x \\ y = \dfrac{6x - 10}{2} = 3x - 5 \end{cases}$ de donde igualando los dos miembros queda $3 + 2x = 3x - 5$

Despejando *x* de esta igualdad se tiene $x = 8$

sustituyéndolo en y = 3 + 2x se obtiene $y = 3 + 2.8 = 19$

Por tanto, la solución del sistema es (8, 19).

4. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución.

Solución

Para buscar su solución por el método de sustitución se elige una incógnita para despejarla, en este caso se despeja *y* de la tercera ecuación quedando $y = \dfrac{3 - 3z}{2}$

Sustituyendo esta expresión en la primera y segunda ecuación se obtiene:

$$2x + \frac{3-3z}{2} + z = 1 \qquad\qquad 3x - \frac{3-3z}{2} + z = 0$$

operando se tiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 4x - z = -1 \\ 6x + 5z = 3 \end{cases}$

Despejando z de la primera ecuación se obtiene $z = 4x + 1$ y sustituyendo z en la segunda queda $6x + 20x + 5 = 3$, es decir, $26x = -2$, cuya solución es $x = \frac{-2}{26} = \frac{-1}{13}$

Al sustituir este valor en $z = 4x + 1$ queda $z = \frac{9}{13}$

y al sustituir este en $y = \frac{3-3z}{2}$ se obtiene $y = \frac{6}{13}$

Luego la solución del sistema es $x = \frac{-1}{13}$, $y = \frac{6}{13}$, $z = \frac{9}{13}$.

5. Resolver los sistemas: **a)** $\begin{cases} x^3 - y = 1 \\ x^2 = z + 2 \\ -5x^2 + 5x = -1 - y - z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = 9 \end{cases}$

Solución

a) Para resolver el sistema podemos aplicar cualquiera de los métodos expuestos en la parte teórica, pero dadas las características del sistema comenzaremos despejando y de la primera ecuación y z de la segunda para sustituirlas en la tercera ecuación, quedando así una ecuación con x como única incógnita.

$$y = x^3 - 1 \quad , \quad z = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad -5x^2 + 5x = -1 - x^3 + 1 - x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

Factorizando este polinomio queda $(x-1)^2(x-2) = 0$, es decir, $x = 1$, $x = 2$

Sustituyendo estos valores en $y = x^3 - 1$ y en $z = x^2 - 2$ obtenemos:

$x = 1$, $y = 0$, $z = -1$
$x = 2$, $y = 7$, $z = 2$

Por tanto, las soluciones del sistema son (1, 0, -1) y (2, 7, 2).

b) Para que se verifique la primera ecuación $2xy = 0$, o bien $x = 0$ o bien $y = 0$.

Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación queda:

$$x = 0 \Rightarrow 2y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \qquad\qquad y = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $(0, \frac{9}{2})$, (3, 0) y (-3, 0).

6. Resolver el sistema $\begin{cases} \ln(x-1) = y+1 \\ y+z=2 \\ z^2+6y=3 \end{cases}$

Solución

Para resolver este sistema se elige una incógnita que se pueda despejar fácilmente, por ejemplo la y de la segunda ecuación, quedando $y = 2 - z$, y se sustituye en la tercera ecuación obteniéndose $z^2 + 6(2-z) = 3$, es decir, $z^2 - 6z + 9 = 0$.

Factorizando esta ecuación de z se tiene $(z-3)^2 = 0$ y por tanto la solución es $z = 3$

Sustituyendo este valor de z en $y = 2 - z$ queda $y = -1$, pudiendo así escribirse la primera ecuación de la forma $\ln(x - 1) = 0$

Para resolver esta ecuación se aplica la función exponencial, ya que es la inversa del logaritmo, quedando $e^{\ln(x-1)} = e^0$, es decir, $x - 1 = 1$ y por tanto, $x = 2$

Luego, la solución del sistema es (2, -1, 3).