Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE NÚMEROS REALES

1. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de R:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5-2x}{4+x} < 0 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-2} \geq 0 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \right\}$

d) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0 \right\}$ **e)** $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x \leq 3x - 2 \right\}$

Solución

a) A continuación se calcula el conjunto de valores de x que verifican $\frac{5-2x}{4+x} < 0$:

$$\frac{5-2x}{4+x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5-2x < 0 \text{ y } 4+x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \text{ y } x > -4 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \\ \text{o} \\ 5-2x > 0 \text{ y } 4+x < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \text{ y } x < -4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \end{cases}$$

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = (-\infty, -4) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Para calcular el conjunto de valores de x que verifican $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ se puede proceder como en el apartado a) o bien estudiar el signo del numerador y del denominador en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 2$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$\frac{x+2}{x-2}$	+	-	+

Teniendo en cuenta esta tabla, que -2 anula al numerador y 2 al denominador, la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x para los que el polinomio $x^3 - 3x^2 - 4x$ es negativo. Para determinar dichos valores se factoriza el polinomio y se estudia el signo de cada factor en los intervalos determinados por los puntos que anulan el polinomio, como se muestra a continuación.

Las raíces del polinomio son:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 3x - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o } x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

por tanto, al ser las raíces $x = 0$, -1 y 4, el polinomio se puede factorizar como sigue:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x+1)(x-4)$$

En la siguiente tabla se determina el signo del polinomio según los valores de x:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
x	-	-	+	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
$x^3 - 3x^2 - 4x$	-	+	-	+

Así, el polinomio es negativo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 4)$, de donde, $C = (-\infty, -1) \cup (0, 4)$.

d) Para determinar los valores de x que verifican $\frac{x^2-4}{3x-9} \geq 0$ se factorizan los polinomios del numerador y del denominador quedando

$$\frac{x^2-4}{3x-9} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$$

y se estudia su signo en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-3)}$	-	+	-	+

Por tanto, la fracción polinómica es positiva en los intervalos $(-2, 2)$ y $(3, +\infty)$ y se anula en los valores de x que anulan el polinomio del numerador, es decir, en -2 y 2. Así, $D = [-2, 2] \cup (3, +\infty)$.

e) Los puntos del conjunto E han de verificar la inecuación $x^2 + 4x \leq 3x - 2$, que se puede escribir de la forma:

$$x^2 + 4x \leq 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 \leq 0$$

Para determinar los valores de x que verifican la anterior desigualdad, se factoriza $x^2 + x + 2$, para lo que se calculan sus raíces:

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Al no tener el polinomio raíces reales, el signo de éste es el mismo para cualquiera valor de x. Como, por ejemplo, para $x = 0$ el valor del polinomio es 2, se concluye que el polinomio es siempre positivo.

Por tanto, $E = \emptyset$.

2. Expresar mediante intervalos los siguientes subconjuntos de R:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 1 \right\}$ **b)** $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| > 2 \right\}$ **c)** $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| > 2x + 5 \right\}$

Solución

a) El conjunto A está formado por las soluciones de la inecuación $|2x - 1| \leq 1$, que se resuelve a continuación teniendo en cuenta la propiedad "$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$":

$$|2x - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Por tanto, la expresión mediante intervalos del conjunto A es $A = [0, 1]$.

b) El conjunto B está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x^2 - 1| > 2$. Utilizando la propiedad "$|a| \geq k \Leftrightarrow a \leq -k$ o $a \geq k$", se tiene:

$$|x^2 - 1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > 2 \quad \text{o} \quad x^2 - 1 < -2$$

Por tanto, analizando cada una de estas dos posibilidades, queda:

- $x^2 - 1 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ o $x < -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- $x^2 - 1 < -2 \Leftrightarrow x^2 < -1$, lo que no es posible para ningún valor real de x

En consecuencia, la expresión mediante intervalos del conjunto B es $B = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

c) El conjunto C está formado por los valores de x que verifican la desigualdad $|x + 1| > 2x + 5$. Estos valores se pueden calcular como en el apartado anterior o aplicando la definición de valor absoluto como sigue:

- Si $x + 1 \geq 0$, entonces $|x + 1| = x + 1$ y la inecuación queda $x + 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $x < -4$, que es incompatible con el supuesto de partida $x + 1 \geq 0$. Por tanto, la inecuación no tiene solución.
- Si $x + 1 < 0$, entonces $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ y la inecuación queda $-x - 1 > 2x + 5$, equivalentemente, $3x + 6 < 0$, es decir, $x < -2$. Como los valores que cumplen $x < -2$ verifican también el supuesto de partida, $x + 1 < 0$, la solución es $(-\infty, -2)$.

En consecuencia, el conjunto C es el intervalo $(-\infty, -2)$.

3. Ordenar los siguientes números reales de menor a mayor: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, 4, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{6}$.

Solución

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

- Teniendo en cuenta la expresión decimal de cada número:

  $$\frac{1}{4} = 0'25 \qquad \frac{2}{3} = 0'\widehat{6} \qquad \sqrt{5} = 2'23606797\ldots \qquad \frac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$$

  se deduce que $\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \sqrt{5} < 4$.

- Expresando todos los números en forma de fracción y reduciéndolas a común denominador: Al ser m.c.m.$\{4, 3, 6\} = 12$, se tiene $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $4 = \frac{48}{12}$, $\sqrt{5} = \frac{12\sqrt{5}}{12}$ y $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

  Comparando los numeradores de las fracciones de denominador 12, se deduce:

  $$\frac{2}{12} < \frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{12\sqrt{5}}{12} < \frac{48}{12}$$

  y, por tanto, $\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < \sqrt{5} < 4$.

4. Determinar la expresión decimal de los números racionales $\frac{3}{4}$, $\frac{-8}{3}$ y $\frac{139}{30}$ y decir de qué tipo son.

Solución

$\frac{3}{4}$ = 0'75, es un número decimal finito o exacto.

$\frac{-8}{3} = -2'\widehat{6}$, es un número decimal periódico puro cuyo periodo es 6.

$\frac{139}{30} = 4'6\widehat{3}$, es un número decimal periódico mixto cuyo periodo es 3 y cuyo anteperiodo es 6.

5. Indicar a que conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números:

$$\frac{-8}{4},\ \frac{18}{7},\ \sqrt{4},\ -\sqrt{5},\ 1+\sqrt{3},\ \sqrt{-6},\ \sqrt[3]{4'25},\ \frac{3e}{2},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ \frac{6}{\sqrt[3]{8}}$$

Solución

$\frac{-8}{4} = -2 \in Z \subset Q \subset R$

$\frac{18}{7} \in Q \subset R$

$\sqrt{4} = 2 \in N \subset Z \subset Q \subset R$

$-\sqrt{5} \in I \subset R$

$1+\sqrt{3} \in I \subset R$

$\sqrt{-6}$ no es un número real

$\sqrt[3]{4'25} = 1'61981 \in Q \subset R$

$\frac{3e}{2} \in I \subset R$

$\frac{3}{\sqrt{5}} \in I \subset R$

$\frac{6}{\sqrt[3]{8}} = \frac{6}{2} = 3 \in N \subset Z \subset Q \subset R$

6. Realizar de forma detallada las siguientes operaciones simplificando el resultado:

a) 24:3.4 **b)** 24:(3.4) **c)** $\frac{4}{15} + 6:\frac{2}{3}$ **d)** $\left(\frac{4}{15} + 6\right):\frac{2}{3}$

e) $5 + \frac{1}{4}.3:\frac{1}{2}$ **f)** $5 + \frac{1}{4}.\left(3:\frac{1}{2}\right)$ **g)** $(\sqrt{2} - 1).(3 - \sqrt{2})$ **h)** $(3\sqrt{5} - 2)^2$

Solución

Para realizar este ejercicio se ha de tener en cuenta la jerarquía de las operaciones. En primer lugar, se realizan las operaciones de los paréntesis si los hay, después los productos y cocientes y para finalizar las sumas y restas. Además, si hay multiplicaciones y divisiones sin paréntesis se hacen las operaciones comenzando por la izquierda.

a) 24:3.4 = 8.4 = 32

b) 24:(3.4) = 24:12 = 2

c) $\frac{4}{15} + 6:\frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{18}{2} = \frac{4}{15} + 9 = \frac{4}{15} + \frac{9.15}{15} = \frac{4+135}{15} = \frac{139}{15}$

d) $\left(\frac{4}{15}+6\right):\frac{2}{3} = \left(\frac{4}{15}+\frac{6.15}{15}\right):\frac{2}{3} = \frac{4+90}{15}:\frac{2}{3} = \frac{94}{15}:\frac{2}{3} = \frac{94.3}{15.2} = \frac{2.47.3}{3.5.2} = \frac{47}{5}$

e) $5 + \frac{1}{4}.3:\frac{1}{2} = 5 + \frac{3}{4}:\frac{1}{2} = 5 + \frac{3.2}{4.1} = 5 + \frac{3}{2} = \frac{5.2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$

f) $5 + \frac{1}{4}.\left(3:\frac{1}{2}\right) = 5 + \frac{1}{4}.\frac{6}{1} = 5 + \frac{6}{4} = \frac{5.4}{4} + \frac{6}{4} = \frac{26}{4} = \frac{2.13}{2^2} = \frac{13}{2}$

g) $(\sqrt{2} - 1).(3 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$

h) $(3\sqrt{5} - 2)^2 = 9.5 - 12\sqrt{5} + 4 = 49 - 12\sqrt{5}$

7. Dados los intervalos $A = (-\infty, -2]$, $B = (-3, 4]$ y $C = [4, 5)$ calcular:

a) $B \cup C$ **b)** $A \cap B$ **c)** $(A \cup B) \cap C$ **d)** $A \cup C^c$

e) $(A \cap C)^c$ **f)** $A^c \cap C^c$ **g)** $A^c \cap B$ **h)** $(A \cap (B \cup C))^c$

Solución

a) $B \cup C = (-3, 5)$

b) $A \cap B = (-3, -2]$

c) En primer lugar se realiza la operación del paréntesis, $A \cup B = (-\infty, 4]$ y, por tanto, se tiene:

$$(A \cup B) \cap C = \{4\}$$

d) En primer lugar se calcula el complementario de $C = [4, 5)$, quedando $C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$. Por tanto, $A \cup C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$.

e) $A \cap C = \emptyset$, de donde, $(A \cap C)^c = \mathbb{R}$.

f) Calculando el complementario de $A = (-\infty, -2]$ queda $A^c = (-2, +\infty)$ y como del apartado d) se sabe que $C^c = (-\infty, 4) \cup [5, +\infty)$, se tiene $A^c \cap C^c = (-2, 4) \cup [5, +\infty)$.

g) En el apartado f) se ha obtenido que $A^c = (-2, +\infty)$, por tanto, $A^c \cap B = (-2, 4]$.

h) Para calcular $(A \cap (B \cup C))^c$, se calcula en primer lugar $B \cup C$ que por el apartado a) se sabe que es el intervalo $(-3, 5)$.

Por tanto, $A \cap (B \cup C) = (-3, -2]$ y su complementario es $(A \cap (B \cup C))^c = (-\infty, -3] \cup (-2, +\infty]$.

8. Determinar el signo de las siguientes expresiones teniendo en cuenta que a es un número real negativo, b positivo y $|a| > |b|$:

a) $-a$ **b)** $-b$ **c)** $a - b$ **d)** $-a + b$ **e)** $a + b$

f) $|a| - |b|$ **g)** $|a - b|$ **h)** $|a| - a$ **i)** $|b| - b$ **j)** $\frac{1}{|a|} - \frac{1}{|b|}$

Solución

a) Al ser a un número negativo, su opuesto $-a$ es un número positivo.

b) Al ser b un número positivo, su opuesto $-b$ es un número negativo.

c) Teniendo en cuenta que a es un número negativo y que, como se ha visto en el apartado anterior, $-b$ también lo es, se deduce que $a - b$ es un número negativo ya que $a - b = a + (-b)$ y la suma de dos números negativos es un número negativo.

d) Al ser $-a$ y b dos números positivos, su suma $-a + b$ también lo es.

e) Al ser a un número negativo y verificarse que $|a| > |b|$, se deduce que $a + b$ ha de ser negativo.

f) Al verificarse que $|a| > |b|$, se deduce $|a| - |b| > 0$.

g) El valor absoluto de cualquier número no nulo es positivo, luego $|a - b| > 0$.

h) Como $|a| > 0$, $-a > 0$ y $|a| - a = |a| + (-a)$, se deduce que $|a| - a > 0$.

i) Al ser b un número positivo se tiene que $|b| = b$, de donde se sigue que $|b| - b = b - b = 0$.

j) Al ser $|a| > |b|$ y ambos positivos, considerando los inversos se cumple $\frac{1}{|a|} < \frac{1}{|b|}$, de donde se deduce que $\frac{1}{|a|} - \frac{1}{|b|}$ es negativo.

9. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$:

a) $2x - 4 = 6$	**b)** $2x + 6 = 4$	**c)** $5x + 7 = -x + 3$	**d)** $\frac{4}{3}x = \frac{1}{2}$
e) $3x^2 - 5 = 7$	**f)** $4 - x^2 = 1$	**g)** $2x^2 + 7x - 15 = 0$	**h)** $2x^2 + 3 = 0$

Solución

a) Despejando la incógnita de $2x - 4 = 6$ se tiene $x = (6+4):2 = 10:2 = 5$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

b) Despejando la incógnita de $2x + 6 = 4$ se tiene $x = (4-6):2 = -2:2 = -1$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{N}$ ya que -1 no es un número natural.

c) Pasando todos los términos al primer miembro de la igualdad, la ecuación $5x + 7 = -x + 3$ queda $6x + 4 = 0$ y despejando la incógnita se tiene, $x = -4:6 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$ ya que la fracción $\frac{-2}{3}$ no es un número entero y, por tanto, tampoco natural.

d) Despejando la incógnita de la ecuación $\frac{4}{3}x = \frac{1}{2}$ se tiene $x = \frac{1}{2}:\frac{4}{3} = \frac{3}{8}$, luego la ecuación tiene solución en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$.

e) Despejando x^2 de la ecuación $3x^2 - 5 = 7$ se tiene $x^2 = (7+5):3 = 12:3 = 4$, de donde, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, $x = 2$ y $x = -2$, en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$; sin embargo, tiene una única solución, $x = 2$, en $\mathbb{N}$ ya que -2 no es un número natural.

f) Despejando x^2 de la ecuación $4 - x^2 = 1$ se tiene $x^2 = 4-1 = 3$, de donde, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, en $\mathbb{R}$ y no tiene ninguna solución en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, ya que $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales.

g) Resolviendo la ecuación $2x^2 + 7x - 15 = 0$, se tiene:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-15)}}{2.2} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4} = \begin{cases} -5 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto, en $\mathbb{N}$ la ecuación no tiene ninguna solución, en $\mathbb{Z}$ tiene una sola solución, $x = -5$, y en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tiene dos soluciones, $x = -5$ y $x = \frac{3}{2}$.

h) Despejando x^2 de la ecuación $2x^2 + 3 = 0$ se tiene $x^2 = \frac{-3}{2}$, de donde se deduce que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ ya que el cuadrado de cualquier número real no puede ser negativo. Por tanto, tampoco tiene solución $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.