DETERMINANTES

CÁLCULO

A cualquier matriz cuadrada A se le puede asociar un número real, que se denomina **determinante** de A. Este número se suele simbolizar $|A|$ o det(A) y se calcula como se explica a continuación.

- Determinante de **orden 1**: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

  Ejemplo 1: $|3| = 3$, $|-3| = -3$ (No confundir el determinante de orden uno con el valor absoluto o módulo de un número real)

- Determinante de **orden 2**: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

  Ejemplo 2: $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - (-1)5 = 32 + 5 = 37$

- Determinante de **orden 3** (Regla de Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

  Ejemplo 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-5)(-2) + 2.6.4 + 3.0(-1) - 3(-5)4 - 2.0(-2) - 1.6(-1) = 10 + 48 + 0 + 60 - 0 + 6 = 124$

- Determinante de **orden *n***:

  Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los conceptos de menor complementario y de adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A.

  - **Menor complementario** del elemento a_{ij} de una matriz A es el determinante de la matriz que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A.

  - **Adjunto** del elemento a de una matriz A es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del elemento a_{ij}. Se simboliza A_{ij}.

  Ejemplo 4: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  a) El menor complementario del elemento a_{23} de A es, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2).2 - 0.2 = -4$, este determinante es el de la submatriz de A obtenida al quitarle la segunda fila y la tercera columna.

  b) El adjunto del elemento a_{23} de A es: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

  El **determinante de una matriz cuadrada *A* de orden *n*** se calcula efectuando la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos, es decir:.

  $|A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in}$ (desarrollo por la fila i)

  $|A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj}$ (desarrollo por la columna j)

Ejemplo 5: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, en primer lugar elegimos una fila o columna para desarrollar el determinante, por ejemplo la segunda fila.

Así, $|A| = 0.\,A_{21} + 1.\,A_{22} + (-1)\,A_{23} + 3.\,A_{24} = A_{22} - A_{23} + 3.\,A_{24}$

A continuación calculamos los adjuntos necesarios, mediante la Regla de Sarrus.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 4 + 20 - 0 + 8 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 - 8 + 4 + 4 - 6 + 8) = 4$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 20 + 0 - 0 - 4 + 20 = -8$$

En consecuencia $|A| = 2 - 4 + 3(-8) = -26$

PROPIEDADES

1. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.

2. Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número.

3. Si en una matriz se suma a una fila (columna) el producto de otra fila (columna) por un número real, el determinante no varía.

4. El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo.

5. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo.

6. El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo.

7. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $|AB| = |A|.|B|$

8. $|A^t| = |A|$

9. Si A es una matriz cuadrada de orden n y t es un número real entonces $|tA| = t^n|A|$

10. Si A es una matriz regular entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

El cálculo de determinantes se simplifica utilizando algunas de las propiedades anteriores, con el objeto de obtener el máximo número de ceros en la fila (columna) elegida para desarrollar el determinante.

Ejemplo 6: Para calcular $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, elegimos una fila o columna, por ejemplo la segunda fila, para efectuar el desarrollo. Previamente, vamos a hacer que sean cero los dos últimos elementos de dicha fila, aplicando algunas propiedades de los determinantes.

Así, $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{C_4 \to C_4 - 3C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= 0.\,A_{21} + 1.\,A_{22} + 0.\,A_{23} + 0.\,A_{24} = A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 4 - 16 - 48 + 6 - 8 = -26$$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo de la matriz inversa, además del ya expuesto en el apartado anterior de Matrices.

En primer lugar, señalar que este concepto permite dar la siguiente caracterización de matrices regulares: **A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$**

Se llama **matriz adjunta** de A a la matriz cuyo elemento ij es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A y se representa, Adj(A). Es decir, Adj(A) = (A_{ij}).

Se puede demostrar que la **matriz inversa** de una matriz regular A es $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\mathrm{Adj}(A))^t}$

Ejemplo 7: Cálculo de la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

En primer lugar calculamos su determinante para comprobar si es regular

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 12 = 10$$

Ahora calculamos los adjuntos de todos los elementos

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$

Por tanto, $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

El concepto de determinante permite obtener un nuevo método para el cálculo del rango de una matriz, además del ya expuestos en el apartado anterior de Matrices.
Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los siguientes conceptos:

- Menor de orden *p* de una matriz *A* es el determinante de una matriz que se obtiene considerando únicamente *p* filas y *p* columnas de *A*.

- **Orlar un menor de orden *p*** de una matriz *A* es considerar un menor de orden $p+1$ obtenido al agregarle, a dicho menor de orden *p*, otra fila y otra columna de la matriz *A*.

Además, se verifica que si *M* es una matriz cuadrada de orden *p* entonces:

$$\textbf{rg } M = p \iff |M| \neq 0$$
$$\textbf{rg } M < p \iff |M| = 0$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede calcular el rango de cualquier matriz *A* de orden $m \times n$ mediante los pasos del siguiente procedimiento:

1) Se busca un menor de orden 1 no nulo,
   - si no existe entonces rg $A = 0$ y se termina el procedimiento.
   - si existe entonces rg $A \geq 1$, y se continúa en el paso siguiente.
2) Se calculan los menores de orden 2 que se obtienen orlando el menor de orden 1 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 1$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 2$, y se continúa en el paso siguiente.
3) Se calculan los menores de orden 3 que se obtienen orlando el menor de orden 2 no nulo,
   - si no existen o son todos cero entonces rg $A = 2$ y se termina el procedimiento.
   - si existe alguno distinto de cero entonces rg $A \geq 3$, y se continúa en el paso siguiente.
4) Se repite el proceso como en los pasos anteriores, orlando el menor no nulo obtenido.

Este procedimiento finaliza cuando se obtiene un menor de orden *r* no nulo y los menores de orden $r+1$ obtenidos al orlar dicho menor o bien no existen o son cero. En este caso se tiene rg $A = r$.

Observar que: rg $A \leq$ nº de filas de *A* y rg $A \leq$ nº de columnas de *A*.

Ejemplo 8: Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ siguiendo los pasos del procedimiento anterior.

1º) El menor de orden 1 formado por la primera fila y primera columna es $|2| = 2 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 1$. Veamos qué ocurre con los de orden 2 que se obtienen al orlar este menor.

2º) Se orla con la 2ª fila y 2ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto rg $A \geq 2$. Veamos qué ocurre con los de orden 3 que se obtienen al orlar este menor.

3º) Se orla con la 3ª fila y 3ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 24 + 16 - 24 = 48 - 48 = 0$. Al ser nulo se orla el menor de orden 2 con la 3ª fila y 4ª columna de *A*, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 48 = 0$. Al ser nulo y haber considerado todas las filas y columnas de A se tiene que rg $A = 2$.